Esonero 22/03/2003 - Es. 2

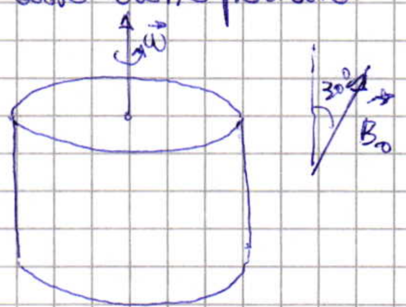
Sulla superficie laterale di un cilindro isolante di massa $m_c = 10\,g$ e di raggio $r = 1\,cm$ è uniformem. distribuita una carica $q = 2 \cdot 10^{-6}\,C$.

Il cilindro ruota con velocità angolare $\omega = 1000$ giri/s

a) Si determini il momento di dipolo magnetico del cilindro;

b) Si descriva il moto seguito dal cilindro rotante se esso è posto in un campo $B_0 = 3\,T$ con angolo di 30° rispetto all'asse.

c) infine si determini la variazione di energia del cilindro rotante se mediante opportuna interazione il suo asse viene portato a un angolo di 150° con il campo $\vec{B}_0$.



a) elemento di superficie:

$$dS = r\,d\varphi\,dl \rightarrow dq = \sigma r\,d\varphi\,dl$$

$$di = \frac{dq}{dt} = \sigma r\,dl \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \sigma \omega r\,dl$$

$$d\vec{m} = \sigma \vec{\omega} r\,dl \cdot \pi r^2$$

$$\vec{m} = \sigma \vec{\omega} r\, \pi r^2\, l \cdot \frac{2\pi}{2\pi} = \frac{1}{2} q \vec{\omega} r^2 \quad \left(= \underbrace{\frac{q}{m_c}}_{G} \cdot I\vec{\omega} \right)$$

$$|\vec{m}| = 6.28 \cdot 10^{-7}\ A\,m^2$$

b) $\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B}_0$

$$I \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{m} \times \vec{B}_0 = \frac{q r^2}{2} \vec{\omega} \times \vec{B}_0 = - \frac{q r^2}{2} \vec{B}_0 \times \vec{\omega}$$

$\Rightarrow$ $\vec{\omega}$ segue un moto di precessione ruotando con vel. ang.

$$\vec{\Omega} = - \frac{q r^2}{2I} \vec{B}_0 = - \frac{q}{m_c} \vec{B}_0$$

c) $U = - \vec{m} \cdot \vec{B}_0$

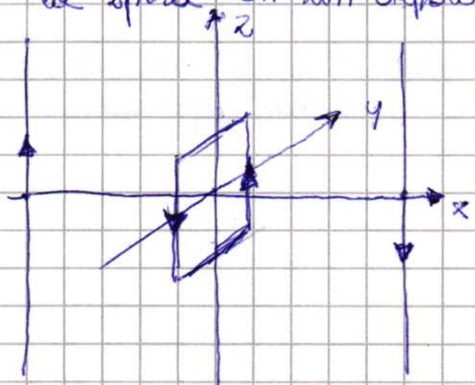
$$\Rightarrow \Delta U = - m B_0 \cos \frac{5}{6}\pi + m B_0 \cos \frac{\pi}{6} = 3.36 \cdot 10^{-6}\,J$$

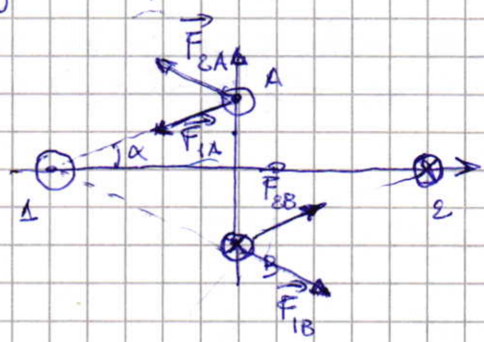
II esonero 22/03/2003 - Es. 1

Due fili infinitam. lunghi e paralleli all'asse z, passanti per i punti (-50 cm, 0 cm, 0 cm) e (50 cm, 0 cm, 0 cm) sono percorsi da corrente ~~if~~ 10 A in versi opposti. Nel piano x = 0, centrata rispetto all'origine, si trova una spira quadrata di lato 20 cm e con due lati opposti paralleli all'asse z.

a) Si determini il momento cui è sottoposta la spira quando è percorsa dalla corrente di 5 A come in figura;

b) si confronti il risultato con il momento previsto approssimando la spira con un dipolo magnetico posizionato nell'origine.





Dalla legge di B-S:

$$B_0 = \frac{\mu_0 i_f}{2\pi r} \rightarrow F_{1A} = i_s l B_0 = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i_f i_s}{r_{1A}} l$$

$\vec{F}_{2A}$ ha ugual modulo ma è repulsiva (versi discordi)

Perciò la somma è perp. al piano yz, diretta lungo le x negative, e in modulo vale:

$$|\vec{F}_{1A} + \vec{F}_{2A}| = \frac{\mu_0 i_f i_s}{\cancel{2}\pi r_{1A}} l \cos\alpha \cdot \cancel{2}$$

Sul segmento B vale lo stesso, ma la risultante è verso le x positive

Sui tratti di spira paralleli al piano xy i contributi infinitesimi sono opposti ~~[illegible]~~ a due a due, quindi la forza risultante è nulla.

$$\Rightarrow \vec{M}_{tot} = |\vec{F}_A| \cdot l \,\hat{z} = \underbrace{\frac{\mu_0}{\pi} \frac{i_f i_s l^2}{r_{1A}} \cos\alpha}_{1.54 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{N\,m}} \,\hat{z}$$

b) approssimando la spira come un dipolo magnetico nell'origine:

$$\vec{m} = i_s \cdot l^2 \, \hat{x}$$

$$\vec{B}_0 = \frac{\mu_0 i_g}{\cancel{2}\pi \, r_{1A}} \, \hat{y} \, \cancel{\cdot 2}$$

$$\Rightarrow \vec{M} = \vec{m} \times \vec{B}_0 = \frac{\mu_0}{\pi} \, \frac{i_s i_g \, l^2}{r_{1A}} \, \hat{z}$$

Per dimensioni della spira piccole rispetto alla distanza dei fili, si ha $l \ll r_{1A} \Rightarrow \alpha \to 0 \Leftrightarrow \cos\alpha \to 1$ e le due espressioni coincidono.

Esonero 10/05/2013 - es. 2

Un fascio è costituito da protoni ($m_p = 1.67 \cdot 10^{-24}$ g , $e = +1.60 \cdot 10^{-19}$ C), tutti in moto rettilineo uniforme con la stessa velocità $\vec{v}$ supposta costante.
Il fascio ha sezione circolare di raggio $R = 5$ cm e densità n uniforme.

a) Si ricavino le espressioni del campo elettrico e del campo magnetico prodotti dal fascio, in funzione della densità n, della velocità v e della distanza r dall'asse del fascio.

b) Si determini il valore della corrente trasportata dal fascio, se il rapporto fra i moduli dei campi elettrico e magnetico vale $E_0/B_0 = 1.5 \cdot 10^{10}$ m/s e il campo elettrico, alla distanza $r^* = 3.0$ cm dall'asse, ha modulo $E_0^* = E(r^*) = 2.75 \cdot 10^6$ V/m.

a) t. di Gauss su sup. cilindrica coassiale al fascio:

$r < R$ $\quad 2\cancel{\pi}\cancel{r}\cancel{\ell}\, E(r) = \dfrac{n e \cancel{\pi} r^{\cancel{2}} \cancel{\ell}}{\varepsilon_0}$

$$\Rightarrow E(r) = \frac{ne}{2\varepsilon_0} r$$

$r > R$ $\quad 2\cancel{\pi} r \cancel{\ell}\, E(r) = \dfrac{n e \cancel{\pi} R^2 \cancel{\ell}}{\varepsilon_0}$

$$\Rightarrow E(r) = \frac{neR^2}{2\varepsilon_0 r}$$

$\left(\vec{E}(r) = E(r)\hat{r} \right)$

t. della circuitazione:

$r < R$ $\quad 2\cancel{\pi}\cancel{r}\, B(r) = \mu_0 \underbrace{nev}_{J} \cancel{\pi} r^{\cancel{2}}$

$$\Rightarrow B(r) = \frac{\mu_0 n e v r}{2}$$

$r > R$ $\quad 2\pi r\, B(r) = \mu_0 n e v \pi R^2$

$$\Rightarrow B(r) = \frac{\mu_0 n e v}{2} \cdot \frac{R^2}{r}$$

$\left(\vec{B}(r) = \underbrace{B(r)\hat{t}}_{\frac{\mu_0 n e}{2} \vec{v} \times \vec{r} \cdot \begin{cases} 1 & r < R \\ R^2/r^2 & r > R \end{cases}} \right)$

b) Per determinare la corrente, occorre la densità nev.

Poiché $E_0 / B_0 = \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0 v}$ $\forall r$, si trova subito $v = \frac{B_0}{E_0 \mu_0 \varepsilon_0}$

$$v = \frac{B_0}{E_0} \cdot c^2 = 6 \cdot 10^6 \ m/s$$

Poiché $r^* < R$, l'espress. di E_0^* è:

$$E_0^*(r^*) = \frac{ne}{2\varepsilon_0} r^* \implies n = \frac{2\varepsilon_0 E_0^*}{e\, r^*} = 1.00 \cdot 10^{16} \ m^{-3}$$

$$\implies I = J \cdot \pi R^2 = nev \cdot \pi R^2 = 75.4 \ A$$