MS I.6

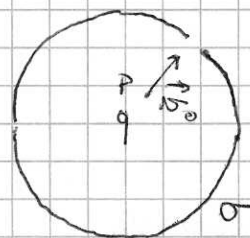
Una superficie sferica cava è disposta nel vuoto, e su di essa è distribuita uniformemente una carica positiva Q, con densità superficiale σ.

Nella sfera è praticato un piccolo foro F, attraverso il quale viene lanciata radialmente, dall'interno verso l'esterno, una pallina puntiforme P di massa m, dotata di carica negativa $-q$.

Con quale velocità iniziale minima v_0 deve essere lanciata, affinché essa possa allontanarsi indefinitamente, sfuggendo all'attrazione della sfera?

→ errore di stampa

$(Q = 1.0 \cdot 10^{-8}\ C,\ \sigma = 2.0 \cdot 10^{-7}\ C/m^2,\ m = \cancel{10}\ 1.0 \cdot 10^{-6}\ Kg,\ q = Q)$



Ignoriamo la presenza del piccolo foro.

Si risolve con considerazioni energetiche:

la variaz. di energia potenziale della pallina tra il punto di partenza e il punto di arrivo (a distanza infinita) deve essere $\leq$ ~~della~~ energia cinetica iniziale della ~~particella~~ pallina:

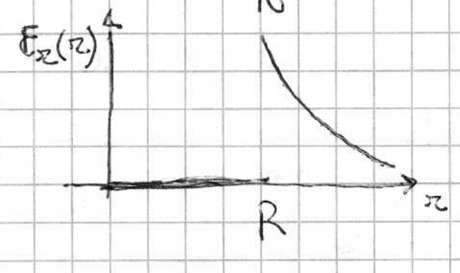
$$E_{in} = E_{fin} = K_{fin} + U_{fin}$$

U_{fin} → $= 0$ per scelta della cost. arbitraria

K_{fin} → ≥ 0 ("=" per il caso limite richiesto dall'esercizio)

E_{in} → $$K_{in} + U_{in} = \frac{1}{2} m v_0^2 + (-q) V_{in} = \frac{1}{2} m v_0^2 - q V_{in}$$

$$V(r) = \begin{cases} \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} & r \geq R \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} & r \leq R \end{cases}$$



$$E_r(r) = \begin{cases} \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & r > R \\ 0 & r < R \end{cases}$$

⟹ no forza ≡ no variaz. en. pot ≡ no variaz. di en. cin finché la pallina è all'interno $(r < R)$

Indipendentemente dal punto di partenza (purché all'interno della sfera) si ha dunque:

$$V_{in} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

$$\Longrightarrow \quad K_{in} + U_{in} = 0 \iff \frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 R} = 0$$

R si ricava da σ e Q: $Q = 4\pi R^2 \sigma$, $R = \left(\frac{Q}{4\pi\sigma}\right)^{1/2}$

$$v_0^2 = \frac{2}{m} \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 R} \Longrightarrow v_0 = 5.3 \text{ m/s}$$

$\boxed{\text{MS I 7}}$

Calcolare la differenza tra il campo ~~al~~ immediatamente all'esterno del foro dell'esercizio precedente quando si ignora l'interruzione della distribuzione di carica σ e il caso in cui la presenza del foro venga tenuta in considerazione.

Perché l'approssimazione del I caso è buona per risolvere l'esercizio precedente?

in assenza del foro, il campo subito fuori dalla sfera è

$$E_r = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

e nullo all'interno (come già discusso, c'è una discontinuità).

In presenza del foro, usiamo il principio di sovrapp., sommando al campo del guscio intero (scritto sopra) il campo di una piccola calotta sferica con densità di carica $-\sigma$.

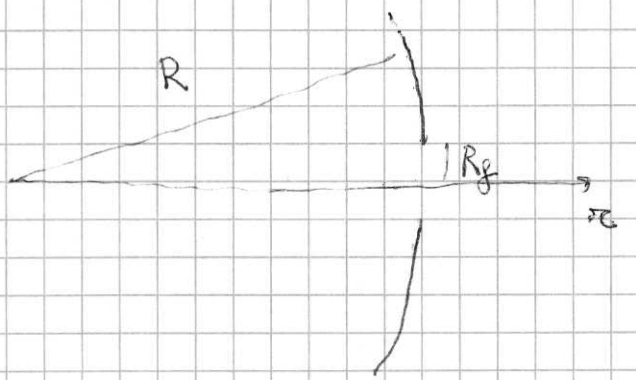
Poiché il foro è piccolo, approssimiamo la calotta sferica con un dischetto piano di raggio pari al raggio del foro R_f.

Abbiamo già fatto questo calcolo; adattando la notazione a quella usata qui, il campo ~~di~~ ~~r~~ lungo l'asse del ~~foro~~ dischetto è

$$E_r = -\frac{(-\sigma)}{2\varepsilon_0}\left[\frac{r-R}{\sqrt{R_f^2 + (r-R)^2}} - \text{sgn}(r-R)\right]$$

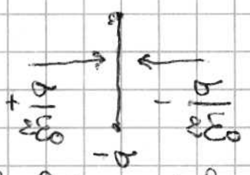
(diretto ortogonalm. al piano del foro e ~~di verso opposto~~ cambia verso tra prima e dopo il ~~foro~~ dischetto

Quando siamo molto vicini al dischetto, $|r-R| << R_f$ e il campo diventa



$$\lim_{\frac{|r-R|}{R_f}\to 0} E_r = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\lim\left[\frac{1}{\sqrt{\frac{R_f^2}{(r-R)^2}+1}} - \mathrm{sgn}(r-R)\right]$$

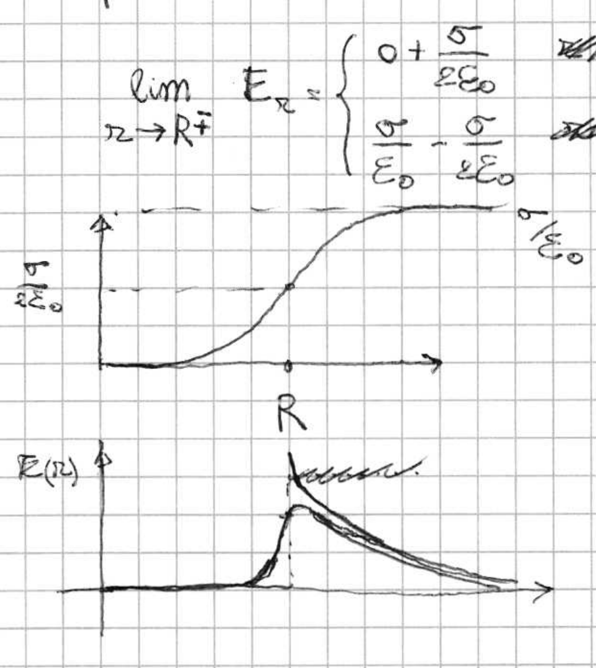
$$= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[-\mathrm{sgn}(r-R)\right]$$



come il campo di uno strato.

Dunque nelle immediate vicinanze del foro si ha (p. di sovrapp.)

$$\lim_{r\to R^{\mp}} E_r = \begin{cases} 0+\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \\ \frac{\sigma}{\varepsilon_0}-\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\end{cases} \Longrightarrow \text{non è più discontinuo}$$



Ma se R_f è piccolo, il contributo del dischetto va rapidamente a 0 allontanandosi dalla superficie, per cui la trattazione dell'esercizio precedente è adeguata.

MS 1.13

Una carica Q $, 10^{-8} C$ è distribuita all'interno di una sfera di raggio R $, 10\,cm$; in modo che la densità di carica sia proporzionale alla distanza r dal centro della sfera.

Calcolare la d.d.p. tra il centro e la superficie della sfera.

$\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\,\hat{r}$

t. di G.

$$\Phi(\vec{E}) = E(r)\cdot 4\pi r^2 = \frac{\int_{\le r} \rho(r')\, d\tau'}{\varepsilon_0} = \frac{\rho_0 \pi r^4}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0}\left(\frac{r}{R}\right)^4 \Rightarrow \boxed{E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^4}\, r^2}$$

$$\rho(r) = \rho_0 r \longrightarrow \int_S \rho_0 r\, d\tau = Q$$

$$Q = \int_0^R dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta\ \rho_0 r \cdot r^2 \sin\theta =$$ (se necessario, richiamare l'elem. di volume in coord. sferiche con il disegno del tassello di cocomero)

$$= \cancel{4}\pi \frac{1}{\cancel{4}} R^4 \cdot \rho_0 \Rightarrow \rho_0 = \frac{Q}{\pi R^4} \circledast$$

$$\Delta V = \int_0^P \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_0^R \vec{E}\cdot d\vec{r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^4}\int_0^R r^2\, dr = \frac{Q}{12\pi\varepsilon_0 R} = 299.4\,V$$

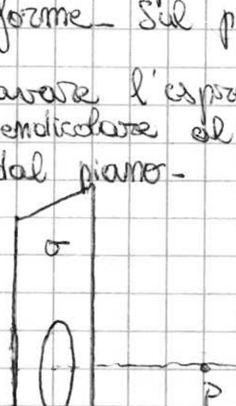
(ma è corretto scrivere 300)

MS 1.15

E' dato un piano infinito, nel vuoto, carico con densità superficiale σ uniforme. Sul piano è praticato un foro circolare di raggio R.

Ricavare l'espressione del campo elettrico in un punto P, sulla perpendicolare al piano passante per il centro del foro, a distanza x dal piano.

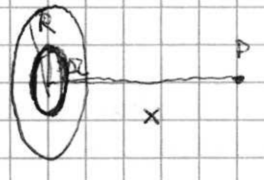
in gen. posizione ✗



Per il principio di sovrapposizione, il campo in tutto lo spazio è uguale alla somma del campo di uno strato carico con densità σ e di un disco uniformemente carico con densità $-\sigma$.

$\Rightarrow$ calcoliamo il campo di un disco lungo l'asse.

Possiamo applicare il princ. di sovrapp. per anelli di spess. infinitesimo sia per il campo, sia per il potenziale. Quest'ultimo caso è generalmente più semplice, almeno perché richiede di maneggiare solo quantità scalari.



(come NV 1.6, ma att.! sulla mia edizione c'è un segno sbagliato)

$$dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{\sqrt{r^2+x^2}} \qquad dq = \underbrace{2\pi r\, dr}_{\text{area dell'anello di spess. } dr}\cdot\sigma$$

$$dV = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{r}{\sqrt{r^2+x^2}}\,dr$$

$$V = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\int_0^R \frac{r}{\sqrt{r^2+x^2}}\,dr \qquad \text{(a meno di una costante arbitraria)}$$

$$V = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{r^2+x^2}\right)\Big|_0^R = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{R^2+x^2} - |x|\right) \qquad |x| = \sqrt{x^2}$$

(e infatti deve essere una funzione pari)

$$E_{asse} = -\frac{dV}{dx} = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\frac{x}{\sqrt{R^2+x^2}} - \mathrm{sgn}(x)\right)$$

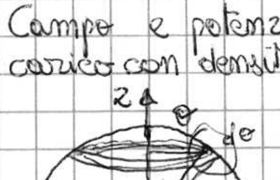
Nel nostro caso, la densità di carica è $-\sigma$, per cui l'espressione precedente cambia segno.

Sommando il contributo $E_s = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} V \cdot \mathrm{sgn}(x)$ dello strato, abbiamo infine:

$$E_P = \cancel{\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} V\,\mathrm{sgn}(x)} + \frac{\sigma x}{2\varepsilon_0\sqrt{R^2+x^2}} - \cancel{\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\mathrm{sgn}(x)} = \frac{\sigma x}{2\varepsilon_0\sqrt{R^2+x^2}}$$

$\boxed{\text{MS 1.29}}$

Campo e potenziale nel centro O di un guscio emisferico di raggio R uniformem. carico con densità σ



$$dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{R} \qquad dq = 2\pi \underbrace{R\sin\theta}_{\text{raggio anello}}\cdot\underbrace{R\,d\theta}_{\text{spess anello}}\cdot\sigma$$

$$dV = \frac{\sigma}{\cancel{4\pi}\varepsilon_0 \cancel{R}}\cdot\cancel{2\pi} R^{\cancel{2}}\sin\theta\, d\theta$$

$$V = \int_0^{\pi/2}\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}R\sin\theta\,d\theta = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}R$$

ma poiché abbiamo fatto uso del fatto che il punto O è sempre a distanza R da tutti gli anelli, questa espressione vale solo in O e non è generalizzabile all'intorno di O ($\Leftrightarrow$ sull'asse). Perciò il campo andrà calcolato ancora per sovrapposizione, anziché come $-\vec{\nabla} V$.

Sfruttando la simmetria, calcoliamo la sola componente lungo l'asse z

$$dE_z = \frac{(-)1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{R^2}\cdot\cos\theta \qquad dq = 2\pi R^2 \sin\theta\, d\theta \cdot \sigma \quad \text{(come prima)}$$

$\hookrightarrow \cos(\pi-\theta)$

$$E_z = -\int_0^{\pi/2} \frac{\sigma}{\cancel{4\pi}\varepsilon_0}\frac{\cancel{2\pi} \cancel{R^2}}{\cancel{R^2}} \sin\theta\cos\theta\, d\theta = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{2}\sin^2\theta\Big|_0^{\pi/2} = -\frac{\sigma}{4\varepsilon_0}$$

$\sigma > 0$ ($<$)

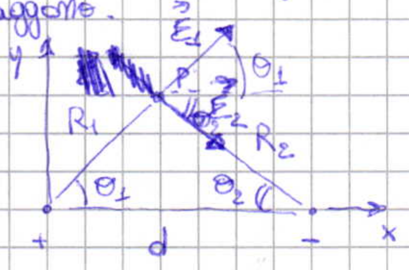
verso z decrescenti (crescenti)

NV 1.3

Due fili indefiniti, paralleli e rettilinei, sono carichi con densità uniforme λ, eguale in modulo per entrambi, ma di segno opposto, pari a 10^{-8} C/m.

La distanza tra i due fili è $d = 5$ cm. Calcolare il campo elettrostatico $\vec{E}$ nel punto P distante $R_1 = 3$ cm dal filo positivo e $R_2 = 4$ cm da quello negativo.

Calcolare inoltre la forza per unità di lunghezza con cui i due fili si attraggono.



$$E_1 = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R_1} \qquad E_2 = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R_2}$$

Per le coordinate di P:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = R_1^2 \\ (x-d)^2 + y^2 = R_2^2 \end{cases} \quad \text{(intersez. di 2 circonferenze)}$$

$$\Rightarrow x = \frac{d^2 + R_1^2 - R_2^2}{2d} \qquad y = \pm\left[R_2^2 - (x-d)^2\right]^{1/2}$$

$$\vec{E}_{tot} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

$$E_{tot,x} = E_1 \cos\theta_1 + E_2 \cos\theta_2 \qquad \text{con } y = R_1 \sin\theta_1 = R_2 \sin\theta_2$$

$$E_{tot,y} = E_1 \sin\theta_1 - E_2 \sin\theta_2$$
$$(+ E_2 \sin(2\pi - \theta_2))$$

$$E_{tot} = \left(E_x^2 + E_y^2\right)^{1/2} \qquad \mathrm{tg}\,\theta = E_y / E_x$$

$E_1 = 6.0 \cdot 10^3$ V/m, $E_2 = 4.5 \cdot 10^3$ V/m, $x = 1.8$ cm, $y = 2.4$ cm

$E_{tot} = 7.5 \cdot 10^3$ V/m $\quad \theta = 16.3°$ (prevedibile graficamente)

La forza su un elemento di lunghezza dz ($\Rightarrow$ carica $-\lambda\, dz$) nel campo dell'altro filo è

$$dF = -\lambda\, dz \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 d} \Rightarrow \frac{dF}{dz} = \frac{-\lambda^2}{2\pi\varepsilon_0 d} = 3.6 \cdot 10^{-5} \text{ N/m}$$