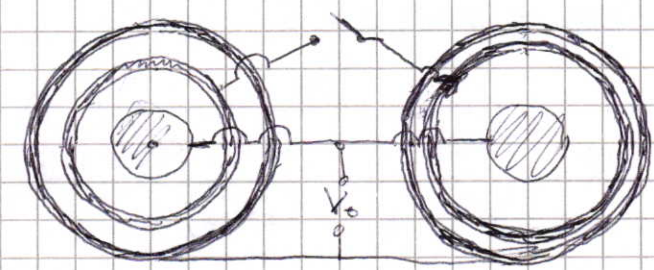
I esonero 13/04/2012 - es. 2

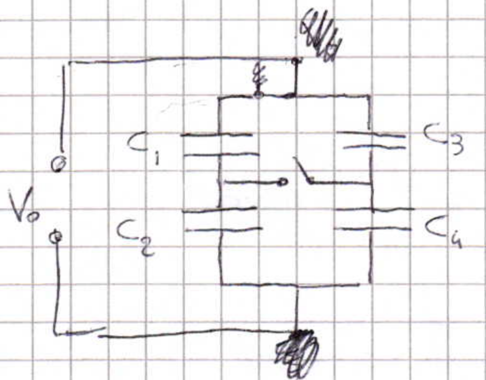


R_1, R_2, R_3^A, R_4^A, R_3^B, R_4^B

$R_1 = 9.0\,cm$, $R_2 = 10.0\,cm$, $R_3^A = 91\,mm$, $R_4^A = 95\,mm$, $R_3^B = 95\,mm$, $R_4^B = 99\,mm$

$V_0 = 300\,V$

a) d.d.p. ai capi dell'interruttore



$$C_1 = 2\pi\varepsilon_0 l \cdot \frac{1}{\ln\frac{R_3^A}{R_1}} \qquad C_3 = \frac{2\pi\varepsilon_0 l}{\ln\frac{R_3^B}{R_1}}$$

$$C_2 = 2\pi\varepsilon_0 l \cdot \frac{1}{\ln\frac{R_2}{R_4^A}} \qquad C_4 = \frac{2\pi\varepsilon_0 l}{\ln\frac{R_2}{R_4^B}}$$

C_1 e C_2 sono in serie, per cui $C_{12} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$ e $Q_{12} = C_{12} \cdot V_0$

$$\Longrightarrow \quad V_1 = \frac{Q_{12}}{C_1} = \frac{C_2 V_0}{C_1 + C_2}$$

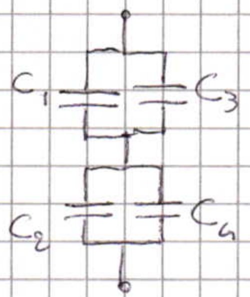
Analogamente, $C_{34} = \frac{C_3 C_4}{C_3 + C_4}$ e $Q_{34} = C_{34} \cdot V_0$

$$\Longrightarrow \quad V_3 = \frac{Q_{34}}{C_3} = \frac{C_4}{C_3 + C_4} \cdot V_0$$

$$\Delta V = V_3 - V_1 = V_0 \left(\frac{1}{1 + \underset{\downarrow\, 0.185}{C_3/C_4}} - \frac{1}{1 + \underset{\downarrow\, 4.643}{C_1/C_2}} \right) = V_0 \cdot 0.667 = 200\,V$$

b) Il generatore è staccato, perciò il sistema conserva la carica.

Alla chiusura, diventa la serie di due paralleli:



$$Q = \overbrace{\left(\frac{C_1 C_2}{C_1+C_2} + \frac{C_3 C_4}{C_3+C_4}\right)}^{C_{eq}} V_0 \quad \text{(dal caso precedente)}$$

$$Q = \underbrace{\frac{(C_1+C_3)(C_2+C_4)}{C_1+C_3+C_2+C_4}}_{C'_{eq}} \cdot V'$$

$$\Longrightarrow V' = V_0 \frac{C_{eq}}{C'_{eq}} = 166.7\,V$$

Il rapporto elimina ancora una volta i fattori $2\pi\varepsilon_0 l$.

c) $$U'/U = (\text{carica cost}) = \frac{\cancel{1/2}\, Q^2/C'_{eq}}{\cancel{1/2}\, Q^2/C_{eq}} = \frac{C_{eq}}{C'_{eq}} = \frac{V'}{V_0} = 0.556$$

anche da $\dfrac{\frac{1}{2} Q V'}{\frac{1}{2} Q V_0}$

Compito d'esonero del corso di ELETTROMAGNETISMO
n. 1 - *15/04/2011 - a.a. 2010/2011*
proff. S. Giagu, F. Lacava, F. Ricci

ESERCIZIO 1

Una distribuzione di carica a simmetria sferica si estende in tutto spazio con densità di carica di volume ρ variabile con la distanza r dal centro O della distribuzione, secondo la legge $\rho = K\exp[-\frac{r}{r_o}]$ dove $r_o = 1.0$ cm.

a) Si determini il valore della costante K sapendo che la carica complessiva della distribuzione è $Q = 0.3$ μC

b) Si ricavi l'andamento dell'intensità del campo elettrico in funzione di r e se ne calcoli il valore nel punto P posto a $r = 20$ cm dal centro O.

c) Si calcoli il lavoro che occorre compiere per portare la carica $q = 1.0$ nC dall'infinito al punto P.

PS. Si noti che applicando la regola di integrazione per parti si ottiene: $\int e^{-x}x^2dx = -e^{-x}(x^2 + 2x + 2)$. *Per il calcolo del lavoro si suggerisce inoltre di sfruttare l'identità* $\int \frac{e^{-x}}{x}dx = -(\frac{e^{-x}}{x} + \int \frac{e^{-x}}{x^2}dx)$

ESERCIZIO 2

Su un piccolo disco di raggio $R = 1.0$ mm e di spessore trascurabile, è depositata una carica con densità superficiale $\sigma(r, \phi) = \alpha\ r\ cos\phi$ dove α è costante e r e ϕ sono le variabili rappresentate in figura. Il disco è per metà carico positivo e per l'altra metà carico negativo. Le cariche positiva e negativa depositate sul disco sono in modulo pari a $Q = 1.0 \cdot 10^{-5}$ C. Si chiede

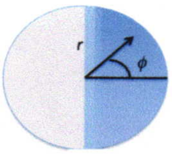
a) di determinare il momento di dipolo elettrico del disco.

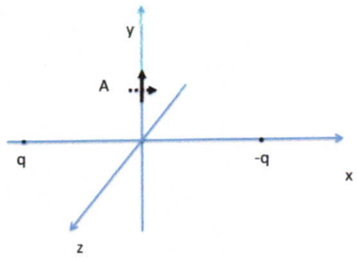
Il disco, col dipolo orientato nella direzione dell'asse y, viene posizionato nel punto A di coordinate $(0, a, 0)$, con $a = 1.0$ cm, nel campo elettrico formato da una carica puntiforme $q = 1.0 \cdot 10^{-3}$ C posta nel punto $(-d, 0, 0)$, con $d = 10$ cm, e da una carica $-q$ posta nel punto di coordinate $(d, 0, 0)$.

b) Si determini il momento meccanico agente sul disco

Mantenendo il dipolo nello stesso punto A, lo si disponga parallelo all'asse x .

c) In questa nuova orientazione del dipolo si determini il valore ed il segno della sola componente y della forza agente su di esso.





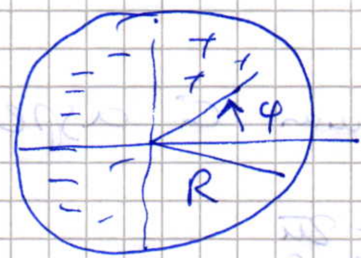
I esonero 15/4/2011 es. 2.

$R = 1.0$ mm.

$\sigma(r,\varphi) = \alpha r \cos\varphi$

Carice + e − sul disco.

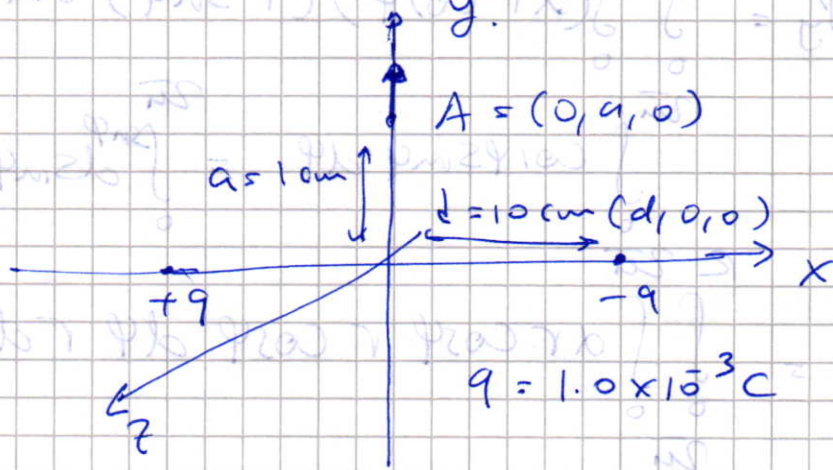
$Q = 1.0 \times 10^{-5}$ C



1) $\vec{P} = ?$

b) $\vec{M}$ sul dipolo con $\vec{p} \parallel \hat{y}$ in A

c) $\vec{F}$ sul dipolo con $\vec{p} \parallel \hat{x}$ in A



a) per calcolo di $\vec{p} = \int \vec{r}\, dq = \int \vec{r}\, \sigma\, dS$

bisogna prima determinare α.

$$Q = \int_{\substack{half\\disk}} \sigma\, dS = \int_0^R \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sigma(r,\varphi)\, r\, d\varphi\, dr$$

$$= \int_0^R \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \alpha r \cos\varphi\; r\, d\varphi\, dr$$

$$= \alpha \int_0^R \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos\varphi\, d\varphi\; r^2 dr$$

$$= \alpha (2) \left[\frac{1}{3} R^3\right] \Rightarrow \alpha = \frac{3}{2} \frac{Q}{R^3}$$

$$= 1.5 \times 1.0 \times 10^{-5} \quad 10^{+9} = 1.5 \times 10^4 \ \text{C/m}^3$$

$$\vec{p} = \int \vec{r}\, dq = \int \vec{r}\sigma\, ds = \begin{pmatrix} \int x\sigma\, ds \\ \int y\sigma\, ds \end{pmatrix}$$

Dalla simm. ci aspettiamo $P_y = \emptyset$.

$$P_y = \int_0^R \int_0^{2\pi} (\alpha r \cos\varphi)(r \sin\varphi)\, d\varphi\, r dr$$

$$\int_0^{2\pi} \cos\varphi \sin\varphi\, d\varphi = \int_0^{\sin\varphi} d\sin\varphi = \int_0^0 y\, dy = 0.$$

$$P_x = \int_0^R \int_0^{2\pi} \alpha r \cos\varphi\, r \cos\varphi\, d\varphi\, r dr$$

$$= \alpha \int_0^{2\pi} \cos^2\varphi\, d\varphi \int r^3 dr$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^2\varphi\, d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(1 + \cos(2\varphi))\, d\varphi$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos 2\varphi\, d\varphi$$

$$= \frac{1}{2} 2\pi + \frac{1}{4}\cancel{\int_0^{\pi} \cos z\, dz} = \pi$$

$$P_x = \alpha\pi \frac{1}{4} R^4 = \frac{3}{2}\frac{Q}{R^3}\pi \frac{1}{4} R^4$$

$$= \frac{3}{8}\pi Q R = 0.375 \times \pi \times 10^{-5} \times 10^{-3}$$

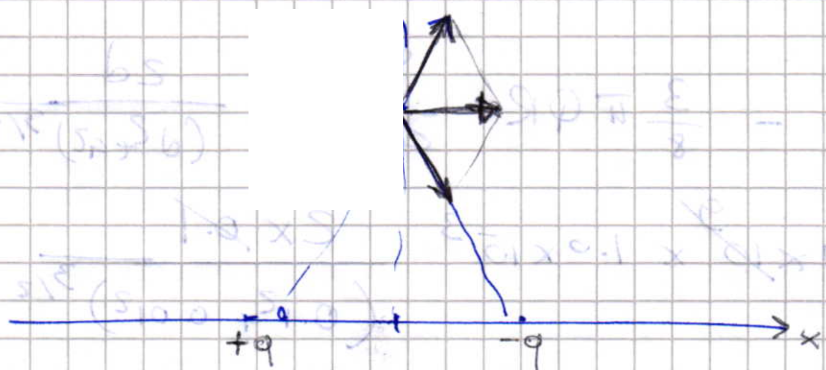
$$= 1.2 \times 10^{-8}\ \text{Cm}.$$

b) Per trovare il momento serve il campo in A.

$$\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E}_0$$

$\vec{E}_0(A) = -\vec{\nabla} V(A)$.

più facile calcolo di V che non di E



Ci aspettiamo $E_{0z} = E_{0y} = \emptyset$. in A.

$$V(x,y,z) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{(x+d)^2+y^2+z^2}} + \frac{-1}{\sqrt{(x-d)^2+y^2+z^2}}\right].$$

$$\vec{E}_0(x,y,z) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\begin{bmatrix} \frac{x+d}{((x+d)^2+y^2+z^2)^{3/2}} + \frac{-(x-d)}{((x-d)^2+y^2+z^2)^{3/2}} \\ \frac{y}{(\quad)^{3/2}} + \frac{-y}{(\quad)^{3/2}} \\ \frac{z}{(\quad)^{3/2}} + \frac{-z}{(--)^{3/2}} \end{bmatrix}$$

$$E_0(0,a,0) = \left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2d}{(d^2+a^2)^{3/2}}, 0, 0\right).$$

$$\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 0 & p & 0 \\ E_{0x} & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -\hat{y}\left[0\right] + \hat{z}\left(-pE_{0x}\right)$$

$$= -pE_{0x}\,\hat{z} = -\frac{3}{8}\pi QR \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{2d}{(d^2+a^2)^{3/2}}$$

$$= 1.2\times 10^{\cancel{-8}} \times 9\times 10^{\cancel{9}} \times 1.0\times 10^{-3} \frac{2\times \cancel{0.1}}{(0.1^2+0.01^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{2.4\times 9}{(0.1^2+0.01^2)^{3/2}} 10^{-3} = 21\,280\times 10^{-3} = 21.3 \text{ Nm}$$

$$= 21 \text{ Nm}.$$

Ricordando che per la forza agente si ha

$$\vec{F} = (\vec{p}\cdot\vec{\nabla})\vec{E}_0$$

$$\vec{F} = \left(p\frac{\partial}{\partial y}\right)\vec{E}_0 = p\begin{pmatrix} p\frac{\partial}{\partial y}E_{0x} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p\frac{\partial}{\partial x}E_{0y} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Invece poniamo $\vec{p} = (p, 0, 0)$.

$$\Rightarrow \vec{F} = \left(p_x \frac{\partial}{\partial x}\right)\begin{pmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} \\ E_{0z} \end{pmatrix} =$$

$$\frac{\partial}{\partial x} E_{0x} = \frac{\cancel{1}}{\cancel{(\quad)^{3/2}}} - \frac{\cancel{1}}{\cancel{(\quad)^{3/2}}} +$$

$$+ 3 \frac{(x+d)^2}{(\quad)^{5/2}} - 3 \frac{(x-d)^2}{(\quad)^{5/2}} = 0 \quad \text{for } x \neq 0.$$

$$\frac{\partial}{\partial x} E_{0z} = \phi.$$

$$\frac{\partial}{\partial x} E_{0y} =$$

$$= - \frac{3y(x+d)}{(\quad)^{5/2}} + \frac{3y(x-d)}{(\quad)^{5/2}}.$$

for $x = 0$, $y = a$.

$$\frac{\partial}{\partial} = \frac{-3a(d)}{(d^2+a^2)^{5/2}} + \frac{-3a(-d)}{(d^2+a^2)^{5/2}} =$$

$$= - \frac{6ad}{(d^2+a^2)^{5/2}}.$$

$$F_y = - \frac{6ad}{(d^2+a^2)^{5/2}} \Big(\overset{p}{\frac{3}{8} \pi Q R} \Big) \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} = -62\,N.$$