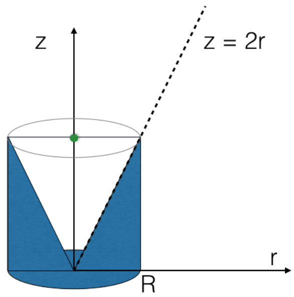
Simulazione I prova di esonero del corso di Elettromagnetismo (aa. 2015/2016)
(Proff. S. Giagu, F. Lacava, S. Rahatlou)
15 aprile 2016

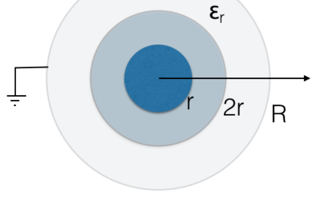
Esercizio 1

In un cilindro isolante di raggio R=1.0 cm ed altezza $h = 2R$ è praticato un incavo conico con la base coincidente con la base superiore del cilindro e il vertice posto al centro della base inferiore del cilindro. Il solido di rotazione risultante ha una densità di carica, non omogenea, data da $\rho(r, z, \phi) = -\rho_0 \cdot r^2$ in cui r è la distanza dall'asse del cilindro *(in coordinate cilindriche)*, e ρ_0= 40 C/m^5. Al centro della base superiore del cilindro è posta una carica puntiforme Q uguale ed opposta alla carica totale della distribuzione del solido descritto.
a) Calcolare il valore della carica Q.
b) Dimostrare che il momento di dipolo del sistema di cariche descritto è pari a $1.2 \cdot 10^{-10}$ Cm, orientato nel verso positivo di $\hat{z}$.
c) Calcolare il lavoro necessario per portare una carica di prova q=$2.0 \cdot 10^{-10}$ C nelle due posizioni $A(r, \phi, z)$=(2 m,0,0) e $B(r, \phi, z)$=(0,0,2 m).



Esercizio 2

Una carica Q viene depositata sulla superficie di un palloncino sferico di raggio r. Il palloncino si trova all'interno di un guscio conduttore anche esso sferico di raggio $R > 2r$, in modo tale che i centri di palloncino e guscio coincidano. Il conduttore viene collegato a terra (potenziale nullo). Determinare:
a) La differenza di potenziale tra palloncino e guscio conduttore.
b) La pressione elettrostatica che agisce sul palloncino e sulla superficie interna del conduttore sferico.
c) Il lavoro delle forze elettrostatiche se il palloncino viene fatto espandere sino a $r' = 2r$.
d) La capacità del condensatore costituito da palloncino e guscio nel caso in cui l'intercapedine tra i due venga riempita di un materiale dielettrico di costante ϵ_r=4.
e) Come cambiano le risposte ai quesiti precedenti se il guscio conduttore non è collegato a terra, bensì neutro e isolato?



Soluzione 1

La carica del solido si ottiene per integrazione

$$Q_s = \int_0^R \int_0^{2r} 2\pi r \rho(r) h(r)\ drdz = \int_0^R 2\pi r(-\rho_0 r^2)2r\ dr = -\frac{4}{5}\rho_0 \pi R^5$$

quindi la carica puntiforme ha carica

$$Q = -Q_s = \frac{4}{5}\rho_0 \pi R^5 = 10^{-8}\ C\ .$$

Il momento di dipolo, per la simmetria del sistema, ha come unica componente non nulla quella lungo $\hat{z}$, ed è dato sommando il contributo dato dal solido descritto e quello della carica Q posta in $h = 2R$, quindi

$$P = \int_0^R \int_0^{2r} \rho(r) 2\pi r z\ dzdr\ + Q \cdot h = \int_0^R \rho_0 r^2 2\pi r \left(\frac{4r^2}{2}\right)\ dr\ + Qh = \rho_0 4\pi \int_0^R r^5\ dr\ + Qh =$$

$$= -\frac{2}{3}\rho_0 \pi R^6\ +\ Qh = \left(-\frac{5}{6}R\ +\ 2R\right) Q = \frac{7}{6} RQ\ .$$

o equivalentemente

$$P = \frac{7}{6} R \frac{4}{5} \rho_0 \pi R^5 = \frac{14}{15} \pi \rho_0 R^6 = 1.2\ 10^{-10}\ Cm\ .$$

Il lavoro necessario per portare la carica q nei punti A e B si può ricavare dalla variazione dell'energia elettrostatica della carica puntiforme nel potenziale generato dal dipolo

$$L = -\Delta u \qquad \Rightarrow \qquad L_A = (V_\infty = 0) - qV(A) \qquad L_B = (V_\infty = 0) - qV(B)\ .$$

Ricordando che l'espressione del potenziale generato da un dipolo è

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3}$$

si vede che il lavoro fatto per portare la carica nel punto A è nullo (L_A=0) poichè $V(A)$=0 dal momento che $\vec{p}$ e $\vec{r}$ sono ortogonali, mentre

$$V(B) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p(2\ m)}{(2\ m)^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(2\ m)^2} \frac{7}{6} RQ\ .$$

Allo stesso risultato si può arrivare considerando l'energia elettrostatica del dipolo nel campo generato dalla carica puntiforme. Per portare la carica q nel punto A il lavoro è nullo, poichè spostandosi sul piano ortogonale all'asse del dipolo (x,y) l'energia elettrostatica è sempre nulla poichè le linee di campo della carica puntiforme, che escono radialmente da essa, sono ortogonali al momento di dipolo.
Portando la carica nel punto B il campo generato da essa è parallelo alla direzione del dipolo, con verso opposto, quindi l'energia elettrostatica è pari a

$$U_B = -\vec{E} \cdot \vec{P} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 (2.0\ m)^2} \frac{7}{6} RQ$$

da cui si ricava che il lavoro fatto dalle forze del campo elettostatico è pari a

$$L = -\Delta U = -U_B = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 (2.0\ m)^2} \frac{7}{6} RQ = -5.2\ 10^{-13}\ J\ .$$

Soluzione 2

Nota la carica Q sul palloncino possiamo ricavare la differenza di potenziale integrando il campo elettrico (ottenuto applicando il teorema di Gauss) tra la superficie del palloncino e quella interna del guscio

$$\Delta V_{12} = V_2 - V_1 = -\int_r^R \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{x^2}\, dx = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r}\right)$$

ove x è la variabile di integrazione che parametrizza le direzione radiale. All'interno dell'intercapedine tra palloncino e guscio la densità di energia elettrostatica è data da

$$\frac{1}{2}\epsilon_0 E(x)^2 = \frac{1}{2}\epsilon_0 \frac{Q^2}{16\pi^2\epsilon_0^2}\frac{1}{x^4}$$

quindi la pressione elettrostatica sul palloncino e sul guscio sferico valgono rispettivamente

$$p_{pall} = \frac{Q^2}{32\pi^2\epsilon_0}\frac{1}{r^4} \qquad p_{guscio} = \frac{Q^2}{32\pi^2\epsilon_0}\frac{1}{R^4}\ .$$

Il lavoro fatto dalle forze elettrostatiche nell'espansione $r -> r' = 2r$ è pari all'opposto della variazione dell'energia elettrostatica; si può ricavare calcolando l'energia elettrostatica contenuta nell'intercapedine tra palloncino e guscio prima e dopo l'espansione. Si può arrivare allo stesso risultato pensando che l'energia elettrostatica è variata della quantità che prima si trovava nella regione di spazio che dopo l'espansione finisce all'interno del palloncino (quindi in una regione di campo elettrico nullo): questa è l'energia elettrostatica contenuta nel guscio sferico tra r e $2r$. Integrando in questo guscio l'espressione della densità di energia elettrostatica si ottiene

$$\Delta u = \int_r^{2r} \frac{Q^2}{32\pi^2\epsilon_0}\frac{1}{r^4}\, 4\pi r^2 dr = \int_r^{2r} \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^2}\, dr = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2r}\right) = \frac{Q^2}{16\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}\ .$$

Allo stesso risultato si arriva se si considera il lavoro fatto dalla pressione elettrostatica sulla superficie del palloncino (variabile nell'espansione), integrata nell'espansione del palloncino. La capacità del condensatore sferico costituito da palloncino e guscio sferico, riempito di materiale dielettrico di costante $\epsilon_r = 4$ è data da

$$C = \frac{4\pi\epsilon_0\epsilon_r}{\left(\frac{1}{2r} - \frac{1}{R}\right)} = 8\pi\epsilon_0\epsilon_r\frac{rR}{(R-r)}\ .$$

Tutte le risposte alle domande precedenti non cambiano se il guscio esterno non è messo a terra bensì neutro ed isolato. L'unica differenza in questo secondo caso è che poichè sulla superficie interna del guscio sferico c'è una carica indotta dalla carica del palloncino, se il guscio è isolato e complessivamente neutro, vorrà dire che rimarrà una carica non nulla (positiva) sulla superficie esterna del guscio (pari alla carica iniziale del palloncino Q. L'effetto di questa carica è nullo all'interno del guscio, ovvero dove si calcolano tutte le quantità rilevanti richieste; l'unica differenza è che in questo secondo caso ci sarà un campo elettrico non nullo al di fuori del guscio sferico.