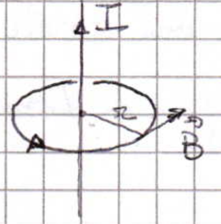
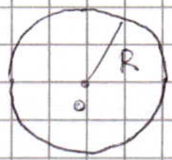
Applicazioni del t. di A.:

- Filo rettilineo indefinito percorso da corrente:



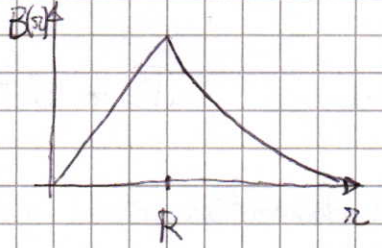
$$2\pi r \cdot B(r) = \mu_0 I \implies B(r) = \mu_0 \frac{I}{2\pi r}$$

- Filo di sezione non trascurabile, percorso da corrente:

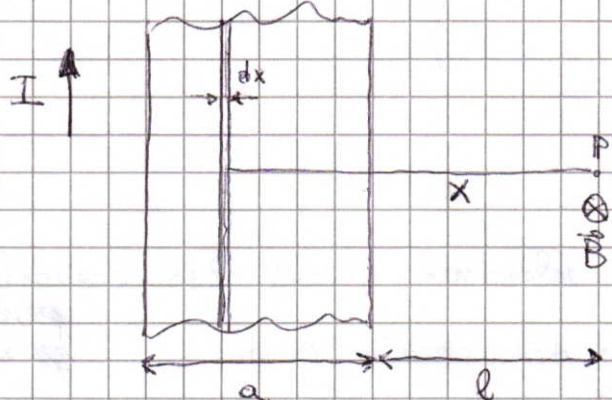


$$J = \frac{I}{\pi R^2}$$

$$B(r) = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I(r)}{r} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{J\cdot\pi r^2}{r} = \begin{cases} r<R: & \dfrac{\mu_0}{2\pi}\dfrac{I r}{R^2} \\ r \geq R: & \dfrac{\mu_0}{2\pi}\dfrac{I}{r} \end{cases}$$



- Nastro (o lamina) di materiale conduttore, infinitam. lungo, percorsa da corrente stazionaria I.



Decomponiamo la striscia in elementi di larghezza dx percorsi dalla corrente:

$$di = \frac{I}{a}dx$$

Ciascuno contribuirà al campo:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi x} di \cdot \hat{z} \times \hat{x} \quad \text{(entrante)}$$

$$\implies B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}\int_{l}^{l+a}\frac{1}{x}dx = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}\ln\left(1+\frac{a}{l}\right)$$

per $\frac{a}{l} \ll 1$, svil. al I ordine $\ln\left(1+\frac{a}{l}\right) \simeq \frac{a}{l} \implies \frac{\mu_0 I}{2\pi a}\frac{a}{l} = \frac{\mu_0 I}{2\pi l}$ come un filo.

Prova d'esame 20/09/91 (es. 2)

Un disco isolante di spessore trascurabile e raggio $R = 18.6$ cm ruota con $\vec{\omega}$ costante attorno all'asse ad esso perpendicolare e passante per il suo centro.

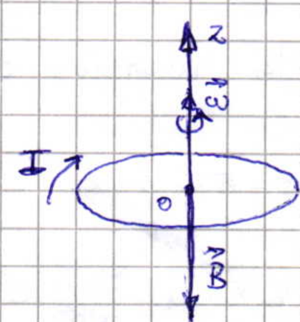
Sia $\omega = 9.15$ rad/s, $\hat{\omega} = \hat{z}$. Sul disco è uniformemente distribuita la carica di $3.08 \cdot 10^{16} e^-$.

Calcolare:

a) La componente B_z del campo di induzione magnetica in O e in un punto P a distanza $d = 8.25$ cm lungo l'asse;

b) Le componenti del momento della coppia che permette di tenere $\hat{\omega}$ costante quando il disco è immerso in un campo $\vec{B}'$ esterno uniforme e di modulo 0.748 T formante gli angoli $\pi/2$ e $\pi/6$ rispettivam. con gli assi x e y.

Suggerimento: $\displaystyle\int \frac{r^3\,dr}{(r^2+z^2)^{3/2}} = \frac{r^2+2z^2}{(r^2+z^2)^{1/2}} + \text{cost}$



$Q = -1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 3.08 \cdot 10^{16} = -4.93 \cdot 10^{-3}$ C

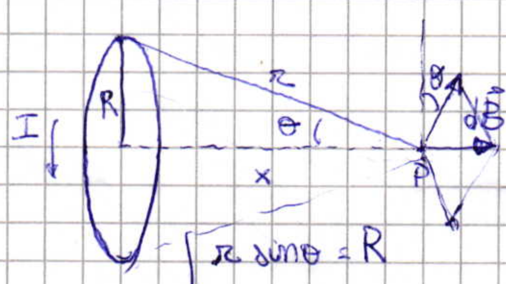
La carica tra r e $r + dr$ è

$$dq = \frac{Q}{\pi R^2} \cdot 2\pi r\,dr = \frac{2Qr}{R^2}\,dr$$

Quindi la corona circolare di raggio interno r e spessore dr rotante è assimilabile a una spira circolare percorsa dalla corrente:

$$di = \frac{dq}{T} = dq \cdot \frac{\omega}{2\pi} = \frac{Q\omega r}{\pi R^2}\,dr$$

Digressione: campo $\vec{B}$ sull'asse di una spira percorsa da corrente.



(mostrare il verso con la regola della mano dx applicata a $I\,d\vec{l} \times \vec{r}$)

$$\begin{cases} r \sin\theta = R \\ x^2 + R^2 = r^2 \end{cases}$$

$$B_z = \int_{spira} dB \sin\theta = \frac{\mu_0 i}{4\pi r^2} \sin\theta \int_{spira} dl =$$

$$= \frac{\mu_0 i}{2\cancel{4\pi} r^2} \sin\theta\, \cancel{2\pi} R = \frac{\mu_0 i}{2} \frac{R^2}{(x^2+R^2)^{3/2}}$$

Quindi, facendo attenzione al segno rispetto al riferimento fissato, la spira percorsa dalla corrente di contribuisce al campo con

$$dB_z = \frac{\mu_0}{2} \frac{r^2}{(r^2+d^2)^{3/2}} di$$

$$\Longrightarrow \quad B_z(z) = \frac{\mu_0}{2} \frac{Q\omega}{\pi R^2} \int_0^R \frac{r^3 dr}{(r^2+z^2)^{3/2}} = \text{(usando il suggerimento)}$$

$$= \frac{\mu_0 Q\omega}{2\pi R^2} \left[\frac{R^2+2z^2}{(R^2+z^2)^{1/2}} - 2|z| \right] \quad \text{(ricordare che } Q<0\text{)}$$

$$B_z(z=0) = \frac{\mu_0 Q\omega}{2\pi R} = -4.85 \cdot 10^{-8}\,T$$

$$B_z(z=d) = -1.88 \cdot 10^{-8}\,T$$

Il momento magnetico del disco è:

$$d\vec{m} = \pi r^2 di\, \hat{z}$$

$$\vec{m} = \cancel{\pi}\hat{z} \int_0^R \frac{Q\omega}{\cancel{\pi} R^2} r^3 dr = \frac{1}{4} Q\omega R^2 \hat{z} \quad \text{(antiparallelo a } \hat{z} \text{ perché } Q<0\text{)}$$

$$\vec{m} = \left(0, 0, \frac{1}{4} Q\omega R^2\right)$$

Il momento meccanico è $\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B}'$, perciò per tenere il disco in rotazione sullo stesso asse occorre applicare una coppia di momento $\vec{M}' = -\vec{M}$

$$M'_x = -(\cancel{m_y B'_z} - m_z B'_y) = m_z B'_y = \frac{1}{4} Q\omega R^2 \cdot B' \cos\pi/6 = -2.53 \cdot 10^{-4}\,Nm$$

$$M'_y = -(\cancel{m_z B'_x} - \cancel{m_x B'_z}) = 0$$

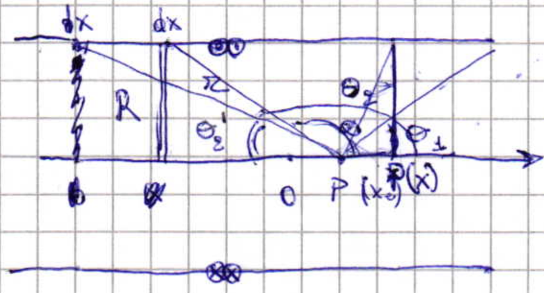
$$M'_z = -(\cancel{m_x B'_y} - \cancel{m_y B'_x}) = 0$$

$\boxed{NV\ 5.27}$

Un avvolgimento di $N = 5\cdot 10^3$ spire è disposto sulla superficie di un cilindro retto, lungo $d = 50\,cm$ e di raggio $R = 5\,cm$, costituendo quello che si chiama un solenoide rettilineo. Esso è percorso dalla corrente $i = 2A$.

Dare l'espressione del campo magnetico nei punti dell'asse del sistema ed estendere il risultato al caso in cui d tenda all'infinito.

(ci sono domande sull'induttanza e l'energia magnetica che per ora salto).



def. $n = \frac{N}{d}$

Il contributo al campo dalle spire di un tratto di lunghezza dx è

$$dB = \frac{\mu_0 R^2}{2r^3}\cdot n i dx$$

$r \sin\theta = R \rightarrow r = \frac{R}{\sin\theta}$

$$B = \int_{-d/2}^{d/2} \frac{\mu_0 R^2}{2r^3}\, n i dx$$

$R = (x_0 - x)\,tg(\pi-\theta) = (x-x_0)\,tg\theta$

$\Rightarrow (x-x_0) = R\,cotg\theta \rightarrow dx = -\frac{R}{\sin^2\theta}d\theta$

$$\Rightarrow B = \frac{\mu_0 i R^2 n}{2}\int_{\theta_2}^{\theta_1} \frac{\sin^3\theta}{R^3}\cdot\left(-\frac{R}{\sin^2\theta}\right)d\theta =$$

$$= \frac{\mu_0 i n}{2}\int_{\theta_2}^{\theta_1}(-\sin\theta)d\theta = \frac{\mu_0 i n}{2}(\cos\theta_1 - \cos\theta_2) = \frac{\mu_0 i n}{2}(\cos\theta_1 + \cos\theta_2')$$

$$= \frac{\mu_0 i n}{2}\left[\frac{\frac{d}{2}-x_0}{\left[\left(\frac{d}{2}-x_0\right)^2+R^2\right]^{1/2}} + \frac{\frac{d}{2}+x_0}{\left[\left(\frac{d}{2}+x_0\right)^2+R^2\right]^{1/2}}\right]$$

Nel centro, $x_0 = 0 \Rightarrow B = \mu_0 n i \frac{d}{(d^2+4R^2)^{1/2}}$

per $d \to \infty$, $B \to \mu_0 n i$ come ricavabile da considerazioni di simmetria + teorema di Ampere.