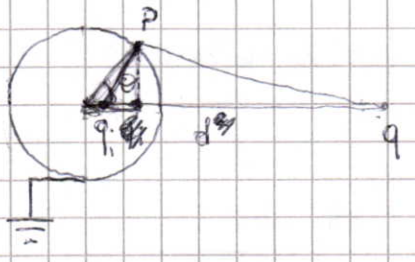
con le cariche reali.

[NV 1.16]

Una sfera conduttrice di raggio $R = 80\,cm$ è scarica e mantenuta a pot. zero.

A distanza $d = 1\,m$ dal centro viene posta una carica puntiforme $q = 3 \cdot 10^{-10}\,C$. Calcolare la forza di attrazione subita da q e la densità di carica indotta sulla sfera.



Metodo della c.i.: cerchiamo il valore e la posizione di una carica q_i interna alla sfera tale che il potenziale del sistema q_i, q su ogni punto P della sfera sia costante e nullo.

Parametrizziamo tutto con $q_i = -\alpha q$, in posiz. x $(0 < x < R)$ → verificheremo alla fine.

$$V(P) = V_q + V_{q_i} =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{\underbrace{(d^2+R^2-2Rd\cos\theta)^{1/2}}_{\text{t. di P. } R\sin\theta,\ (d-R\cos\theta)}} - \frac{\alpha q}{\underbrace{(x^2+R^2-2Rx\cos\theta)^{1/2}}_{\text{t. di P. } R\cos\theta - x,\ R\sin\theta}}\right] = 0 \quad \forall\theta$$

$$\Rightarrow \alpha^2(d^2+R^2-2Rd\cos\theta) = (x^2+R^2-2Rx\cos\theta)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha^2(d^2+R^2) = x^2+R^2 \\ \alpha^2 d = x \end{cases}$$ (dal principio di identità dei polinomi)

Da cui si ha $\alpha^2 = x/d$ che sostituita nella I eq. dà:

$$dx^2 - (d^2+R^2)x + dR^2 = 0$$

le cui soluzioni sono $x = d$, $x = \frac{R^2}{d}$ corrispondenti a $\alpha = 1$ e $\alpha = R/d$.

La prima soluzione è banale in quanto pone una carica $-q$ nella stessa posizione di $+q$ e annulla potenziale e campo in tutto lo spazio.

$x = \frac{R^2}{d} = R \cdot \frac{R}{d} < R$ è la posizione (dentro la sfera) su cui si proietta il punto di tangenza di una delle rette uscenti da q e tangenti alla sfera.

Quindi la forza con cui q è attratta dalla sfera è la forza di ~~attrazione~~ attrazione tra q e $-\alpha q$ a distanza $d-x$, e in modulo vale:

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\alpha q^2}{(d-x)^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Rq^2}{d\left(d-\frac{R^2}{d}\right)^2} = \frac{dRq^2}{4\pi\varepsilon_0 (d^2-R^2)^2} = 0.5\cdot 10^{-8}\,N$$

La densità di carica indotta è ricavabile dal teorema di Coulomb una volta noto il campo.

Quindi calcoliamo il potenziale in coord. sferiche per il sistema delle due cariche:

$$V(r,\theta) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{(d^2+r^2-2rd\cos\theta)^{1/2}} - \frac{R}{d}\frac{q}{\left(\frac{R^4}{d^2}+r^2-2r\frac{R^2}{d}\cos\theta\right)^{1/2}}\right]$$

Poiché per il t. di C. il campo in prossimità della sup. sferica è puramente radiale, dobbiamo solo calcolare

$$E_r = -\left.\frac{\partial V}{\partial r}\right|_{r=R} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}\frac{R^2-d^2}{(d^2+R^2-2Rd\cos\theta)^{3/2}} \Rightarrow \text{entrante } (E_r<0 \text{ perché } R^2-d^2<0)$$

$$\Rightarrow \sigma = \varepsilon_0 E = \frac{q}{4\pi R}\frac{R^2-d^2}{(d^2+R^2-2Rd\cos\theta)^{3/2}}$$ di segno opposto a q (perché $R^2-d^2<0$)

ovviamente potenziale costante $\Rightarrow$ sfera non neutra, ma non essendo induz. completa abbiamo $\int\sigma \neq -q$.

Si può ~~…~~ invece verificare $\int\sigma = q_i = -\frac{R}{d}q$:

$d\Sigma = R\sin\theta\, d\varphi\cdot R\,d\theta$

$$\int\sigma\, d\Sigma = \frac{q(R^2-d^2)}{4\pi R}\int_0^\pi \frac{2\pi R^2\sin\theta\, d\theta}{(d^2+R^2-2Rd\cos\theta)^{3/2}} =$$

$$= \frac{qR(d^2-R^2)}{2}\int_{-1}^{1}\frac{d(\cos\theta)}{(d^2+R^2-2Rd\cos\theta)^{3/2}} = +\frac{q(R^2-d^2)}{2d}\left[\frac{1}{(\quad)^{1/2}}\right]_{-1}^{1} =$$

$$= \frac{q(R^2-d^2)}{2d}\left(\frac{1}{d-R}-\frac{1}{R+d}\right) =$$

$$= \frac{q(R^2-d^2)}{2d}\,\frac{2R}{(d^2-R^2)} = -q\frac{R}{d}$$

NV 1.13

Se la sfera è <u>isolata</u> e <u>scarica</u>, il problema si risolve ancora con questo metodo, ma ricordando che:

$$V_{sfera} = V_0 \neq 0$$

$$q_{sfera} = 0$$

$\Rightarrow$ alla soluzione del problema precedente dobbiamo aggiungere, per il principio di sovrapposizione, una carica Q nel centro t.c.

$$\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} = V_0$$

$$Q + q_i = 0 \Longrightarrow Q = -q_i = +\frac{R}{d}q$$

$$\Rightarrow F = F_{att}(-q_i, q) + F_{rep}(Q, q) =$$

$$= \frac{dRq^2}{4\pi\varepsilon_0(d^2-R^2)^2} - \frac{Rq^2}{d \cdot 4\pi\varepsilon_0 d^2} \qquad (F_{att} > F_{rep})$$

$\Rightarrow$ La densità di carica superficiale, sempre per il principio di sovrapposizione, è quella del prob. prec. + il contributo a simmetria sferica che equivale alla carica Q e che mantiene il potenziale al valore V_0

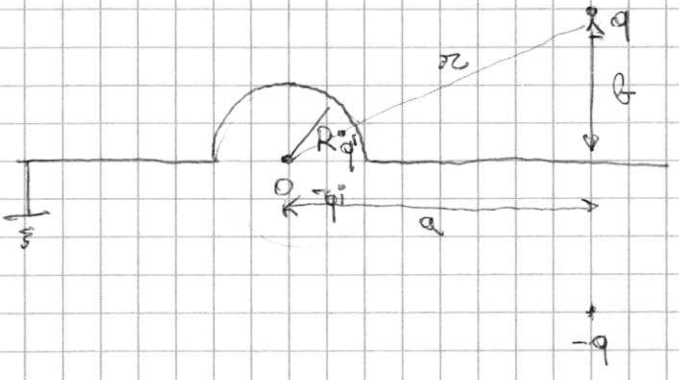
$$\sigma = \frac{Rq}{4\pi R^2 d} - \frac{q}{4\pi R}\frac{d^2-R^2}{(d^2+R^2-2Rd\cos\theta)^{3/2}}$$

Infine, se la sfera è <u>isolata</u> e <u>carica</u> con carica q', si procede ancora nello stesso modo: si aggiunge alla forza il termine $\frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0 d^2}$ (att. o rep. secondo il segno di q') e alla densità di carica si somma il termine uniforme $\frac{q'}{4\pi R^2}$.

Da raccolta esercizi di FP:

Un piano infinito conduttore è dotato di un rigonfiamento emisferico di raggio R centrato nell'origine.

Una carica puntiforme q è collocata fuori dal piano, a distanza b dalla faccia con il rigonfiamento e in modo che la sua proiezione sul piano disti $a > R$ dal centro della sfera



$r = \sqrt{a^2 + b^2}$

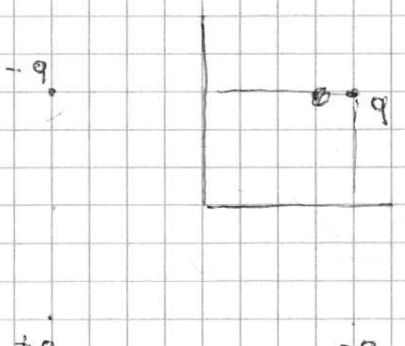
q' come nel prob prec: $q' = -\frac{R}{r} q$, $r' = \frac{R^2}{r}$.

$\Rightarrow$ si annulla il potenziale su tutta la sfera

$-q'$, $-q$ simmetriche risp. al piano in modo da annullare il potenziale su di esso.

Notare che si mantiene nullo il pot sulla sfera anche dopo l'introduzione delle altre due cariche perché queste sono a loro volta in grado di annullare il pot. della sfera.

Allo stesso modo: (NV 1.15)



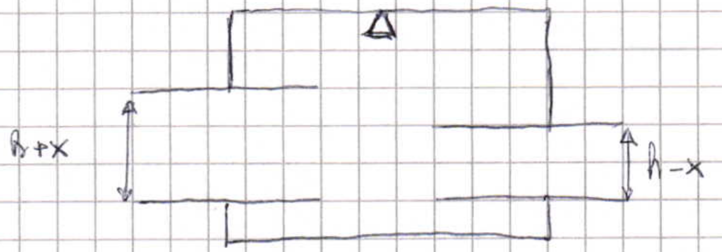
NV 2.14

Le armature superiori di due condensatori piani sono collegate insieme da un conduttore e costituiscono i piatti di una bilancia.

L'area è $\Sigma = 0.28\,m^2$, la distanza $h = 4.5\,mm$, per entrambi i condensatori. Si porta il sistema nella posizione $h_1 = h + x$, $h_2 = h - x$, con $x = 0.5\,mm$ e lo si carica a $V_0 = 2 \cdot 10^3\,V$

Il generatore viene poi staccato e il sistema viene lasciato libero di muoversi finché $x = 1.5\,mm$.

In questa posizione calcolare la d.d.p. ai capi del sistema, le cariche q_1 e q_2 dei due condensatori, la risultante delle forze elettrostatiche sulle armature superiori specificando quale è scesa, il lavoro nel passaggio dalla posizione iniziale a quella finale.



forza tra armature

$$C_1 = \varepsilon_0 \frac{\Sigma}{h+x} \qquad C_2 = \varepsilon_0 \frac{\Sigma}{h-x} \Rightarrow q_2 > q_1 \Rightarrow \frac{\sigma_2^2}{2\varepsilon_0}\Sigma > \frac{\sigma_1^2}{2\varepsilon_0}\Sigma$$

$\Rightarrow x$ cresce

$$\Rightarrow C = \varepsilon_0 \Sigma \frac{2h}{h^2 - x^2} \quad (\text{parallelo}) \qquad q = C V_0 = 2.23 \cdot 10^{-6}\,C$$

Poiché il generatore viene staccato, il passaggio successivo è a carica costante:

Poiché x passa da 0.5 a 1.5 mm si ha

$$C_1' = 4.13 \cdot 10^{-10}\,F, \quad C_2' = 8.27 \cdot 10^{-10}\,F, \quad C' = C_1' + C_2' = 12.40 \cdot 10^{-10}\,F$$

La nuova ddp sarà

$$V = \frac{q}{C'} = 1798\,V$$ e per i due condensatori separatamente vale:

$$q_1' = C_1' V = 0.74 \cdot 10^{-6}\,C, \quad q_2' = C_2' V = 1.49 \cdot 10^{-6}\,C$$

(naturalmente, $q_1' + q_2' = q_1 + q_2 = q$)

Poiché x aumenta, l'armatura a dx scende, in accordo con il fatto che la ddp è la stessa ma la distanza tra le armature è minore, per cui la forza con cui si attraggono è maggiore ($\propto \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}\Sigma$, σ più grande a dx)

La forza netta è

$$F = \frac{q_2'^2}{2\varepsilon_0 \Sigma} - \frac{q_1'^2}{2\varepsilon_0 \Sigma} = 0.34\ N$$

~~[illegible]~~

Infine $L = -\Delta W = W_i - W_f = \frac{1}{2} q^2 \left(\frac{1}{C} - \frac{1}{C'}\right) = \frac{q^2}{4\varepsilon_0 \Sigma h}(x'^2 - x^2) = 2.23 \cdot 10^{-4}\ J$

carica costante, sistema isolato

I esonero x mat. 14/11/2006 - Es. 1

Quattro lastre conduttrici di area $S = 1.0\,m^2$ sono disposte in modo che la distanza di ciascuna lastra dalla successiva sia $d = 1.0\,cm$.

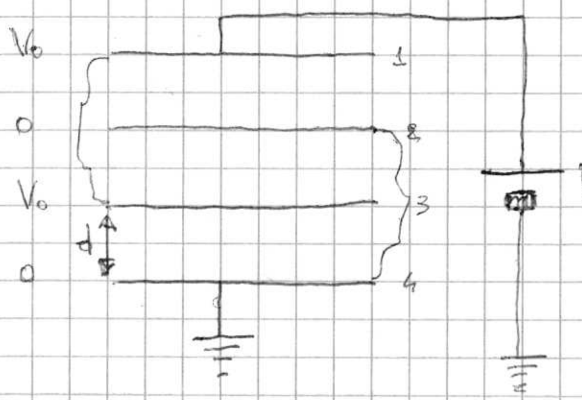
La prima e l'ultima lastra sono collegate ai capi di un generatore di d.d.p. V_0; le lastre 1-3 e 2-4 sono collegate da fili conduttori di capacità trascurabile

1) Determinare la densità di carica presente su ciascuna faccia delle lastre.

2) Determinare la carica complessiva presente su ciascuna lastra.

3) Determinare la componente E_y del campo elettrico in tutto lo spazio.

Ignorare gli effetti di bordo.



$V_1 = V_3$

$V_2 = V_4$

Ma $V_4 = 0$, $V_1 = V_0$

$\Longrightarrow V_1 = V_3 = V_0$

$V_2 = V_4 = 0$

Per induz. completa, le densità di carica su facce che si fronteggiano devono essere opposte.

Osservando i valori del potenziale delle 4 lastre, si conclude la seguente sequenza:

$\begin{cases} 0 \\ \sigma \end{cases}$

$\begin{cases} -\sigma \\ -\sigma \end{cases}$

$\begin{cases} +\sigma \\ +\sigma \end{cases}$

$\begin{cases} -\sigma \\ 0 \end{cases}$

Dall'espress. del potenziale del condensatore piano, si ha ad es per le prime due lastre:

$$V_0 = \frac{\sigma d}{\varepsilon_0} \Longrightarrow \sigma = \frac{V_0 \varepsilon_0}{d} \Longrightarrow Q = \pm \frac{V_0 \varepsilon_0}{d} S$$

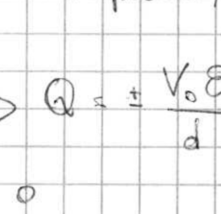
Lastra 1: $+Q$

Lastra 2: $-2Q$

Lastra 3: $+2Q$

Lastra 4: $-Q$

$$|E_y| = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$



Inoltre: sul conduttore 1+3 $Q_{tot} = 3\sigma S$

2+4 $= -3\sigma S$

$$C_{eq} = \frac{Q_{tot}}{V_0} = \frac{3\sigma S}{\sigma d}\varepsilon_0 = 3\frac{\varepsilon_0 S}{d}$$

$\Longrightarrow$ erano 3 condensatori in parallelo.