10/07/2014 - es. 1

Una sfera conduttrice di raggio $R_1 = 1.0$ cm è situata al centro di tre superfici sferiche conduttrici concentriche di raggi $R_2 = 2.0$ cm, $R_3 = 3.0$ cm, $R_4 = 4.0$ cm. Le due superfici di raggi R_2 e R_4 sono connesse elettricamente tra loro mentre la superficie di raggio R_3 è posta a massa (a potenziale nullo). Sulla sfera è depositata una carica $Q_1 = 10$ nC.

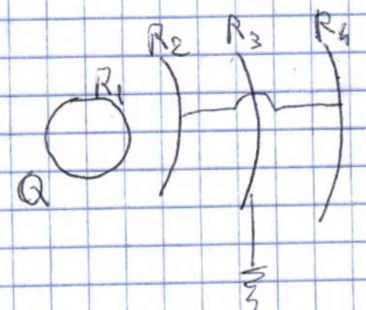
a) Si determinino le capacità tra le superfici 1 e 2, tra la 2 e la 3, e fra la superficie 4 e il potenziale nullo.

Si calcolino poi:

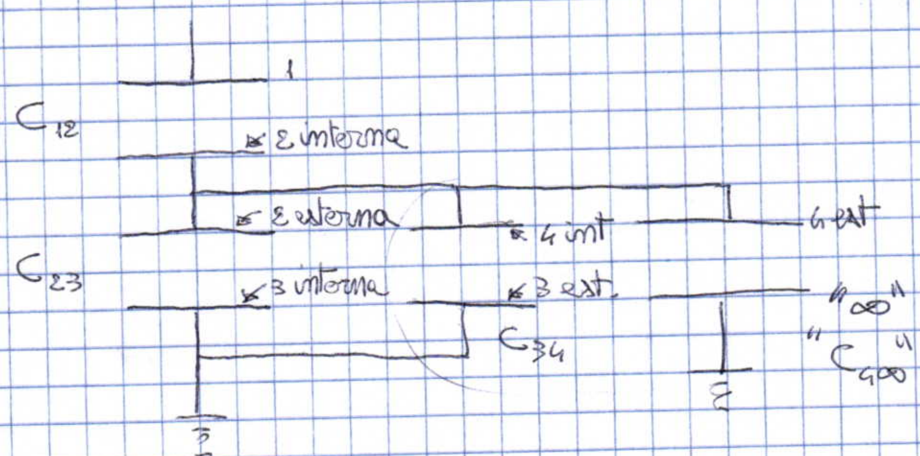
b) il potenziale della sfera,

c) il potenziale delle superfici connesse,

d) le cariche presenti su ciascuna superficie sferica.



equivale al seguente schema (facce $\leftrightarrow$ armature)



Le capacità richieste sono C_{12}, C_{23}, e $C_{34} // C_{4\infty} = C_{34} + C_{4\infty}$

$$C_{12} = 4\pi\varepsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} = 2.2\,\text{pF}$$

$$C_{34} = 4\pi\varepsilon_0 \frac{R_3 R_4}{R_4 - R_3} = 13.3\,\text{pF}$$

$$C_{4\infty} = 4\pi\varepsilon_0 R_4 = 4.45\,\text{pF}$$

$$C_{23} = 4\pi\varepsilon_0 \frac{R_2 R_3}{R_3 - R_2} = 6.7\,\text{pF}$$

$$\Longrightarrow C_{34} + C_{4\infty} = 17.8\,\text{pF}$$

b) Il potenziale della sfera è la ddp fra l'armatura 1 e massa. Dunque, depositando una carica Q_1 sulla sfera, questa si porta al potenziale

$$V_1 = \frac{Q_1}{C_{eq}}$$

in cui $C_{eq} = \dfrac{C_{12}\left(C_{23}+C_{34}+C_{4\infty}\right)}{C_{12}+C_{23}+C_{34}+C_{4\infty}} = 2.04\,pF$

$\Rightarrow V_1 = 4.90 \cdot 10^3\ V$

c) Le superfici connesse sono le armature a $V \neq 0$ dei 3 condensatori in parallelo; poiché questi sono in serie a C_{12}, su cui è depositata la carica Q_1, anche sul parallelo C_{23}, C_{34}, $C_{4\infty}$ sarà presente la stessa carica.

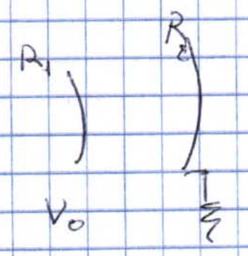
Quindi:

$$V_{23} = V_{34} = V_{4\infty} = \frac{Q_1}{C_{23}+C_{34}+C_{4\infty}} = 409\ V$$

NV 17.15

Tra due superfici sferiche concentriche conduttrici si applica una data ddp V_0: la superficie esterna di raggio R_2 è a potenziale zero, quella interna di raggio R_1 è a potenziale V_0.

Detto $E(R_1)$ il valore limite del campo per $r \to R_1^+$, determinare per quale relazione tra R_1 e R_2 $E(R_1)$ è minimo e dare l'espressione di tale valore minimo E_{min} in funzione di V_0 e R_2.



$$C = 4\pi\varepsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

$$Q = CV_0 = 4\pi\varepsilon_0 V_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{V_0 R_1 R_2}{r^2 (R_2 - R_1)} \xrightarrow[r \to R_1]{} \frac{V_0 R_2}{R_1(R_2 - R_1)} = \frac{V_0}{R_1\left(1 - R_1/R_2\right)}$$

$E(R_1)$ diverge sia per $R_1 \to 0$ sia per $R_1 \to R_2$.

Il minimo si ha per

$$\frac{\partial E(R_1)}{\partial R_1} = 0 \iff \frac{1 - R_1/R_2 + R_1\left(-1/R_2\right)}{R_1^2\left(1 - R_1/R_2\right)^2} = 0$$

$$1 - \frac{2R_1}{R_2} = 0 \iff \boxed{R_2 = 2R_1}$$

$$E_{min} = \frac{2V_0}{R_2 \cdot 1/2} = \frac{4V_0}{R_2}$$

18/04/2008 - I esonero, es. 1

Un condensatore sferico è costituito da una armatura esterna di raggio $R_2 = 1\,cm$ e da una interna di raggio $R_1 = 0.5\,cm$.

Il condensatore è in aria ($\varepsilon_r = 1$, rigidità elettrica $E_{max} = 6\,MV/m$)

Determinare:

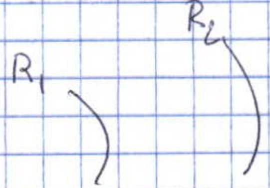
1. l'andamento del campo elettrico, a condensatore carico, in funzione della distanza dal centro del condensatore tracciandone un grafico qualitativo;

2. supponendo di caricare il condensatore gradualmente da potenziale zero fino al punto in cui il campo elettrico fra le armature raggiunge in almeno un punto un valore di poco inferiore alla rigidità dell'aria, determinare in tali condizioni:

   a) la ddp tra le armature del condensatore;

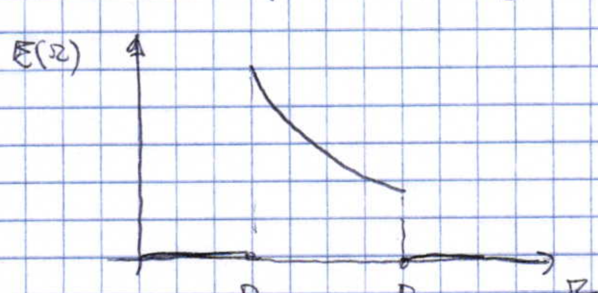
   b) l'energia elettrostatica immagazzinata nel condensatore.

(1)



$$\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\,\hat{r}$$

$$E(r) = \begin{cases} 0 & r < R_1 \\ Q/4\pi\varepsilon_0 r^2 & R_1 < r < R_2 \\ 0 & r > R_2 \end{cases}$$



(2a) Dall'andamento di $E(r)$, si vede che il valore massimo di $|E(r)|$ si ha in prossimità dell'armatura interna ($r \to R_1^+$)

Quando la ddp è tale da soddisfare le condizioni descritte, dunque, si ha:

$$E(r \to R_1^+) = E_{max} = \frac{Q_{max}}{4\pi\varepsilon_0 R_1^2} \Rightarrow Q_{max} = 4\pi\varepsilon_0 R_1^2 E_{max}$$

La ddp sarà allora

$$\Delta V_{max} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q_{max}}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr =$$

$$= \frac{\cancel{4\pi\varepsilon_0} R_1^2 E_{max}}{\cancel{4\pi\varepsilon_0}} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) =$$

$$= E_{max} \frac{R_1}{R_2} (R_2 - R_1) = 1.5 \cdot 10^4 \, V$$

2b

$$W = \frac{1}{2} Q_{max} \Delta V_{max} = 1.25 \cdot 10^{-4} \, J$$

Esonero 11/04/2014, es. 2

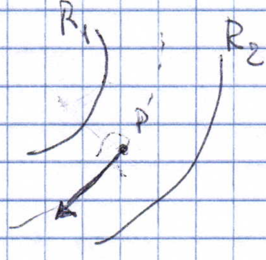
Un dispositivo elettrostatico è costituito da due sottili gusci sferici concentrici di raggio $R_1 = 4$ cm e $R_2 = 5$ cm, mantenuti rispettivamente a potenziali V_1 e V_2.
Una sorgente emette elettroni nel punto P dello spazio vuoto compreso tra i due gusci, a distanza $R_p = 4.5$ cm dal centro delle due superfici sferiche.

Gli elettroni hanno una velocità iniziale perpendicolare alla direzione radiale del sistema sferico passante per P, e una energia cinetica pari a 1.4 keV.
Si chiede di calcolare

a) il valore della differenza $V_1 - V_2$ tale da far compiere agli elettroni un'orbita circolare

b) l'energia elettrostatica immagazzinata nel dispositivo

(si ricorda che $e = -1.60 \cdot 10^{-19}$ C)



a) L'azione del campo $E(R_p)$ deve fungere da forza centripeta:

$$m \frac{v^2}{R_p} = - \frac{eQ}{4\pi\varepsilon_0 R_p^2} \qquad (e < 0)$$

(essendo le cariche negative, occorre un campo orientato verso l'esterno, per cui $V_1 - V_2 > 0$)

$$\Rightarrow E(R_p) = - \frac{2K}{e R_p} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_p^2} \Rightarrow Q = - \frac{2K}{e} \cdot 4\pi\varepsilon_0 R_p = 1.4 \cdot 10^{-8}\,C$$

come previsto, la carica sul guscio interno è positiva

$$C = 4\pi\varepsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} = 22.2\,pF$$

$$\Rightarrow V_1 - V_2 = Q/C = \frac{-\overset{2}{\cancel{8\pi\varepsilon_0}} K R_p}{e} \, \frac{R_2 - R_1}{\cancel{4\pi\varepsilon_0} R_1 R_2} = 631\,V$$

b) $W = \frac{1}{2} C (V_1 - V_2)^2 = 4.4 \cdot 10^{-6}\,J \; (= 28\,TeV)$