Corso di Elettromagnetismo

Prima prova di Esonero e prova scritta appello straordinario : a.a. 2015/16, 29 Aprile 2016

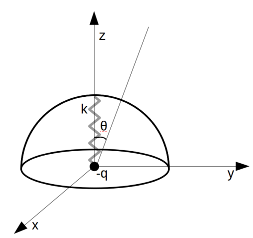
Proff. S. Giagu, F. Lacava, S. Rahatlou

- prova di esonero: risolvere i problemi 1, 2; tempo a disposizione 3h;
- intero scritto: risolvere i problemi 1, 2 e 3; tempo a disposizione 4h;

Esercizio 1

Un mezzo guscio sferico di raggio R= 10 cm e spessore trascurabile è inizialmente in un sistema cartesiano (x, y, z) con l'asse di simmetria lungo l'asse z, e possiede una densità di carica superficiale non uniforme data dall'espressione $\sigma(r, \phi, \theta)$=$\sigma_0 \cos(\theta)$, ove con θ si indica qui l'angolo polare rispetto all'asse di simmetria, mentre σ_0=3.2$\cdot$10^{-8} C/m^2. Esso è collegato tramite una molla isolante di lunghezza a riposo L_0= 15 cm, di massa e dimensioni trascurabili, ad una carica puntiforme $-q$ fissata nell'origine degli assi cartesiani, di carica uguale ed opposta alla carica totale presente sulla calotta sferica (q). Nella configurazione di equilibrio la molla tiene il guscio sferico in modo che la carica puntiforme cada al centro della sua base (come in figura). Calcolare:

a) il valore della carica puntiforme q posta nell'origine;
b) la costante elastica della molla;
c) il momento di dipolo del sistema descritto.



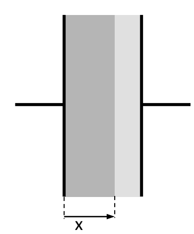
Si ponga ora una carica puntiforme q'=2q nel punto A di coordinate (0,2 m, 0) e si determini:

d) il momento delle forze agenti sul sistema calotta sferica + carica puntiforme collegati dalla molla;
e) la variazione di energia rispetto alla condizione iniziale quando il sistema calotta sferica + carica puntiforme raggiungono la configurazione di energia minima.

In questi ultimi due punti si consideri la molla bloccata nella configurazione trovata inizialmente, trascurando possibili elongazioni/compressioni dovute al campo della carica posta in A.

Esercizio 2

Tra le lastre di superficie S = 1.5 m^2 di un condensatore piano sono posti due dielettrici come in figura: il primo, di spessore a=5 cm, ha suscettività dielettrica $\chi_1 = \alpha x$, con α = 0.15 m^{-1} con x indicato in figura, il secondo, di spessore b=2 cm, χ_2 = 0.2. Sulle lastre del condensatore sono poste una carica 1.0 nC a sinistra e -1.0 nC a destra.



Si determinino:

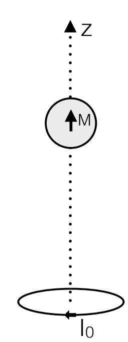
a) la d.d.p. tra le lastre;
b) la densità delle cariche di polarizzazione presenti, la carica di polarizzazione totale sul piano di separazione tra i due dielettrici;
c) la forza da applicare alla lastra a destra per allontanarla dal secondo dielettrico.

Esercizio 3

Una piccola sfera di raggio $r_0 = 1.0\,cm$ e massa M_0 è vincolata a muoversi su un asse verticale nel campo gravitazionale terrestre. A distanza $z = 1.0\,m \gg r_0$ sotto la sfera ed in asse con essa è fissata una spira di raggio $r_1 = 10.0\,cm \ll z$ e resistenza elettrica R. Connettendo la spira ad un generatore di tensione si fa circolare in essa una corrente $I_0 = 1\,A$ in verso orario.

Si scriva l'energia potenziale d'interazione tra la sfera e la spira e si dica se la sfera può rimanere in equilibrio sopra la spira nel campo di gravità terrestre (calcolando, qualora tale posizione esista, il valore della massa M_0), nelle due situazioni seguenti:

a) la sfera ha polarizzazione magnetica $\vec{M}$ costante nella direzione parallela all'asse;
b) la sfera ha una permeabilità magnetica μ_r.



Se la spira viene disconnessa dal generatore e la sfera con magnetizzazione costante $\vec{M}$ viene lasciata cadere:

c) calcolare in funzione della posizione z e della velocità di caduta v_z della sfera l'espressione della corrente indotta nella spira, trascurando il coefficiente di autoinduzione.

Soluzione Esercizio 1

a)

$$q = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\phi=0}^{\pi/2} \sigma_0 \cos\phi R^2 \sin\phi \; d\theta d\phi = \sigma_0 R^2 \pi = \; 1.0\, nC$$

la carica nell'orgine è pari a $-q$.

b)

$$F_z = \frac{\sigma_0 q}{6\epsilon_0} = \frac{\sigma_0^2 R^2 \pi}{6\epsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \frac{\sigma_0^2 R^2 \pi}{6\epsilon_0} = k\Delta x \quad \Rightarrow \quad k = \frac{\sigma_0^2 R^2 \pi}{6\Delta x \epsilon_0} = 1.2\; 10^{-5}\; N/m$$

c)

$$\vec{P} = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\phi=0}^{\pi/2} \sigma_0 \cos\phi R^2 \sin\phi \cos\phi \; R d\theta d\phi \, \hat{z} = \frac{2}{3}\pi\sigma_0 R^3 \, \hat{z}$$

d)

$$M = \vec{p} \times \vec{E} = \frac{2}{3}\pi\sigma_0 R^3 \cdot \frac{2Q}{4\pi\epsilon_0 z^2}\hat{x} = \frac{\sigma_0^2 R^5 \pi}{3\epsilon_0 z^2}\hat{x}$$

e) La configurazione iniziale ha energia elettrostatica nulla e la configurazione di minima energia è quella in cui il momento di dipolo è orientato nel verso del campo elettrico, quindi con $\vec{P}$ nel verso negativo dell'asse y. In quella configurazione:

$$U = -\vec{P} \cdot \vec{E} = -\frac{2}{3}\pi\sigma_0 R^3 \cdot \frac{2Q}{4\pi\epsilon_0 z^2} = \frac{\sigma_0^2 R^5 \pi}{3\epsilon_0 z^2} \quad \Rightarrow \quad \Delta U = U_f - U_i = -\frac{\sigma_0^2 R^5 \pi}{3\epsilon_0 z^2}$$

Soluzione Esercizio 2

a) Il campo D tra le lastre è pari a $D = \sigma = Q/S$, quindi i campi nei due dielettrici sono:

$$E_1(x) = \frac{D}{\epsilon_0(\chi_1 + 1)} = \frac{D}{\epsilon_0(\alpha x + 1)} \qquad E_2 = \frac{D}{\epsilon_0(\chi_2 + 1)}$$

La d.d.p. applicata a ciascun dielettrico è:

$$V_1 - V_2 = \int_0^a \frac{D}{\epsilon_0(\alpha x + 1)} dx = \frac{D}{\epsilon_0}\frac{1}{\alpha}\log(\alpha a + 1)$$

$$V_2 - V_3 = \frac{D}{\epsilon_0(\chi_2 + 1)} b$$

$$V_1 - V_3 = \frac{D}{\epsilon_0}\left[\frac{1}{\alpha}\log(\alpha a + 1) + \frac{b}{(\chi_2 + 1)}\right] =$$

b) Nel primo dielettrico:

$$P_1(x) = \epsilon_0 \chi_1 E_1 = \frac{\alpha x}{(\alpha x + 1)} D$$

$$\rho_{p1}(x) = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}_1 = -\frac{\partial P_{1x}}{\partial x} = -\frac{\alpha}{(\alpha x + 1)^2} D < 0$$

$$\sigma_{p1}(x = 0) = \vec{P}_1 \cdot \hat{n}_e = 0 \qquad \sigma_{p1}(x = a) = \vec{P}_1 \cdot \hat{n}_e = \frac{\alpha a}{\alpha a + 1} D = 5.0\, 10^{-12}\, C/m^2$$

Nel secondo:

$$P_2 = \epsilon_0 \chi_2 E_2 = \frac{\chi_2}{\chi_2 + 1} D$$

$$\rho_{p2}(x) = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}_2 = -\frac{\partial P_{2x}}{\partial x} = 0$$

$$\sigma_{p2}(x = a) = \vec{P}_2 \cdot \hat{n}_e = -\frac{\chi_2}{\chi_2 + 1} D \qquad \sigma_{p2}(x = a + b) = \vec{P}_2 \cdot \hat{n}_e = \frac{\chi_2}{\chi_2 + 1} D = 1.1\, 10^{-10}\, C/m^2$$

Sullo superficie di separazione:

$$Q_P^{Tot}(x=a) = S\sigma_{Tot}(x=a) = S\left[\frac{\alpha a}{\alpha a+1} - \frac{\chi_2}{\chi_2+1}\right] D = -1.6\,10^{-10}\,C$$

c) Spostando la lastra a destra abbiamo uno spessore d'aria y. Possiamo pensare il tutto come tre condensatori in serie di capacità:

$$C_1 = \frac{Q}{V_1 - V_2} = \frac{S\epsilon_0\alpha}{\log(\alpha a+1)}$$

$$C_2 = \frac{S\epsilon_0(\chi_2+1)}{b} \qquad\qquad C_3 = \frac{S\epsilon_0}{y}$$

L'energia elettrostatica è:

$$U(y) = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}Q^2\left[\frac{\log(\alpha a+1)}{S\epsilon_0\alpha} + \frac{b}{S\epsilon_0(\chi_2+1)} + \frac{y}{S\epsilon_0}\right]$$

e la forza elettrostatica sulla lastra:

$$F_{es} = -\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{1}{2}\frac{Q^2}{S\epsilon_0} \qquad\qquad F_{appl.} = -F_{es} = 3.8\,10^{-8}\,N$$

Soluzione Esercizio 3

a)

A grande distanza dalla sfera il campo di induzione magnetica generato dalla spira è quello di un dipolo magnetico di momento:

$$\vec{m} = -\pi r_1^2 I_0 \hat{z}.$$

Avremo quindi nei punti dell'asse z:

$$\vec{B}(z) = -\frac{\mu_0 m}{2\pi z^3}\hat{z}.$$

Considerando il campo uniforme sulla sfera l'energia potenziale è data da: $U = -\vec{m}_s \cdot \vec{B}(z)$ in cui con $\vec{m}_s$ si è indicato il momento magnetico della sfera dato da: $\vec{m}_s = \vec{M}4/3\pi r_0^3$, per cui:

$$U = \frac{2\pi\mu_0 r_0^3 r_1^2 I_0 M}{3z^3}.$$

La forza magnetica è data da:

$$F_z = -\frac{dU}{dz} = \frac{2\mu_0\pi r_0^3 r_1^2 I_0 M}{z^4} > 0;$$

quindi repulsiva. Si ha equilibrio quando $F_z = M_0 g \Rightarrow M_0 = F_z/g$.

b)

In questo caso la sfera si magnetizzerà per la presenza del campo $B(z)$ dovuto alla spira. Il vettore polarizzazione magnetica sarà:

$$\vec{M} = \frac{\mu_r - 1}{\mu_0\mu_r}\vec{B}(z);$$

diretto in verso concorde al momento magnetico della spira. Considerando il campo uniforme sulla sfera l'energia potenziale è data da: $U = -\vec{m}_s \cdot \vec{B}(z)$, avremo:

$$U = -\frac{\mu_r - 1}{\mu_r}\frac{\mu_0\pi r_1^4 r_0^3 I_0^2}{3z^6}.$$

La forza magnetica è data da:

$$F_z = -\frac{dU}{dz} = -\frac{\mu_r - 1}{\mu_r}\frac{3\mu_0\pi r_1^4 r_0^3 I_0^2}{z^7} < 0;$$

quindi attrattiva. In questo caso non c'è posizione di equilibrio della sfera al di sopra della spira.

c)

La sfera genera un campo di induzione magnetica variabile nel tempo che si concatena con la spira:

$$\vec{B}_s(z) = \frac{\mu_0\vec{m}_s}{2\pi z^3};$$

in cui $\vec{m}_s = \vec{M} 4/3\pi r_0^3$.
Il flusso concatenato con la spira è dato da:

$$\Phi(B_s) = \pi r_1^2 B_s(z) = \frac{2\mu_0 \pi r_0^3 r_1^2 M}{3z^3};$$

e la forza elettromotrice indotta:

$$f_i = -\frac{d\Phi}{dt} = \frac{2\mu_0 \pi r_0^3 r_1^2 M}{z^4}\frac{dz}{dt} = \frac{2\mu_0 \pi r_0^3 r_1^2 M v_z}{z^4} I_i = f_i/R = \frac{2\mu_0 \pi r_0^3 r_1^2 M v_z}{R z^4}.$$

avendo indicato con $v_z = dz/dt$.