$\boxed{\text{NV } 5.39}$

Una sfera conduttrice di raggio $R = 10\,cm$ e massa $m = 10\,Kg$, carica con $q = 10^{-6}\,C$, ruota con velocità angolare $\omega = 10^3\,rad/s$ attorno a un suo diametro.

Calcolare il valore del campo magnetico nel centro, il momento magnetico e il rapporto giromagnetico della sfera.

Se questa viene immersa in un campo magnetico uniforme, di modulo $B' = 3T$, calcolare la velocità angolare di precessione.

$$d\Sigma = 2\pi (R \sin\theta) \cdot R\, d\theta$$

area della striscia di spess. $R\,d\theta$ che contiene la carica dq, che, ruotando, origina una corrente di.

$$\downarrow$$

$$dq = \sigma\, d\Sigma \quad , \quad \sigma = \frac{q}{4\pi R^2}$$

$$di = \frac{dq}{T} = \frac{\omega}{\cancel{2\pi}} \cdot \sigma \cdot \cancel{2\pi} R^2 \sin\theta\, d\theta$$

Ricordiamo che il campo di una spira in un punto distante h dal centro e giacente lungo l'asse vale

$$B_{spira} = \frac{\mu_0}{2}\, i_{spira} \frac{r^2_{spira}}{(h^2 + r^2_{spira})^{3/2}}$$

cioè calcolando il campo nel punto che coincide con il centro della sfera

Per cui, specializzando questa espressione al nostro caso, abbiamo:

$$dB = \frac{\mu_0}{2}\, di \cdot \frac{(R\sin\theta)^2}{(R^2\cos^2\theta + R^2\sin^2\theta)^{3/2}} = \frac{\mu_0}{2}\, \omega\, \sigma R^2 \sin\theta\, \frac{\sin^2\theta}{R}\, d\theta =$$

$$R^3$$

$$= \frac{1}{2}\mu_0 \omega \sigma R \sin^3\theta\, d\theta$$

$$\Rightarrow \quad B = \frac{1}{2}\mu_0 \omega \sigma R \int_0^\pi \sin^3\theta\, d\theta$$

$$\int_0^\pi (1 - \cos^2\theta) \sin\theta\, d\theta = 2 + \frac{1}{3}\cos^3\theta \Big|_1^{-1} = \frac{4}{3}$$

$$\rightarrow B = \frac{2}{3}\mu_0 \omega \sigma R =$$

$$= 6.67 \cdot 10^{-10}\,T$$

In modo analogo calcoliamo il momento magnetico: ad ogni spira percorsa dalla corrente di, è associato un momento magnetico

$$d\vec{m} = di \cdot \pi (R \sin\theta)^2 \, \hat{\omega}$$

la carica è positiva, dunque il verso della corrente generata dalla rotazione rende $d\vec{m} \parallel \hat{\omega}$.

$$dm = \omega \sigma R^2 \sin\theta \, d\theta \cdot \pi R^2 \sin^2\theta = \omega \sigma \pi R^4 \sin^3\theta \, d\theta$$

$$m = \omega \sigma \pi R^4 \int_0^{\pi} \sin^3\theta \, d\theta = \frac{4}{3} \omega \sigma \pi R^4 = 3.33 \cdot 10^{-6} \, A \cdot m^2$$

Il rapporto giromagnetico è il rapporto tra il momento magnetico m e il momento angolare L della sfera:

$$L = I_{sfera} \omega = \frac{2}{5} M R^2 \omega$$

$$m = \frac{4}{3} \omega \frac{q}{4\pi R^2} \pi R^4 = \frac{1}{3} q R^2 \omega$$

$$\Rightarrow G = \frac{5}{3} \frac{q}{2M} = 8.33 \cdot 10^{-8} \frac{C}{kg}$$

$$\omega_p = G \cdot B' = 0.25 \cdot 10^{-6} \frac{rad}{s}$$

(piccola, perché in oggetti macroscopici il rapporto tra carica e massa è molto svantaggioso)

$\boxed{\text{NV 5.40}}$

Ripetere il calcolo nel caso di una sfera con carica q distribuita uniformemente su tutto il volume.

Questa volta la spira elementare sarà un elemento di volume percorso dalla corrente originata dalla carica dq che circola con un periodo T:

$$d\tau = r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \, dr \rightarrow dq = \rho \, d\tau \rightarrow di = \frac{dq}{T} = \frac{\omega}{2\pi} dq = \frac{\omega}{2\pi} \rho \, d\tau$$

La spira ha raggio $r \sin\theta$, con r variabile.

$$\Rightarrow di = \frac{\omega}{2\pi} \rho \, r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \, dr$$

Nel centro della sfera il contributo è:

$$dB = \mu_0 \, di \frac{r^2 \sin^2\theta}{2 r^3} = \frac{\mu_0 \omega \rho}{4\pi} r \, dr \, d\varphi \sin^3\theta \, d\theta$$

$$\Rightarrow B = \frac{\mu_0 \omega \rho}{4\pi} \underbrace{\int_0^R r\,dr}_{\frac{1}{2}R^2} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{2\pi} \underbrace{\int_0^{\pi} \sin^3\theta\, d\theta}_{4/3} = \frac{1}{3}\mu_0 \omega \rho R^2 = 10^{-9}\,T$$

Per il momento magnetico:

$$dm = di \cdot \Sigma' = \frac{\omega}{2\pi}\rho r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi\, dr \cdot \pi r^2 \sin^2\theta =$$

$$= \frac{\omega}{2}\rho\, r^4 \sin^3\theta\, d\theta\, d\varphi\, dr$$

$$m = \frac{\omega\rho}{2} \underbrace{\int_0^R r^4\,dr}_{\frac{1}{5}R^5} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{2\pi} \underbrace{\int_0^{\pi} \sin^3\theta\, d\theta}_{4/3} = \frac{4\pi\omega\rho}{15} R^5 = 2\cdot 10^{-5}\,A m^2$$

$$L = I_{sfera}\,\omega = \frac{2}{5} M R^2 \omega$$

$m = \frac{1}{5}\omega R^2 q$ (giustamente, minore del caso con q sulla superficie)

$$\Rightarrow G = \frac{q}{2M} = 5\cdot 10^{-8}\,\frac{C}{Kg}$$

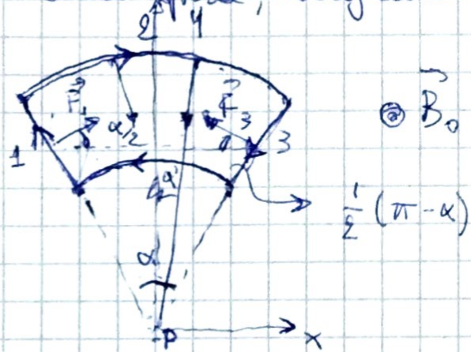
$$\omega_p = GB' = 0.15\cdot 10^{-5}\,rad/s$$

Esame 18/03/2004 - Es. 2

Una spira indeformabile percorsa in verso orario da una corrente $i = 15A$ è sagomata come in figura. I tratti curvi sono archi di circonferenza di raggi $a = 12\,cm$ e $b = 8.0\,cm$ e ampiezza angolare $\alpha = 60°$

a) Determinare mod. dir. e verso del campo $\vec{B}$ nel punto coincidente con il centro degli archi di circonferenza.

b) Se la spira è immersa in un campo esterno $B_0 = 0.35T$ diretto ortogonalmente al piano del foglio, con verso uscente da questo, determinare mod. dir. e verso della forza agente su ciascun ramo della spira, verificando che la forza totale è nulla.



$\frac{1}{2}(\pi - \alpha) = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} \Rightarrow$ l'angolo tra $\vec{F}_1$ e l'orizzontale è $\alpha/2$

a) $\vec{B}_1(P) = \vec{B}_3(P) = 0$ perché $i\,d\hat{\ell} \parallel \vec{r}$ lungo i due tratti rettilinei.

Per i tratti 2 e 4, ricordando che nel centro di una spira circolare il campo vale

$$\frac{\mu_0 i}{2} \cdot \frac{1}{R}$$

E' sufficiente notare che il contributo dei due archi, essendo $\alpha = 60°$, sarà $1/6$ di quello delle corrispondenti spire (di raggi a e b):

$$\vec{B}_2 = -\frac{\mu_0 i}{12a}\hat{z} \quad , \quad \vec{B}_4 = \frac{\mu_0 i}{12b}\hat{z}$$

$$\Rightarrow \vec{B}(P) = \frac{\mu_0 i}{12}\underbrace{\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right)}_{>0 \Rightarrow \text{uscente}}\hat{z} \quad , \quad |\vec{B}(P)| = 6.5 \cdot 10^{-6}\,T$$

b)

$$d\vec{F}_1 = i\,d\vec{\ell} \times \vec{B}_0 \rightarrow |\vec{F}_1| = i(a-b)B_0 = 0.21N$$ (per direz. e verso v. figura)

$$\Updownarrow$$

$$|\vec{F}_3|$$

$$\Rightarrow \vec{F}_1 + \vec{F}_3 = i(a-b)B_0 \sin\frac{\alpha}{2} \cdot 2$$

Su ciascun arco la componente infinitesima $i\,d\vec{\ell} \times \vec{B}_0$ è diretta radialmente. Perciò integrandola rimane solo la componente lungo $\hat{y}$.

$$d\vec{F}_2 = i B_0 a \, d\alpha' \cos\alpha' \cdot 2(-\hat{y})$$

$$\vec{F}_2 = -\hat{y}\int_0^{\alpha/2} i B_0 a \cos\alpha' \, d\alpha' \cdot 2 = -2 i B_0 a \sin\frac{\alpha}{2}\,\hat{y} \quad , |\vec{F}_2| = 0.63\,N$$

Analogamente,

$$\vec{F}_4 = +2 i B_0 b \sin\frac{\alpha}{2}\,\hat{y} \quad , |\vec{F}_4| = 0.42\,N$$

$$\Rightarrow \vec{F}_2 + \vec{F}_4 = 2 i B_0 \sin\frac{\alpha}{2}(b-a)\,\hat{y}$$

$\Rightarrow \vec{F}_{tot} = \vec{0}$ come prevedibile perchè l'energia potenziale $\vec{m}\cdot\vec{B}_0$ è costante, essendo $\vec{B}_0$ uniforme.