Prova scritta 24/03/2006 - es. 1

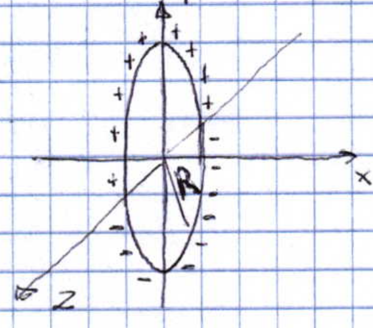
Un anello sottile di raggio $R = 12\,cm$ disposto sul piano yz è composto da due semicirconferenze cariche con densità di carica rispettivamente $+\lambda$ $(y>0)$ e $-\lambda$ $(y<0)$, con $\lambda = 2.6 \cdot 10^{-8}\ C/m$

Determinare:

a) Il valore del momento di dipolo $\vec{p}$ del sistema (specificandone direzione e verso).

b) L'espressione del campo elettrico $\vec{E}$ sull'asse x in approx di dipolo.

c) L'espressione esatta del campo elettrico $\vec{E}$ al centro dell'anello.



a) Da considerazioni di simmetria:

$$\vec{p} = p\hat{y}$$

quindi integriamo la sola componente y di $\vec{R}\,dq$

$$p = \int_0^{\pi} (+\lambda) R\,d\alpha \cdot R\sin\alpha + \int_{\pi}^{2\pi} (-\lambda) R\,d\alpha\, R\sin\alpha =$$

$$= \lambda R^2 \left[(-\cos\alpha)\Big|_0^{\pi} + (\cos\alpha)\Big|_{\pi}^{2\pi} \right] = 4\lambda R^2 =$$

$$= 1.5 \cdot 10^{-9}\ C \cdot m$$

b)

$$V(\vec{r}) = \frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3} \cdot \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = \frac{p y}{4\pi\varepsilon_0 (x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

essendo $\vec{p} = (0, p, 0)$, $\vec{r} = (x, y, z)$

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} V$$

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \propto xy = 0 \quad \text{sull'asse } x$$

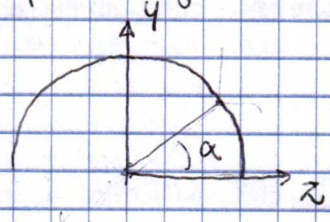
$$E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \propto yz = 0 \quad \text{"} \quad \text{"}$$

$$E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{p}{4\pi\varepsilon_0} \frac{(\quad)^{3/2} - \frac{3}{2} y (\quad)^{1/2}}{(\quad)^3}$$

$$\Rightarrow E_y(x, y=0, z=0) = -\frac{p}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{(x^2)^{3/2}} = -\frac{p}{4\pi\varepsilon_0 |x|^3}$$

c) Nel centro dell'anello, per simmetria, $E_x = E_z = 0$

Dunque integriamo le sole componenti lungo y:



$$E_y = \int_0^{\pi} \frac{\lambda R\,d\alpha}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \underbrace{\sin(\pi+\alpha)}_{-\sin\alpha} + \int_{\pi}^{2\pi} \frac{(-\lambda) R\,d\alpha}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \underbrace{\sin(\pi+\alpha)}_{-\sin\alpha} =$$

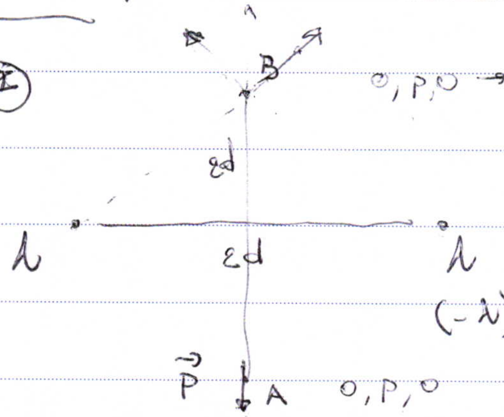
$$= -\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R} \cdot 4 = -\frac{\lambda}{\pi\varepsilon_0 R}$$

$\boxed{\text{NV } 17.12}$

$-\begin{pmatrix}0\\-p\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\-E_A\\0\end{pmatrix}$

(I)

$0,p,0 \to 0,-p,0$



$$E_A = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 \cdot d\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 2 = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 d}$$

$\vec{p} = (0, p, 0)$

$U_A = -\vec{p} \cdot \vec{E}_A = -pE_A$ $\qquad$ $\vec{E}_A = (0, E_A, 0)$

U_B (pre-rotaz) $=$ $\qquad$ $\vec{E}_B = (0, -E_A, 0)$

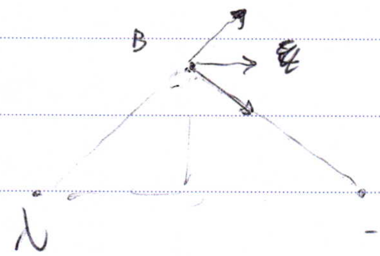
$= pE_A$

$U_B - U_A = 2pE_A$

U_B (post-rot) $= -pE_A$ $\qquad$ W_1 : lavoro del sistema verso l'esterno (quindi $W = -\Delta U$)

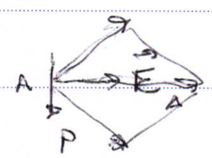
$\Rightarrow U_B^{post} - U_B^{pre} = -2pE_A = -W_1$

(II)



$\vec{E}_A = (E_A, 0, 0)$

$$E_A = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 d\sqrt{2}} \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 2 = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 d}$$



$U_B^{post} = -p \cdot E_A$

$U_A = -\vec{p} \cdot \vec{E}_A = 0$

$U_B = -\vec{p} \cdot \vec{E}_B = 0$

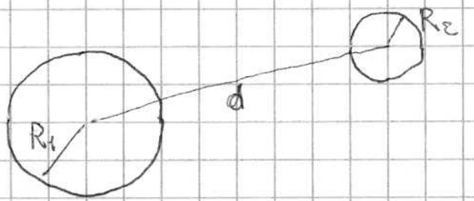
$\Rightarrow U_B - U_A = 0 \qquad \Rightarrow U_B^{post} - U_B^{pre} = -p \cdot E_A$

$= W_1/2$

$$W_1 = \cancel{4}\, 2p \cdot \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 d} = 3.6 \cdot 10^{-7}\,J$$

- Richiami sui conduttori

- Due sfere conduttrici di raggio R_1 ed R_2 sono poste a distanza $d \gg R_1, R_2$ e collegate da un filo conduttore. Sul sistema è depositata una carica Q.
Ignorando l'azione del campo elettrico di ciascuna sfera sulla distribuzione di carica dell'altra, e trascurando la carica depositata sul filo, studiare ~~[illegible]~~ la distribuz. di carica sulle due sfere.



Il filo rende le due sfere un unico conduttore, che all'equilibrio è equipotenziale ($\Longleftrightarrow$ campo elettrico nullo all'interno).

Se trascuriamo ~~la~~ azione dei campi sulle cariche (d grande) le due distribuzioni di carica sono a simm. sferica:

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1}{R_1} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_2}{R_2}$$

$$\Longrightarrow \frac{\cancel{4\pi} R_1^{\cancel{2}}\sigma_1}{\cancel{R_1}} = \frac{\cancel{4\pi} R_2^{\cancel{2}}\sigma_2}{\cancel{R_2}} \Longrightarrow \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{R_2}{R_1}$$

In generale, la densità di carica su un conduttore carico è inversam. proporzionale al raggio di curvatura, con conseguente concentraz. della carica sulle "punte" e intensificazione del campo elettrico in loro prossimità.

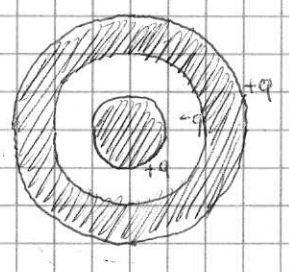
Mazzoldi, esempio 4.4 ma anche NV 1.9

Un conduttore sferico di raggio R_1 è al centro di un conduttore sferico cavo di raggio interno R_2 e raggio esterno R_3.

Una carica $+q$ è depositata sul conduttore interno.

Calcolare il campo e il potenziale in funzione della distanza r dal centro e studiare i due casi in cui si colleghino i due conduttori oppure si ponga a potenziale zero quello esterno.
(messa a terra)

E' un caso di induzione completa, quindi, all'equilibrio si avrà una carica $-q$ sulla sup. interna e la carica $+q$ sulla sup. esterna del conduttore cavo.



- Per simmetria, le densità di carica sono uniformi ma differenti (ovvio: diversi raggi di curvatura ma integrali uguali)
- Per simmetria, campo e potenziale dipendono solo da r. Il campo sarà puramente radiale.

Applichiamo per $V(r)$ e $E(r)$ il principio di sovrapposizione, ricordando che gli strumenti utili per questi problemi sono il t. di Gauss e l'informazione sull'assenza di campo elettrico all'interno dei conduttori in equilibrio.

$0 \leq r \leq R_1$

$$V(r) = \text{cost} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_1} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_2} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_3} = V_1$$

(giustificare i 3 contributi con t. di G. + continuità del potenziale, o equivalentem. con $V(r) = \int_r^\infty E(r)\,dr$; $\propto -\frac{1}{r'}\Big|_r^\infty$ per cui quando $r < R_i$ il valore è uguale a quello sulla superficie)

$$E(r) = 0$$

$R_1 \leq r \leq R_2$

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_2} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_3}$$

$$E(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} + 0 + 0$$

$R_2 \leq r \leq R_3$

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_3} = V_2 = \text{cost}$$

(quindi confermiamo interno conduttori è una regione equipotenziale)

$$E(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} + 0 = 0$$

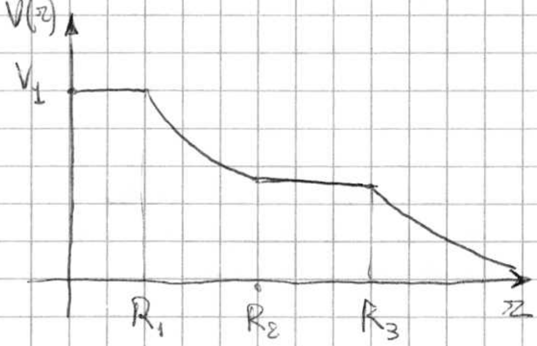
Si noti $V_2 < V_1$ perché $R_3 > R_1$

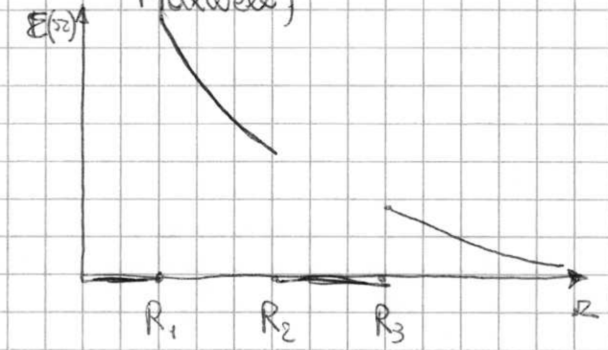
$r \geq R_3$

$$V(r) = \cancel{\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}} - \cancel{\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$$E(r) = \cancel{\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}} - \cancel{\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

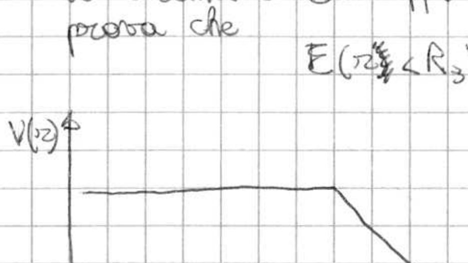
(come se il guscio non ci fosse: il conduttore esterno non scherma le cariche presenti al suo interno. Ancora una volta è la proprietà del campo elettrostatico che si manifesta nella prima eq. di Maxwell)

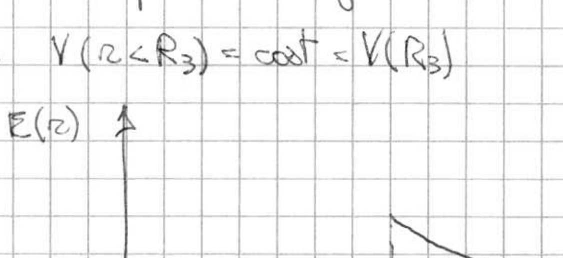




Colleghiamo i due conduttori, la carica all'interno si neutralizza. Quindi il teorema di G. applicato a qualsiasi sup. chiusa sferica con $r < R_3$ prova che

$$E(r < R_3) = 0 \implies V(r < R_3) = \text{cost} = V(R_3)$$

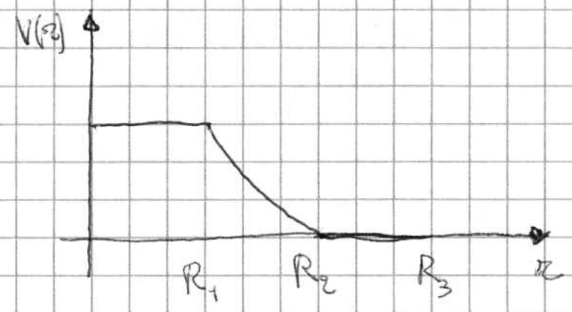


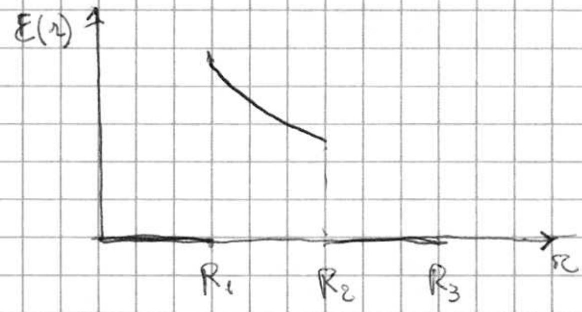


All'esterno del conduttore vale l'andamento del caso precedente.

Se invece mettiamo a terra il conduttore esterno, neutralizziamo la carica presente sulla sua superficie esterna, e il guscio diviene un conduttore unico con la terra (= conduttore di capacità infinita), per cui ~~[illegible]~~ il suo potenziale non viene modificato da alcuna variazione nella distribuzione di carica.

Perciò $V(r \geq R_3) = V(r \to \infty) = (\text{per scelta}) = 0$





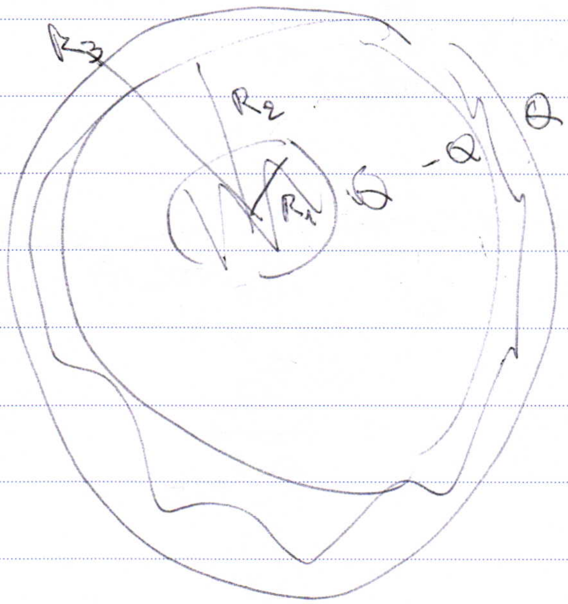
in accordo con il T. di G.

Nota: NV 1.9 risolve a partire dai campi e calcola i potenziali come $\int_r^{\infty}$.

Se torniamo alla configuraz. originale ma depositiamo una carica Q sul guscio esterno, cambia il potenziale del guscio in modo che

$$V(R_3) = V(R_2) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q+Q}{R_3}$$

ma la distribuzione di cariche all'interno non cambia: cambia quindi solo il valore assoluto del potenziale, ma non il suo gradiente. Quindi i campi elettrici all'interno restano invariati: il guscio si comporta come schermo elettrostatico.



$r \geq R_3$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$$

$- V(r \to \infty)$

$$V(r) = \int_r^{\infty} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$(V(r \to \infty) = 0)$

$$r = R_3 \implies V(r = R_3) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_3}$$

$$R_2 \leq r < R_3 \qquad V(r) = \text{cost} = V(r = R_3) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_3}$$

$R_1 \leq r \leq R_2$

$$V(r) - V(R_2) \cancel{\ldots} = \int_r^{R_2} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r'^2}\, dr' =$$

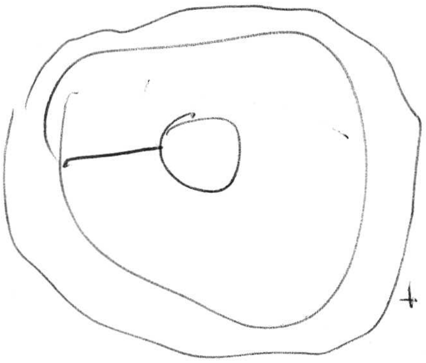
$$= V(R_2) + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{r'}\right)\Bigg|_r^{R_2} =$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_3} - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2} + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$$r \leq R_1 \implies V(r) = V(R_1) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1}\right)$$

(analogam.: principio di sovrapp. per 3 gusci carichi)

Gusci cortocircuitati:



$\Rightarrow$ carica netta $+Q$ su sup. esterna

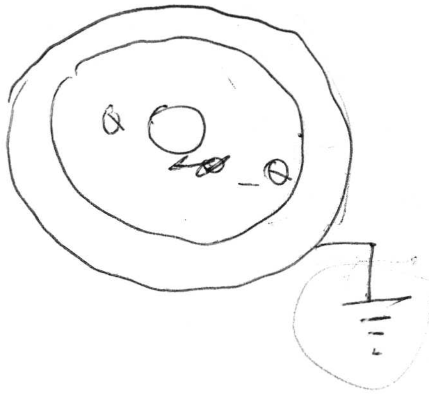
$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{r}$$

$$\underset{\overset{\|}{0}}{V(r)} - V(r\to\infty) = \int_r^\infty \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,dr =$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$r = R_3 \Rightarrow V(R_3) = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_3}$

$r < R_3$ dal t. di G. $E(r) \equiv 0 \Rightarrow V(r<R_3) = \text{cost} = V(R_3)$
(analogam. princ. di sovrapp. per un guscio carico + due banali gusci scarichi)



$r > R_3$ $\quad \vec{E}(\vec{r}) \equiv \vec{0}$

$V(r > R_3) \equiv V(r\to\infty) = (\text{scelta}) = 0$

$R_2 \leq r \leq R_3$: $V(r) = V(R_3) = 0$

$R_1 \leq r \leq R_2$

$$V(r) - V(R_2) = \int_r^{R_2} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \Rightarrow V(r) = \underset{\overset{\|}{0}}{V(R_2)} + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$$

$$\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r} \quad (\text{t. d. G})$$

$r \leq R_1$: $V(r) = \text{cost} = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_1} - \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$

(analogam. p. di sovrapp. con due gusci carichi + una condiz. al contorno su $V(R_3)$)