ELETTROSTATICA IN PRESENZA DI DIELETTRICI

Richiami:

def. $\vec{P}$ t.c. $\vec{p} = \int \vec{P}\, d\tau$ per un dielettrico immerso in un campo e.s. esterno.

$\sigma_P = \vec{P} \cdot \hat{n}$ $\qquad \rho_P = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}$

Per dielettrici lineari, risulta

generalm. tensoriale: scalare in casi perfetti e isotropi

$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E}$ $\qquad$ (χ: ~~...~~ suscettività dielettrica del materiale)

perciò le e.d.M. per l'elettrostatica in presenza di dielettrici sono:

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \dfrac{1}{\varepsilon_0}(\rho + \rho_P) \longrightarrow \vec{\nabla} \cdot \varepsilon_0 \vec{E} = \rho - \vec{\nabla} \cdot \vec{P} \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \end{cases}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \underbrace{(\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P})}_{\equiv \vec{D}} = \rho \qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$$

per dielettrici lineari, $\vec{D} = \varepsilon_0 \underbrace{(1+\chi)}_{\text{n.b.: } \boxed{>1}} \vec{E} \equiv \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}$

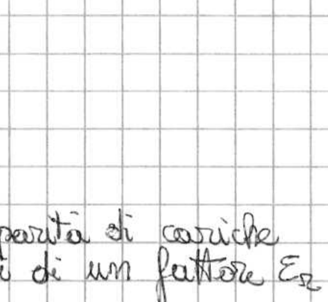
$\Rightarrow$ In presenza di dielettrici omogenei e isotropi, a parità di cariche sorgenti i campi e i potenziali risultano attenuati di un fattore ε_r.

$\boxed{\text{MS E III 4}}$

Calcolare il campo elettrico generato da una sfera conduttrice di raggio R dotata di carica Q, immersa in un dielettrico omogeneo di cost. dielettrica ε_r. Calcolare inoltre le cariche di polarizzazione presenti nel dielettrico.

meglio partire da $\vec{D}$ (t. di Gauss)

Vuoto: $\vec{E}_0 = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \dfrac{Q}{r^3} \vec{r}$ $\qquad$ dielettrico: $\vec{E} = \dfrac{\vec{E}_0}{\varepsilon_r} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon} \dfrac{Q}{r^3} \vec{r}$



Da $\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E}$ e $\varepsilon_r = \chi + 1$ si ottiene

$$\vec{P} = \varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1) \vec{E} = \frac{\varepsilon_r - 1}{4\pi \varepsilon_r} \frac{Q}{r^3} \vec{r}$$

$\sigma_p = \vec{P} \cdot \hat{n}$

↳ normale <u>uscente</u>! dal dielettrico: antiparallela a $\vec{P}$, perché $\vec{P} \parallel \vec{E}$

$$\Rightarrow \sigma_p = -\frac{\varepsilon_r - 1}{4\pi\varepsilon_r}\frac{Q}{R^3} = \left(\frac{Q}{4\pi R^2} = \sigma\right) = -\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}\sigma$$

↳ densità di carica su sup. del conduttore.

Invece:

$$\rho_P = -\vec{\nabla}\cdot\vec{P} \propto -\vec{\nabla}\cdot\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right) = 0$$

$$\frac{1}{r^3}\vec{r} = \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

oppure $\boxed{\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \cdot \frac{1}{r^2}\right) + 0 = 0}$

Commentare sull'intuitività del segno di σ_p e osservare anche che il campo e.s. totale è la sovrapposizione di quello generato da σ e da σ_p:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\hat{r} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_P}{r^2}\hat{r} =$$

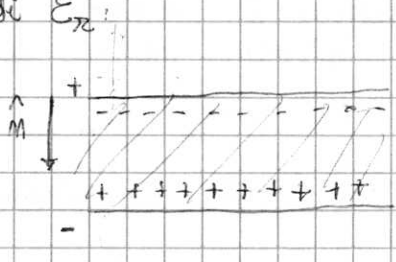
$$= \frac{4\pi R^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\sigma\left(1 - \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}\right)\hat{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{Q}{r^2}\hat{r} \text{ appunto.}$$

$\boxed{\text{E. III. 5}}$

Condensatore piano interam. riempito di dielettrico:

campo uniforme, ma scalato di ε_r:

$$\vec{E} = \frac{\vec{E}_0}{\varepsilon_r} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon_r}\hat{n}$$



diel. omogeneo: $\vec{P} = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\vec{E}$ uniforme

$\Rightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{P} = 0 = \rho_P$

$$\sigma_P = -\hat{n}\cdot\vec{P} = -\cancel{\varepsilon_0}(\varepsilon_r - 1)\frac{\sigma}{\cancel{\varepsilon_0}\varepsilon_r} = -\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}\sigma$$

(per la σ_p su faccia inferiore vale l'opposto perché il campo, e quindi $\vec{P}$ hanno <u>lo stesso</u> verso della normale uscente perciò $\sigma_p = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}\sigma$)

Allo stesso modo quindi il campo all'interno si calcola come il campo di due doppi strati, uno con $\pm\sigma$ e l'altro con $\pm\sigma_p \; (\propto \mp\sigma)$

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} + \frac{\sigma_p}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\left(1 - \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}\right) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} = \frac{E_0}{\varepsilon_r}$$

Altre considerazioni da $\boxed{\text{NV 3.1}}$

se la d.d.p. tra le armature viene mantenuta costante, poiché la capacità è aumentata di ε_r, la carica accumulata sulle armature aumenta dello stesso fattore:

$$q = \varepsilon_r C_0 \cdot V_0 = \varepsilon_r q_0$$

il campo è invariato perché il generatore lo mantiene costante.

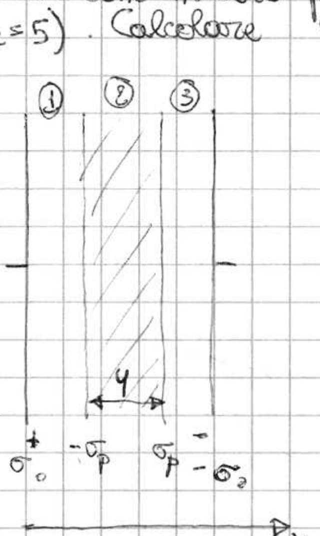
La carica di polarizzazione e il vettore polarizzazione sono ora

$$\vec{P} = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\vec{E}_0$$

e $\sigma_p = -\dfrac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}\sigma$ formalmente identica, ma più alta del caso precedente perché σ è aumentata.

$\boxed{\text{NV 3.2}}$

In un condensatore piano Σ, $h = 1\,cm$ è inserita una lastra di dielettrico (Σ, $y = 5\,mm$, $\varepsilon_r = 5$). Calcolare C_{dopo}/C_{prima}



In ① e ③, $\vec{E} = \vec{E}_0 = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{x}$

In ②, per il p. di sovrapp.,

$$\vec{E} = \left(\frac{\sigma}{\varepsilon_0} - \frac{\sigma_p}{\varepsilon_0}\right)\hat{x}$$

ma $\vec{E} = \dfrac{\vec{E}_0}{\varepsilon_r} \Longrightarrow \dfrac{\sigma}{\cancel{\varepsilon_0}\varepsilon_r} = \dfrac{\sigma}{\cancel{\varepsilon_0}} - \dfrac{\sigma_p}{\cancel{\varepsilon_0}}$

$$\Longrightarrow \sigma_p = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}\sigma$$

come al solito

equivalentemente, poiché $D_{n1} = D_{n2}$ e $\vec{D}$ è normale all'interfaccia, si ha $D = D_0 = \sigma\hat{x}$

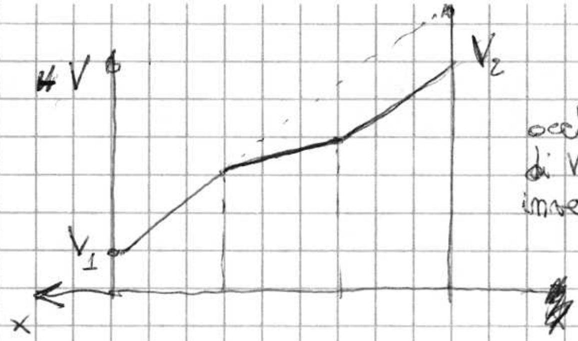
$$= \varepsilon_0\vec{E} + \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\vec{E}$$

$$\Downarrow$$

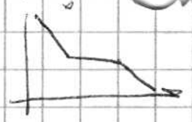
$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon_r}\hat{x}$$

$$\vec{P} = \frac{(\varepsilon_r - 1)}{\varepsilon_r}\sigma\hat{x}$$

$$\boxed{\sigma_p = \vec{P}\cdot\hat{n}}$$



occhio all'andamento di V che è invertito !!



$$V = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}(h-y) + \frac{\sigma_0}{\varepsilon_r\varepsilon_0}y = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}\Big(\underbrace{h - \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}y}_{\substack{>0 \\ (=0 \text{ solo per } \varepsilon_r = 1)}}\Big) < V_0$$

(= solo per $\varepsilon_r = 1$)

$$C = \frac{\sigma_0 \Sigma}{V_1 - V_2} = \frac{\sigma_0 \Sigma}{\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}\left(h - \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}y\right)} = \frac{\varepsilon_0 \Sigma}{(\quad)} > \frac{\varepsilon_0 \Sigma}{h}$$

per $y \to h$, $C = \varepsilon_r C_0$

Stesso risultato si ottiene trattando il sistema come una serie di 3 condensatori (anche se rigorosamente occorre introdurre due conduttori piani al giusto potenziale per non alterare la distr. di carica e operare fra lamine conduttrici)

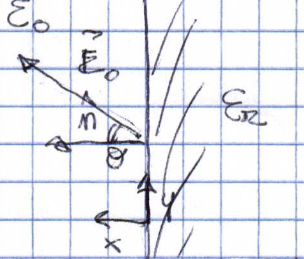
$$\frac{1}{C} = \frac{y_1}{\varepsilon_0 \Sigma} + \frac{y_2}{\varepsilon_0 \Sigma} + \frac{y}{\varepsilon_0 \varepsilon_r \Sigma} = \frac{h-y}{\varepsilon_0 \Sigma} + \frac{y}{\varepsilon_0 \varepsilon_r \Sigma} = \underbrace{\frac{1}{\varepsilon_0 \Sigma}}_{= \frac{1}{C_0}}\left(h - y + \frac{y}{\varepsilon_r}\right) =$$

$$= \frac{1}{C_0}\left(h - \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}y\right)$$

MS III.9

Un campo elettrico uniforme $\vec{E}_0$ di modulo $E_0 = 200\ V/m$ è presente, nel vuoto, all'esterno della faccia piana che delimita una lastra di materiale dielettrico omogeneo e isotropo, di costante dielettrica relativa $\varepsilon_r = 4$. Le linee di forza del campo $\vec{E}_0$ formano un angolo $\theta = 30°$ con la normale $\hat{n}$ alla lastra.

Calcolare la densità superficiale σ_P delle cariche di polarizzazione sulla superficie della lastra.



$\sigma_P = \vec{P} \cdot \hat{n}$

$\quad \hookrightarrow \vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E}_{diel}$

Att.! Stavolta non ce la caviamo solo con un fattore ε_r!

Scegliamo il riferimento come in figura, e lavoriamo sulle componenti normale e tangenziale:

Si conserva la componente normale di $\vec{D}$:

$$\varepsilon_0 E_{0x} = \varepsilon_0 E_x + \underbrace{P_x}_{\varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)E_x}$$

$$\Rightarrow E_{0x} = \varepsilon_r E_x$$

$$E_x = \frac{1}{\varepsilon_r} \cdot E_0 \cos\theta = \frac{1}{\varepsilon_r} \frac{\sqrt{3}}{2} E_0$$

Si conserva la componente tangenziale di $\vec{E}$:

$$E_{0y} = E_y$$

$$\hookrightarrow E_0 \cdot \sin\theta = E_0 \cdot \tfrac{1}{2}$$

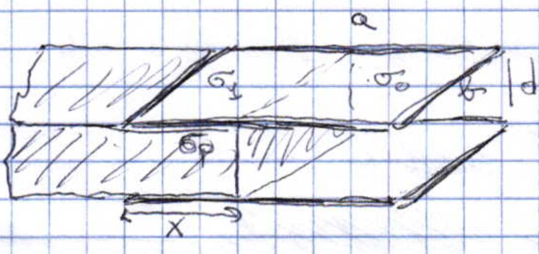
Quindi $\vec{P} = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\vec{E} = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2\varepsilon_r} E_0 \\ E_0/2 \end{pmatrix}$

Da cui $\vec{P} \cdot \hat{n} = P_x = \frac{\sqrt{3}}{2} \varepsilon_0 \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r} E_0 = 1.15 \cdot 10^{-9}\ C/m^2$

(NB il risultato sul libro tiene conto della diversa orientazione di $\vec{E}$ rispetto alla mia figura)

$\boxed{\text{MS III. 13}}$

Un condensatore a facce piane e parallele, rettangolari di dimensioni a e b (v. figura) è parzialmente riempito, per un tratto $x = a/3$, da una lastra di dielettrico omogeneo e isotropo di costante dielettrica relativa $\varepsilon_r = 4$. Se la carica totale sull'armatura superiore è $Q = 10^{-6}\,C$, quanto vale la carica Q_x ~~se~~ che si dispone sulla parte di armatura superiore affacciata al dielettrico?



$E = E_0$ perché diretto tangenzialmente all'interfaccia.

$\Rightarrow \Delta V = \Delta V_0 = E_0 d = E d$ (compatibilmente col fatto che le lastre conduttrici sono in comune)

$$\frac{\sigma_1 + \sigma_p}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} \quad (*)$$

Tenendo conto del fatto che il segno di σ_p è opposto a quello di σ_1, si evince che $\sigma_1 > \sigma_0$ per compensare la parziale schermatura del campo operata da σ_p e mantenere invariato il campo tra fuori e dentro il dielettrico.

Nella regione riempita dal dielettrico vale anche

$$\underset{\sigma_1}{\overset{\parallel}{D}} = \varepsilon_0 E + P = \varepsilon_0 \varepsilon_r E \Rightarrow E = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} \Rightarrow \sigma_0 = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_r} \quad (**)$$

$$P = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)E = (\varepsilon_r - 1)\sigma_0 \equiv |\vec{P}\cdot\hat{n}| \equiv |\sigma_p| \quad (***)$$

(il segno sulle due facce del dielettrico si ricava ragionando sul fatto che $\vec{P} \parallel \vec{E}$ e la normale è quella uscente dal dielettrico)

Le relazioni $*$, $**$ e $***$ sono ovviamente consistenti tra loro. Date due di esse la terza distribuzione di carica si ricava per differenza una volta nota la carica totale sulle armature (Q)

$$Q = \sigma_0 (a-x) b + \overset{\varepsilon_r \sigma_0}{\sigma_1} x b = \sigma_0 b \left[(a-x) + \varepsilon_r x\right]$$

$$\Delta V = E d = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} d$$

Perciò la capacità del sistema è

$$C = Q/_{\Delta V} = \varepsilon_0 \left[\frac{b(a-x)}{d} + \varepsilon_r \frac{b\,x}{d} \right]$$

come il parallelo di due condensatori di aree $b(a-x)$ e bx, di cui il secondo è riempito con il dielettrico.

Quindi una volta nota Q (dai dati) si può ricavare

$$Q_x = \sigma_1 \cdot b\, x = \varepsilon_r \sigma_0\, b\, x$$

$$\hookrightarrow \frac{Q}{b\left[(a-x)+\varepsilon_r x\right]}$$

oppure fare uso della espressione di C:

$$\Delta V = \frac{Q}{C} \Longrightarrow Q_x = C_{diel}\,\Delta V = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{b\,x}{d} \cdot \frac{Q}{\varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{b\,x}{d} + \varepsilon_0 \frac{b(a-x)}{d}}$$

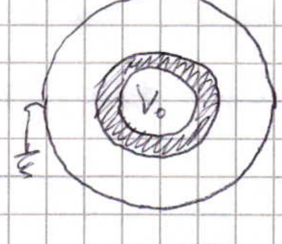
che ovviamente coincidono.

Prova scritta 24/06/2004 - es. A

Si consideri un condensatore cilindrico lungo $h = 12$ cm con superficie interna di raggio $a = 1.0$ cm e raggio esterno $b = 4.0$ cm. La superficie interna è ricoperta di uno strato di dielettrico omogeneo e isotropo di spessore $d = 1.0$ cm e costante $\varepsilon_r = 3.0$. Si assuma $h >> a, b$ in modo da trascurare gli effetti di bordo.

1) Si calcoli la capacità del sistema.

2) Se la superficie interna è a $V_0 = 5.0 \cdot 10^3$ V rispetto a quella esterna e da questa viene emesso un elettrone ($q = -1.6 \cdot 10^{-19}$ C), ad esempio per effetto termoionico, con velocità iniziale trascurabile, calcolare l'energia cinetica dell'elettrone quando questo raggiunge il dielettrico.



1)

$$C_1 = \frac{2\pi\varepsilon_r\varepsilon_0 h}{\ln\frac{a+d}{a}}$$

$$C_2 = \frac{2\pi\varepsilon_0 h}{\ln\frac{b}{a+d}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{C_{serie}} = \frac{\ln\frac{b}{a+d}}{2\pi\varepsilon_0 h} + \frac{\ln\frac{a+d}{a}}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r h}$$

$$C_{serie} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r h}{\varepsilon_r \ln\left(\frac{b}{a+d}\right) + \ln\left(\frac{a+d}{a}\right)} = 7.2\ \text{pF}$$

2) $Q = C_{serie} \cdot V_0$

T. di G.

$$E(r) = \frac{C_s V_0}{2\pi\varepsilon_0 r \cdot h}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m_e v^2 = q\left[V(b) - V(a+d)\right] = q\int_b^{a+d} \frac{C_s V_0}{2\pi\varepsilon_0 r \cdot h}\, dr = \frac{-q C_s V_0}{2\pi\varepsilon_0 h} \ln\frac{b}{a+d} =$$

$$= 6.0 \cdot 10^{-16}\ \text{J}$$

Esonero 23/03/2005 - Esercizio 1

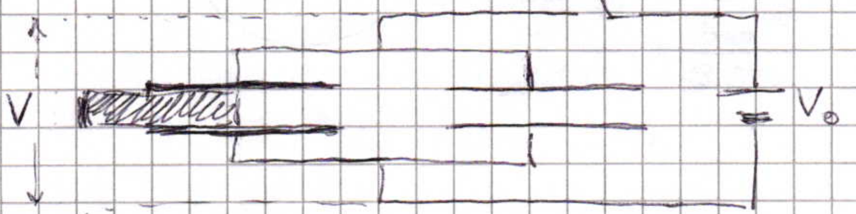
Due condensatori uguali di facce piane e parallele quadrate di lato $a = 10\,cm$ a distanza $d = 1\,mm$, sono in parallelo e inizialmente caricati ad una differenza di potenziale $V_0 = 10^3\,V$. Staccato il generatore e tenuto isolato il sistema, in uno di essi viene inserita, fino ad occupare metà del volume, una lastra di materiale dielettrico omogeneo e isotropo di spessore d e superficie quadrata di lato a. In questa nuova condizione si misura una differenza di potenziale ai capi dei condensatori pari a $V = 7.4 \cdot 10^2\,V$

Si calcoli:

a) il valore di ε_r della lastra;

b) il rapporto tra le cariche dei due condensatori prima e dopo;

c) il modulo della forza che agisce sulla lastra.



a) All'inizio: parallelo di condensatori uguali di capacità $C_0 = \frac{\varepsilon_0 a^2}{d}$

$\Rightarrow C_{eq} = 2C_0$

$Q_0 = C_0 V_0$ su ciascuno dei due.

Dopo: 3 condensatori in parallelo. Uno è C_0, gli altri due sono

$$\varepsilon_0 \frac{\varepsilon_r \frac{a}{2} \cdot a}{d} = \varepsilon_r \frac{C_0}{2} \; ; \quad \frac{\varepsilon_0 \frac{a}{2} a}{d} = \frac{C_0}{2}$$

$$\Rightarrow C_{eq} = \frac{C_0}{2}(3 + \varepsilon_r)$$

La carica totale $(2C_0V_0)$ è conservata:

$$Q_{tot} = 2\cancel{C_0}V_0 = \frac{\cancel{C_0}}{2}(3+\varepsilon_r) \cdot V \Rightarrow \varepsilon_r = 4\frac{V_0}{V} - 3 = 2.4$$

b) Dopo inserimento, il condensatore vuoto ha carica

$$Q_1 = C_0 \cdot V$$

$$\Rightarrow \quad \frac{Q_1}{Q_0} = \frac{C_0 V}{C_0 V_0} = \frac{V}{V_0} = 0.74$$

Poiché il sistema conserva la carica,

$$\underset{2Q_0}{\overset{\shortparallel}{Q_{tot}}} = (0.74 + x)\, Q_0 \quad \Rightarrow \quad x = 1.26$$

O equivalentemente,

$$Q_2 = \frac{C_0}{2}(\varepsilon_r + 1) \cdot V$$

$$\frac{Q_2}{Q_0} = \frac{\cancel{C_0}(\varepsilon_r + 1) \cdot V}{2\,\cancel{C_0} V_0} = \frac{\varepsilon_r + 1}{2} \cdot \frac{V}{V_0} = 1.26$$

c) $$W(x) = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C(x)}$$

$$C(x) = C_0 + \varepsilon_0 \frac{\varepsilon_r x a}{d} + \varepsilon_0 \frac{(a-x)a}{d} =$$

$$= 2C_0 + \frac{\varepsilon_0 x a}{d}(\varepsilon_r - 1)$$

$$F_x = -\frac{dW}{dx} = -\frac{Q^2}{2}\left(-\frac{1}{C^2}\right) \cdot \frac{dC}{dx}\bigg|_{x=\frac{a}{2}} = \qquad \left(\frac{Q}{C} = V\right)$$

$$= \frac{V^2}{2} \cdot \frac{\varepsilon_0 a}{d}(\varepsilon_r - 1) = 3.4 \cdot 10^{-4}\, N$$

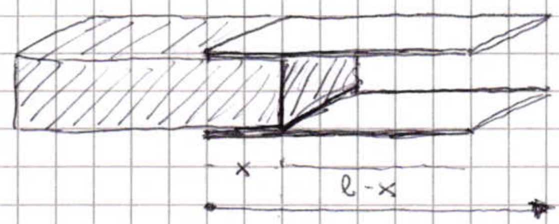
NV 3.5

Un condensatore piano ha le armature quadrate, di lato $l = 50\,cm$, distanti $h = 2\,cm$, e viene caricato con un generatore ($V_0 = 10^3 V$).

Un blocco di dielettrico $\varepsilon_r = 5$ a forma di parallelepipedo con basi quadrate di lato l e altezza h può scorrere senza attrito tra le armature del condensatore.

Calcolare, a carica costante e a potenziale costante, la forza F che agisce sul blocco quando esso è entrato per metà e il lavoro che tale forza compie per far entrare completamente il blocco nel condensatore.

I) Carica costante, pari a q_0



Ignorando effetti di bordo, questo sistema equivale a due condensatori in parallelo:

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r \cdot l x}{h}$$

$$C_2 = \frac{\varepsilon_0 l \cdot (l - x)}{h}$$

$$\Rightarrow C_{eq}(x) = C_1 + C_2 = \frac{\varepsilon_0 l}{h}(\varepsilon_r \cdot x + l - x) = \frac{\varepsilon_0 l}{h}\left[(\varepsilon_r - 1)x + l\right]$$

L'energia elettrostatica di questo condensatore è

$$W(x) = \frac{1}{2}\frac{q_0^2}{C} = \frac{q_0^2 h}{2\varepsilon_0 l} \cdot \frac{1}{(\varepsilon_r - 1)x + l} \qquad \vec{F} = -\vec{\nabla} W = (F_x, 0, 0)$$

$$\Rightarrow F_x = -\frac{dW}{dx} = \frac{q_0^2 h}{2\varepsilon_0 l}\frac{\varepsilon_r - 1}{\left[(\varepsilon_r - 1)x + l\right]^2}$$

Possiamo riscrivere questa espressione ricordando che:

$$E(x) = \frac{V(x)}{h} = \frac{q_0}{h\,C(x)} = \frac{q_0}{\varepsilon_0 l\left[(\varepsilon_r - 1)x + l\right]}$$

$\Sigma = l \cdot h$ (faccia del dielettrico)

$$F = \underbrace{\frac{1}{2}\varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)E^2(x)}_{\text{pressione}}\Sigma \longrightarrow F(x = 25\,cm) = 4.94 \cdot 10^{-5} N$$

Il lavoro si ottiene integrando la forza su tutto il cammino da 0 a l.

$$-\Delta W = L = \int_0^l F(x)\,dx = \frac{q_0^2 h}{2\varepsilon_0 l}\left[-\frac{1}{(\varepsilon_r - 1)x + l}\right]_0^l = \frac{q_0^2 h}{2\varepsilon_0 l}\left[-\frac{1}{\varepsilon_r l} + \frac{1}{l}\right] = \frac{q_0 h}{2\varepsilon_0 l^2}\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}$$

Numericamente, $\mathcal{L} = 4.45 \cdot 10^{-5}$ J

Il lavoro, che per il t. dell'en. cinetica è pari alla variazione di energia cinetica della lastra, è pari alla diminuzione di energia elettrostatica del sistema.

T è massima quando $x = l$, se al blocco è permesso continuare il suo moto il processo si inverte, la lastra cede energia al condensatore fino ad arrestarsi (se è partita da ferma) ~~[illegible]~~

II) A potenziale costante, l'energia si scrive come

$$W(x) = \frac{1}{2} C(x) V_0^2 = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_0 l}{h} \left[l + (\varepsilon_r - 1) x \right] V_0^2$$

In questo caso, $\frac{dW}{dx}$ è positiva:

$$\frac{dW}{dx} = \frac{\varepsilon_0 l V_0^2}{2h} (\varepsilon_r - 1) > 0$$

~~e~~ e allora?

Ma il sistema non è isolato: per calcolare la forza agente sulla lastra dobbiamo scrivere correttamente l'energia totale del sistema.

Il generatore in particolare, compie il lavoro

$$dL_{gen} = V_0 dq = V_0^2 dC = V_0^2 \frac{\varepsilon_0 l}{h} (\varepsilon_r - 1) dx$$

$$\Rightarrow \frac{dL_{gen}}{dx} = 2 \frac{dW}{dx}$$ (aumenta sia l'en. elettrostatica sia l'energia cinetica)

$$dW_{tot} = dW - dL_{gen} = -dW \qquad \Delta T = -dW_{tot} = -(dW_{e.s.} - dL_{gen}) = +dW_{e.s.} = F_x dx$$

$$\Rightarrow \frac{dW_{tot}}{dx} = -\frac{dW}{dx} < 0 \Rightarrow$$ la lastra viene risucchiata anche in questo caso

Tuttavia, la forza con cui la lastra è attirata è differente:

$$F_x = -\frac{dW_{tot}}{dx} = \frac{\varepsilon_0 l V_0^2}{2h} (\varepsilon_r - 1)$$

perché non dipende da x.

Sostituendo V_0 con $\frac{q}{C}$, si ottiene formalmente la stessa espressione del caso a carica costante, ma con $q = q(x)$