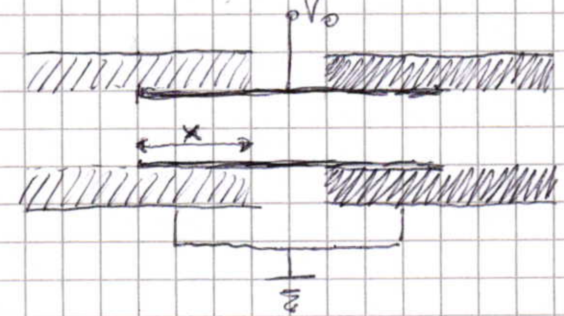
$\boxed{\text{NV } 3.8}$

Due condensatori cilindrici ($R_1 = 3$ cm, $R_2 = 9$ cm), riempiti da dielettrici aventi suscettività χ_1 e χ_2 con $\chi_1 > \chi_2$, sono a capacità variabile. Infatti l'armatura interna, di massa $m = 2.46$ Kg, è comune ed è libera di muoversi senza attrito lungo l'asse; il moto avviene sempre in modo che le estremità dell'armatura siano dentro i condensatori. Quando collegato a un generatore $V_0 = 4 \cdot 10^3$ V il cilindro interno si mette in moto percorrendo 2.5 cm in 10 s.

Calcolare in che verso avviene il moto, la suscettività χ_1 se $\chi_2 = 1$, il lavoro fatto dal generatore nei 10 secondi, le polarizzazioni dei due dielettrici per $r = R_1$



$$C(x) = \frac{2\pi\varepsilon_0 x}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \cdot \varepsilon_r$$

$$W = \frac{1}{2} C(x) V_0^2 \longrightarrow F_x = (+)\frac{dW}{dx} \longrightarrow \frac{1}{2} C(x) V_0^2 + \frac{1}{2}(C(l-x))V_0^2$$

potenziale costante

N.B. in questo disegno, x cresce verso sx, quindi $F_x > 0$ indica forza verso sx.

$$\Longrightarrow F_x = \frac{2\pi\varepsilon_0 V_0^2}{\ln R_2/R_1}\underbrace{\left(\varepsilon_r^{(1)} - \varepsilon_r^{(2)}\right)}_{\chi_1 - \chi_2} = 4.1 \cdot 10^{-4}(\chi_1 - \chi_2)\,\text{N}$$

(cioè, la forza è diretta in modo da riempire il volume più grande possibile con il dielettrico che ha χ più alta)

$$x = \frac{1}{2} a t^2 \longrightarrow a = \frac{2x}{t^2} = 5 \cdot 10^{-4}\,\text{m/s}^2 \Longrightarrow m \cdot a = 12.3 \cdot 10^{-4}\,\text{N}$$

$$\Longrightarrow \chi_1 - \chi_2 = 3 \Longrightarrow \text{se } \chi_2 = 1,\ \chi_1 = 4$$

$$L = F_x \cdot x = 3.07 \cdot 10^{-5}\,\text{J}$$

$$(L_{gen} = 2 \cdot L = 6.14 \cdot 10^{-5}\,\text{J})$$

Per le polarizzazioni, dal t. di G. $\vec{\nabla} D = \rho$

$$2\pi r \cdot \cancel{x}^{\,\sigma\ l-x} D = \sigma_0 \cdot 2\pi R_1 \cancel{x}^{\,\sigma\ l-x} \Longrightarrow D = \frac{\sigma_0 R_1}{r}$$

$$\text{ma } \sigma_0 = \frac{q}{2\pi R_1 x} = \frac{C V_0}{2\pi R_1 x} = \frac{2\pi\varepsilon_0 \cancel{x}\varepsilon_r}{\ln R_2/R_1}\frac{V_0}{2\pi R_1 \cancel{x}} = \frac{\varepsilon_r \varepsilon_0 V_0}{R_1 \ln R_2/R_1}$$

$$\Longrightarrow D = \frac{\varepsilon_r \varepsilon_0 V_0}{r \ln R_2/R_1} \longrightarrow E = \frac{D}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} = \frac{V_0}{r \ln \frac{R_2}{R_1}} \text{ per entrambi}$$

$E(R_1) = 1.21 \cdot 10^5 \, V/m$ (uguale in entrambi i condensatori)

$P_1 = \varepsilon_0 \chi_1 E(R_1) = 4.28 \cdot 10^{-6} \, C/m^2$

$P_2 = \varepsilon_0 \chi_2 E(R_1) = 1.07 \cdot 10^{-6} \, C/m^2$

Da dispensa "Esercizi di elettricità e magnetismo A.A. 2004/2005"

Esercizio 1

Un condensatore cilindrico è costituito da due armature di altezza h e raggi esterno e interno R e r.

All'interno è presente un dielettrico di costante ε e massa m, libero di scorrere senza attrito in direzione longitudinale e soggetto all'azione del campo gravitazionale g.

Le armature sono mantenute a d.d.p. V da un generatore. Detta z l'altezza della porzione che sporge dal bordo, calcolare:

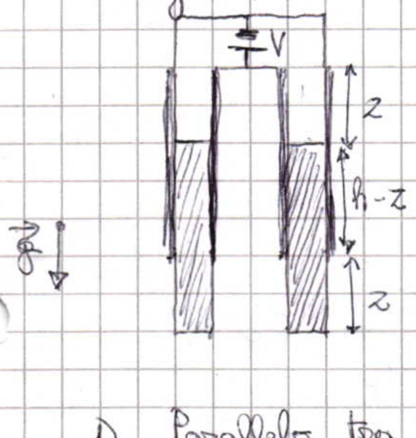
1) la capacità $C(z)$

2) le distribuzioni di carica presenti sulle armature

3) la forza totale agente sul dielettrico specificandone il verso

4) il potenziale V_0 con cui il dielettrico può essere mantenuto in equilibrio.

5) supponendo che il generatore mantenga il condensatore proprio a V_0, calcolare il lavoro fatto dal generatore quando il dielettrico è spostato di una quantità δz e la variazione di energia totale del sistema a seguito dello spostamento.



1) Parallelo tra due cond. cilindrici:

$$C(z) = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r(h-z)}{\ln R/r} + \frac{2\pi\varepsilon_0 z}{\ln R/r} = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln R/r}\left[(1-\varepsilon_r)z + \varepsilon_r h\right]$$

2) $$\sigma_{aria} = \frac{Q_{aria}}{2\pi r z} = \frac{C_{aria}\cdot V}{2\pi r z} = \frac{\varepsilon_0 V}{r \ln R/r}$$

Dalla conservazione delle componenti tangenziali all'interfaccia discende:

$$E_{aria} = E_{diel} \Longrightarrow \frac{D_{aria}}{\varepsilon_0} = \frac{D_{diel}}{\varepsilon_0\varepsilon_r}$$; dal t. di G. $D = \frac{Q}{2\pi r l} = \sigma$ in prossimità dell'armatura interna

$$\Longrightarrow \sigma_{aria} = \frac{\sigma_{diel}}{\varepsilon_r}$$ (si ottiene anche calcolando direttamente $\sigma_{diel} = \frac{Q_{diel}}{2\pi r(h-z)} = \frac{C_{diel} V}{2\pi r(h-z)}$ ecc.)

3) L'energia totale del sistema è

spende energia per tenere V costante

$$E = T - mgz + \underbrace{\frac{1}{2} C(z) V^2 + U_{gen}}_{+U} \qquad U_{gen} = -\delta q V = -\delta C \cdot V^2$$

$$F_{diel} = -\frac{dU}{dz} =$$

$$= +mg \underbrace{-\frac{1}{2}\frac{dC}{dz} V^2 + \frac{dC}{dz} V^2}_{\text{il solito caso a } V = cost} =$$

$$= +mg + \frac{1}{2}\frac{2\pi\varepsilon_0 V^2}{\ln R/r}(1-\varepsilon_r) =$$

$$= \underbrace{+mg}_{\text{tira giù}} - \underbrace{\frac{\pi\varepsilon_0 V^2}{\ln R/r}(\varepsilon_r - 1)}_{\text{tira su}}$$

4) $F_z = 0$ per

$$mg = \frac{\pi\varepsilon_0 V_0^2}{\ln R/r}(\varepsilon_r - 1)$$

$$\Rightarrow V_0^2 = \frac{mg \ln R/r}{\pi\varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)}$$

5)

$$dL_{gen} = \delta C \cdot V_0^2 \Rightarrow \frac{dL_{gen}}{dz} = \frac{dC}{dz} V_0^2 = \frac{2\pi\varepsilon_0 V_0^2}{\ln R/r}(\varepsilon_r - 1)$$

Da dispensa "Esercizi di Elettricità e Magnetismo" A.A. 2004/2005

Esercizio 2

E' dato un condensatore piano isolato, costituito da due armature quadrate di lato L a distanza $d \ll L$.

All'interno è presente una lastra di dielettrico con costante ε che se inserita in modo completo occupa interamente lo spazio fra le armature.

La lastra è agganciata a una molla di costante k e lungh. di riposo L, fissata come in figura. Sia $\pm Q$ la carica depositata sulle armature.

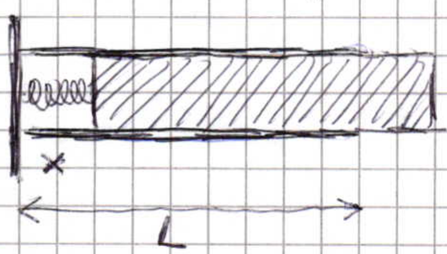
Trascurando gli effetti di bordo, calcolare:

a) La capacità $C(x)$ in funzione della distanza x indicata.

b) La densità di carica sulle armature.

c) La forza agente sul dielettrico.

d) Il lavoro necessario per spostare la lastra da una posizione generica $0 < x < L$ alla posizione $x = L$



a) Due condensatori in parallelo:

$$C(x) = \varepsilon_0 \frac{xL}{d} + \varepsilon \frac{(L-x)L}{d} = (S = L^2) = \left[\varepsilon_0 \frac{x}{L} + \varepsilon\left(1 - \frac{x}{L}\right)\right]\frac{S}{d}$$

b) E_z è conservata:

$$E_z = \frac{\sigma_{aria}}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma_{diel}}{\varepsilon} \Longrightarrow \sigma_{diel} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\sigma_{aria} > \sigma_{aria}$$

Poiché la carica Q è conservata, in ogni posizione x vale

$$Q = C(x) \cdot V = C(x) \cdot E_z d$$

$$\Rightarrow E_z = \frac{Q}{C(x)\, d} = \frac{Q}{\left[\varepsilon_0 \frac{x}{L} + \varepsilon\left(1 - \frac{x}{L}\right)\right] S}$$

$$\sigma_{aria} = \frac{Q}{S} \frac{\varepsilon_0}{[\quad]} \qquad \sigma_{diel} = \frac{Q}{S}\frac{\varepsilon}{[\quad]}$$

c) Sistema isolato. L'energia potenziale totale è

$$U(x) = \frac{1}{2} k(x-L)^2 + \frac{Q^2}{2C(x)}$$

$$F_x(x) = -\frac{dU}{dx} = -k(x-L) - \left(-\frac{Q^2}{2C^2(x)}\right) \cdot \frac{dC(x)}{dx} =$$

$$= \underbrace{-k(x-L)}_{\substack{>0 \\ \text{per } x<L \\ \text{(come in figura)}}} + \underbrace{\frac{Q^2}{2C^2(x)} \cdot (\varepsilon_0 - \varepsilon)\frac{S}{Ld}}_{<0}$$

d)

$$\mathcal{L} = \int_x^L -\frac{dU}{dx'}\,dx' = \int_L^x dU = U(x) - U(L) =$$

$$= \frac{1}{2} k(x-L)^2 + \frac{Q^2}{2C(x)} - \frac{Q^2}{2C(L)}$$

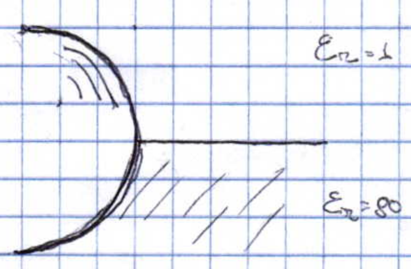
Prova scritta 15/07/2011 - Es. 1

Una sfera conduttrice di raggio $R = 10\,cm$ e carica $Q = 8\,nC$, è per metà immersa in acqua ($\varepsilon_r = 80$), mentre la restante metà si trova in aria ($\varepsilon_r = 1$).
Ricordando le condizioni di raccordo del campo elettrico $\vec{E}$ nell'attraversare la superficie di separazione fra due dielettrici diversi, si calcoli:

a) le densità di cariche libere e di polarizzazione sulla superficie della sfera;

b) la pressione elettrostatica sulla superficie della sfera, indicando esplicitamente su quale delle due superfici essa risulta maggiore;

c) il lavoro necessario a portare la sfera dalla posizione iniziale a quella in cui la sfera si trova a distanza infinita nella regione in cui è presente l'aria, trascurando il contributo dovuto alla forza di gravità.



a)

Il campo $\vec{E}$ è radiale in ciascuno dei due semispazi.

In particolare, alla superficie di interfaccia il campo è puramente tangenziale, ed è pertanto lo stesso sia in aria, sia in acqua.

$$\vec{E}(r) = \vec{E}_0(r)$$

Invece, $\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}$ e $\vec{D}_0 = \varepsilon_0 \vec{E}$.

Dal T. di Gauss per D segue che:

$$2\pi r^2 D_0(r) + 2\pi r^2 D(r) = Q$$

$$2\pi r^2 E(r) \varepsilon_0 (1+\varepsilon_r) = Q$$

$$\Rightarrow E(r) = \frac{Q}{2\pi \varepsilon_0 (1+\varepsilon_r) r^2}$$

La densità di carica libera sul conduttore si ricava dal T. di C.:

$$\sigma = D \Rightarrow \sigma_0 = D_0 = \varepsilon_0 E(R) = \frac{Q}{2\pi (1+\varepsilon_r) R^2} = 1.57 \cdot 10^{-9}\ C/m^2$$

$$\sigma_a = D = \varepsilon_0 \varepsilon_r = \frac{Q \cdot \varepsilon_r}{2\pi (1+\varepsilon_r) R^2} = 1.26 \cdot 10^{-7}\ C/m^2$$

La carica di polarizzazione è invece

$$\sigma_p = \vec{P} \cdot \hat{n} = -\varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\frac{Q}{2\pi R^2(\varepsilon_r + 1)} \qquad (\sigma_p = 0 \text{ in aria})$$

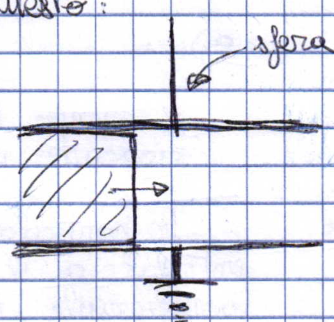
$\varepsilon_0 \chi \vec{E}(r=R)$ | uscente dal dielettrico $(\Rightarrow \hat{n} = -\hat{r})$

$\sigma_p = -1.24 \cdot 10^{-7}\ C/m^2$ in acqua

b) La pressione elettrostatica è

$$\frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E} = \frac{1}{2}\frac{D^2}{\varepsilon_0\varepsilon_r} = \frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r E^2$$

$\Rightarrow$ Poiché $E(R)$ è lo stesso in aria e in acqua, la pressione è più alta in acqua (e diretta secondo la normale uscente dal conduttore), risultando in una forza netta verso il basso.
Giustamente prevedibile perché il sistema in figura è analogo a questo:



$(Q = cost)$

(si può anche mostrare con il lavoro virtuale calcolato nel caso in cui la sfera affondi di δz)

In particolare, $p_{aria} = 1.39 \cdot 10^{-7}$ Pa e $p_{acqua} = 1.12 \cdot 10^{-5}$ Pa

c) Il lavoro è la differenza di energia tra le due configurazioni:

$$L = U_{acqua/aria} - U_{aria} =$$

$$= \int_R^\infty \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2 \cdot 2\pi r^2 dr + \int_R^\infty \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \cdot \varepsilon_r \cdot 2\pi r^2 dr - \int_R^\infty \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2\, 4\pi r^2 dr$$

$(E_0(r) = E(r))$

$$= \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0(1+\varepsilon_r)R} - \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 \cdot 2R} < 0$$

(è qualitativam. analogo a spingere il dielettrico via dal condensatore)

Compito 20/05/2013 - Es. 1

Due condensatori piani uguali con armature quadrate di lato $\ell = 5.0$ cm e aventi distanza $d = 2.0$ mm sono collegati come mostrato in figura.
La d.d.p. tra i punti A e B vale $V_0 = 90V$. Mantenendo il sistema dei due condensatori isolato, il condensatore 1 viene riempito completamente con un materiale isolante a densità variabile lungo l'asse z indicato in figura. Di conseguenza la costante dielettrica dell'isolante varia secondo la legge $\varepsilon_{r1} = 1/(a+bz)$ dove $a = 0.08$ e $b = 0.05\ mm^{-1}$.

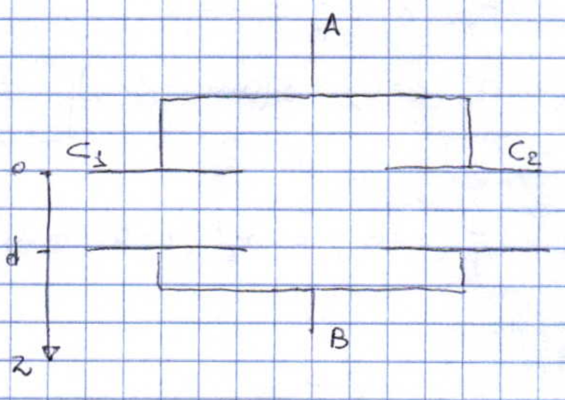
a) Calcolare la capacità del condensatore 1 dopo l'inserimento del materiale isolante.

b) Calcolare la carica presente sulle armature del condensatore 1 dopo l'inserimento del materiale isolante.

c) Calcolare la densità superficiale delle cariche di polarizzazione sulle due superfici $(z=0, z=d)$.

d) Calcolare la densità di volume delle cariche di polarizzazione all'interno del materiale isolante.

a) Per def., $C = \dfrac{Q}{\Delta V}$



$Q = \sigma \ell^2$

$$\Delta V = \int_0^d E(z)\,dz$$

In questo caso il campo $E(z)$ non è uniforme a causa della non omogeneità del dielettrico:

$$E(z) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon_r(z)} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}(a+bz)$$

$$\Rightarrow \Delta V = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\int_0^d (a+bz)\,dz = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\left(ad + \tfrac{1}{2}bd^2\right)$$

$$\Rightarrow C = \frac{\cancel{\sigma}\ell^2}{\cancel{\sigma}/\varepsilon_0\,(ad+bd^2/2)} = \frac{\varepsilon_0 \ell^2}{ad + bd^2/2} = 85\,pF$$

(NB allo stesso risultato si arriva schematizzando il condensatore come una serie di condensatori di area ℓ^2, spessore dz e costante dielettrica $\varepsilon_r(z)$:

$$\frac{1}{C} = \int_0^d \frac{dz}{\varepsilon_0 \varepsilon_r(z)\ell^2}\ )$$

b) Il dielettrico viene inserito a carica costante. La ddp tra le armature varia in ragione della variazione della capacità totale del sistema:

$$Q = (C_1 + C_2) V_0 = (C_1' + C_2) V_0' \; (= Q')$$

$$\Longrightarrow \; V_0' = V_0 \, \frac{C_1 + C_2}{C_1' + C_2}$$

$$\Longrightarrow \; Q_1' = C_1' V_0' = V_0 \, C_1' \, \frac{C_1 + C_2}{C_1' + C_2} = 1.8 \, nC$$

c) $$\vec{P} = \varepsilon_0 (\varepsilon_{r1} - 1) \vec{E} =$$

$$= \cancel{\varepsilon_0} \, \frac{1 - a - bz}{\cancel{a + bz}} \cdot \frac{\sigma_1'}{\cancel{\varepsilon_0}} \cancel{(a + bz)} \, \hat{z}$$

Per $z = 0$, $\hat{n} = -\hat{z}$

$$\sigma_p(z=0) = \sigma_1'(a + bz - 1)\Big|_{z=0} = (a-1)\sigma_1' = \frac{Q_1'}{\ell^2}(a-1) = -6.5 \cdot 10^{-7} \, C/m^2$$

In $z = d$, $\hat{n} = \hat{z}$

$$\sigma_p(z=d) = \sigma_1'(1 - a - bz)\Big|_{z=d} = \frac{Q_1'}{\ell^2}(1 - a - bd) = +5.8 \cdot 10^{-7} \, C/m^2$$

d) $$\rho_p = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} =$$

$$= -\frac{\partial}{\partial z}(1 - a - bz) \cdot \sigma_1' =$$

$$= b\sigma_1' = b \, \frac{Q_1'}{\ell^2} = 3.5 \cdot 10^{-5} \, C/m^3 \quad (\text{uniforme})$$

Verifichiamo la neutralità del dielettrico:

$$\sigma_p(z=0) \cdot \ell^2 + \sigma_p(z=d) \cdot \ell^2 + \rho_p \cdot \ell^2 d =$$

$$= Q_1' \left[(\cancel{a} - \cancel{1}) + (\cancel{1} - \cancel{a} - \cancel{bd}) + \cancel{bd} \right] = 0$$

Prova scritta 02/09/2010 - es. 1

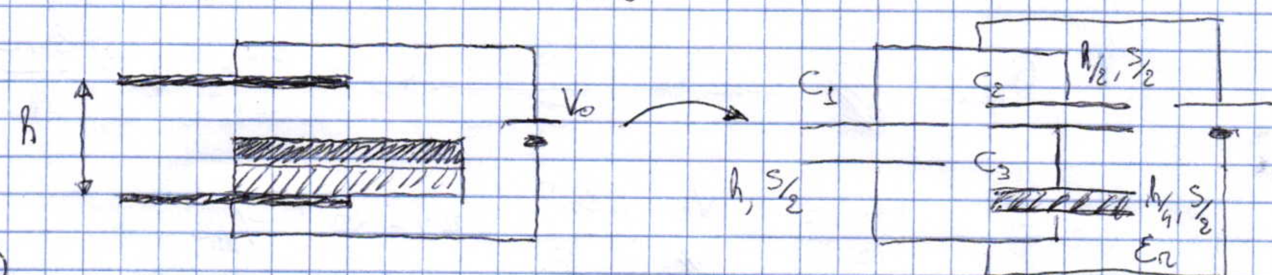
Un condensatore piano con armature quadrate di lato $L = 20.0$ cm distanti tra loro $h = 5.00$ mm è collegato ad un generatore di f.e.m. $V_0 = 300$ V. Due lastre quadrate di lato L unite tra loro una conduttrice ed una di materiale dielettrico di costante dielettrica relativa $\varepsilon_r = 1.50$ e ciascuna di spessore $h/4$, vengono introdotte tra le armature con i lati paralleli ad esse, fino a metà della superficie. Calcolare, trascurando gli effetti di bordo:

a) la capacità totale del sistema in questa configurazione;

b) il lavoro compiuto dal generatore durante l'introduzione del gruppo delle due lastre fino alla posizione descritta nel testo;

c) la densità di carica di polarizzazione presente sulle superfici del dielettrico comprese tra le armature;

d) la densità di carica presente sulle due facce della lastra conduttrice nella porzione inserita tra le armature, quando si è raggiunta la configurazione riportata in figura.



a)

$$C_1 = \varepsilon_0 \frac{L^2}{2h} \qquad C_2 = \varepsilon_0 \frac{L^2}{\cancel{2}}\frac{\cancel{2}}{h} \qquad C_3 = \varepsilon_0\varepsilon_r \frac{L^2}{\cancel{2}}\frac{4\cdot\cancel{2}}{h} = 2\varepsilon_0\varepsilon_r \frac{L^2}{h}$$

$$C_{tot} = C_1 + \frac{C_2 C_3}{C_2 + C_3} = \varepsilon_0 \frac{L^2}{h}\left(\frac{1}{2} + \frac{2\varepsilon_r}{1+2\varepsilon_r}\right) = 88.5 \text{ pF}$$

b)

$$\mathcal{L} = \int_{Q_{in}}^{Q_{fin}} \underbrace{V_0\, dQ}_{V_0\, dC} = V_0^2 (C_{fin} - C_{in}) = V_0^2 \frac{\varepsilon_0 L^2}{h}\left(\frac{1}{2} + \frac{2\varepsilon_r}{1+2\varepsilon_r} - 1\right) =$$

$$= 1.56 \cdot 10^{-6} \text{ J}$$

c) $\vec{P} = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\vec{E}$

$\rightarrow$ nel condensatore riempito di dielettrico (C_3):

$$|\vec{E}| = \frac{\Delta V_3}{h/4}$$

Dato lo schema delle connessioni, abbiamo:

$$\Delta V_2 + \Delta V_3 = V_0 \quad e \quad Q_2 = Q_3 \quad \text{(serie)}$$

$$\Rightarrow C_2 \Delta V_2 = C_3 \Delta V_3$$

$$\Delta V_2 = \frac{C_3}{C_2} \Delta V_3$$

$$V_0 = \left(1 + \frac{C_3}{C_2}\right) \Delta V_3$$

$$\Delta V_3 = \frac{V_0 C_2}{C_2 + C_3} = \frac{V_0}{1 + 2\varepsilon_r} = 75\,V$$

$$\Rightarrow |\sigma_p| = \varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1) \frac{\Delta V_3}{h/4} = 2.66 \cdot 10^{-7}\, C/m^2$$

d) Poiché i due condensatori sono in serie, la carica su ciascuno di essi è:

$$Q_{serie} = C_{serie} V_0 = \frac{C_2 C_3}{C_2 + C_3} V_0 = \frac{2\varepsilon_r}{1 + 2\varepsilon_r} V_0 \cdot \frac{\varepsilon_0 L^2}{h}$$

$$\sigma = \frac{Q_{serie}}{L^2/2} = \frac{V_0}{h} \frac{4\varepsilon_r \varepsilon_0}{1 + 2\varepsilon_r} = 7.97 \cdot 10^{-7}\, C/m^2$$

Equivalentemente con il T. di Coulomb:

$$E_2 = \frac{\Delta V_2}{h/2} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

$$\Delta V_2 = \frac{V_0 C_3}{C_2 + C_3} = V_0 \frac{2\varepsilon_r}{1 + 2\varepsilon_r}$$

$$\Rightarrow \sigma = \frac{V_0}{h} \frac{4\varepsilon_0 \varepsilon_r}{1 + 2\varepsilon_r}$$

o anche

$$D_3 = \sigma$$

$$\varepsilon_0 E_3 + \varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1) E_3 = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{\Delta V_3}{h/4} = \frac{V_0}{h} \frac{4\varepsilon_0 \varepsilon_r}{1 + 2\varepsilon_r}$$

I esonero 18/05/2012, es. 1

Un generatore ideale di tensione V_0 inizialmente carica un condensatore cilindrico al valore $Q_0 = 2\cdot10^{-8}C$. Le armature del condensatore hanno raggio $r_1 = 3\,mm$, $r_2 = 3.5\,mm$ e lunghezza $L = 50\,cm$. Successivamente si inserisce tra le armature una guaina omogenea di costante dielettrica relativa $\varepsilon_r = 4.5$ e spessore pari alla distanza tra le armature stesse. Si chiede di calcolare:

a) la densità di carica di polarizzazione nel volume e sulle superfici del dielettrico a contatto con il metallo, ad inserimento ultimato;

b) il lavoro totale speso dal generatore per mantenere costante la differenza di potenziale tra le due armature nell'intero processo di inserimento del dielettrico.

Si consideri ora il caso in cui l'inserimento avvenga con il generatore di tensione non connesso al condensatore e si derivi:

c) l'espressione dell'energia elettrostatica totale del condensatore in funzione della lunghezza x della porzione di guaina inserita;

d) l'espressione della forza agente sul dielettrico ed il suo valore massimo.

a) Per le cariche di polarizzazione occorre trovare $\vec{P}$:

$$\vec{P} = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\vec{E}$$

$$\longrightarrow \vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon_0\varepsilon_r}$$

Dal t. di Gauss per $\vec{D}$:

$$2\pi r L D = Q$$

$$D = \frac{Q}{2\pi L r} \quad \text{con } Q = C\cdot V_0 = \varepsilon_r C_0 V_0 = \varepsilon_r Q_0$$

$$\vec{P} = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}\,\frac{\varepsilon_r Q_0}{2\pi L r}\,\hat{r}$$

$$\rho_P = 0 \quad \text{perché} \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{P} \propto \vec{\nabla}\cdot\left(\frac{1}{r}\hat{r}\right) = 0$$

$$(\text{o anche } \vec{\nabla}\cdot\vec{D} = 0)$$

$$\sigma_p(r_1) = \underset{(+)}{-}(\varepsilon_r - 1)\frac{Q_0}{2\pi r_1 L} = \underset{(+)}{-} 7.43 \cdot 10^{-6}\, C/m^2$$

$$\sigma_p(r_2) = \underset{(-)}{+}(\varepsilon_r - 1)\frac{Q_0}{2\pi r_2 L} = \underset{(-)}{+} 6.35 \cdot 10^{-6}\, C/m^2$$

b)

$$L = \int_{Q_0}^{Q} V_0\, dQ = V_0^2 (C - C_0) = (\varepsilon_r - 1) C_0 V_0^2 = 7.76 \cdot 10^{-6}\, J$$

$$V_0 = \frac{Q_0}{C_0}$$

c) Nella seconda parte del problema, il processo avviene a carica costante (pari a Q_0).

Per una generica posizione x della guaina, il sistema ha capacità:

$$C = C_x + C_{\ell - x} = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln r_2/r_1}\left[\varepsilon_r x + (L - x)\right] = C_0\left[1 + (\varepsilon_r - 1)\frac{x}{L}\right]$$

$$\Longrightarrow U = \frac{1}{2}\frac{Q_0^2}{C} = \frac{Q_0^2}{2C_0}\,\frac{1}{1 + (\varepsilon_r - 1)x/L}$$

d)

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{dU}{dx} = +\frac{(\varepsilon_r - 1)Q_0^2}{2C_0 L}\,\frac{1}{\left[1 + (\varepsilon_r - 1)x/L\right]^2}$$

La forza (attrattiva perché $F_x > 0$) è monotona decrescente, con valore massimo in $x = 0$:

$$F_{max} = \frac{(\varepsilon_r - 1)Q_0^2}{2C_0 L} = 7.78 \cdot 10^{-6}\, N$$

I esonero 23/04/2010 - es. 1

Un dischetto sottile di raggio R, costituito di materiale isolante a densità di massa uniforme, possiede una densità di carica superficiale $\sigma = \sigma_0 \sin\varphi + \sigma_1$. Fissato il sistema di riferimento mostrato in figura, si calcolino

a) le componenti del momento di dipolo e la carica totale del dischetto.

Una carica puntiforme Q viene posta ora nel punto individuato dal vettore $\vec{r}_Q$ ($|\vec{r}_Q| \gg R$).
Nell'ipotesi che il dischetto sia vincolato nella sua posizione iniziale, si calcoli:

b) la forza dovuta al campo elettrico che si esercita fra il dischetto e la carica Q;

c) il momento meccanico dovuto al campo elettrico che agisce sul dischetto.

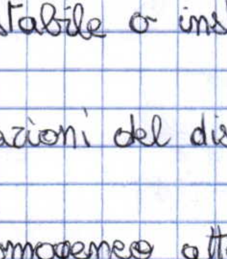
Sia ora fissato il centro di massa del dischetto nell'origine del sistema di riferimento, ma si lasci il disco libero di ruotare attorno all'asse z perpendicolare al disco stesso e passante per il suo centro. In questa nuova condizione,

d) si individuino le condizioni di equilibrio stabile o instabile del dischetto,

e) si calcoli la frequenza delle piccole oscillazioni del dischetto attorno alla posizione di equilibrio stabile.

(Si ricorda che il mom. d'inerzia di un disco omogeneo attorno al suo asse è $I = \frac{1}{2} m R^2$)

Dati: $R = 2\,mm$, $m = 0.2\,mg$, $\sigma_0 = 0.25\,\mu C\,cm^{-2}$, $\sigma_1 = 0.1\,\mu C\,cm^{-2}$,
$Q = 50\,nC$, $\vec{r}_Q = (0.5\,m, 0.8\,m, 0\,m)$



a)

$$\vec{p} = \int \sigma \vec{r}\, dS$$

$$p_x = \int_0^R \int_0^{2\pi} (\sigma_0 \sin\varphi + \sigma_1)\, r\cos\varphi \cdot r\, dr\, d\varphi = 0$$

$$p_y = \int_0^R \int_0^{2\pi} (\sigma_0 \sin\varphi + \sigma_1)\, r\sin\varphi\, r\, dr\, d\varphi =$$

$$= \pi\sigma_0 \cdot \frac{R^3}{3} = 20.9 \cdot 10^{-12}\, C\, m$$

$$q = \int_0^R \int_0^{2\pi} (\sigma_0 \sin\varphi + \sigma_1)\, r\, dr\, d\varphi = \pi \sigma_1 R^2 = 12.6 \cdot 10^{-9}\, C$$

b) La forza si ottiene sommando i contributi del termine di monopolo (la carica q) e di dipolo:

$$\vec{F}_{mono} = q \vec{E}_Q = - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{qQ}{r_Q^2} \hat{r}_Q$$

$$\vec{F}_{dip} = (\vec{p} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E}_Q$$

$$\vec{p} \cdot \vec{\nabla} \to p_y \frac{\partial}{\partial y} \qquad \vec{E}_Q \to \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{\left[(x-x_Q)^2 + (y-y_Q)^2 + (z-z_Q)^2\right]^{3/2}} \begin{pmatrix} x-x_Q \\ y-y_Q \\ z-z_Q \end{pmatrix}$$

$$\vec{F}_{dx} = - \frac{Q p_y}{4\pi\varepsilon_0} \frac{3 x_Q y_Q}{\underbrace{(x_Q^2 + y_Q^2)^{5/2}}_{r_Q^5}}$$

$$\vec{F}_{dy} = - \frac{Q p_y}{4\pi\varepsilon_0} \frac{3 y_Q^2 - r_Q^2}{r_Q^5}$$

$$\vec{F}_{dz} = 0$$

$$F_{tot,x} = F_{mono,x} + F_{dip,x} \simeq 3.4 \cdot 10^{-6} N$$

$$F_{tot,y} = \_\_\_ = 5.4 \cdot 10^{-6} N$$

c) $$\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E}_Q = \frac{p_y Q \sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r_Q^2} \hat{z}$$

d) Il dipolo è in equilibrio stabile (instabile) quando è orientato in direzione ~~anti~~ parallela (antiparallela) al campo E_Q ($\propto -\vec{r}_Q$)

$$\Rightarrow \vec{p} \,//\, \vec{r}_Q \quad \text{instabile}$$

$$\vec{p} \,//\, -\vec{r}_Q \quad \text{stabile}$$

e) Eq. del moto:

$$I \ddot{\theta} = \vec{p} \times \vec{E}_Q = (\text{per } \vec{p} \,//\, -\hat{r}) = \frac{p_y Q}{4\pi\varepsilon_0 r_Q^2} \cdot \sin(\pi - \theta) \simeq \frac{p_y Q}{4\pi\varepsilon_0 r_Q^2} \cdot (-\theta$$

$$\Rightarrow \omega_0 = \left(\frac{pQ}{4\pi\varepsilon_0 r_Q^2 \cdot \frac{1}{2} m R^2} \right) \to \nu_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = 26\, Hz$$