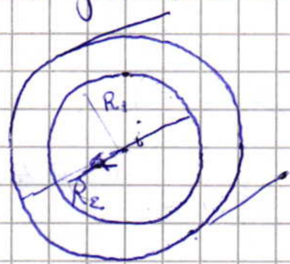
$\boxed{\text{NV } 7.6}$

Un filo rettilineo indefinito di raggio trascurabile è disposto sull'asse di una guaina cilindrica di ferro, pure indefinita, ma con raggio interno $R_1 = 1\,cm$ e raggio esterno $R_2 = 2\,cm$.

Il filo è percorso dalla corrente $i = 10\,A$, la permeabilità relativa del ferro vale $\mu_r = 10^3$.

Dare l'andamento in funzione di r (distanza dal filo) dei campi H, B, M e calcolare la distribuzione delle correnti amperiane nella guaina.



Calcoliamo H dal teorema di Ampere,

$$2\pi r H(r) = i \implies H(r) = \frac{i}{2\pi r}$$

Le linee di forza, per considerazioni di simmetria, sono ortogonali al filo e orientate a seconda del verso della corrente (uscente → ccw, entrante → cw)

$\vec{B}$ è parallelo e concorde (date le ipotesi sul materiale) e vale

$$B(r) = \mu_0 H(r) = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \quad \begin{cases} 0 < r < R_1 \\ r > R_2 \end{cases}$$

$$B(r) = \frac{\mu_0 \mu_r i}{2\pi r} \quad R_1 < r < R_2$$

Poiché in questo problema i campi sono puramente tangenziali alle interfacce, si verificano immediatamente le ~~relazioni~~ condizioni di raccordo

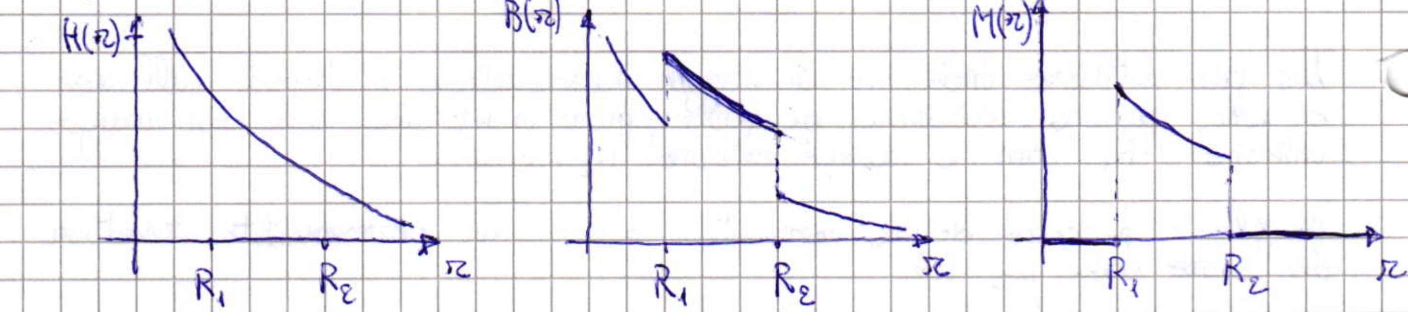
→ H_t conservato

→ $$\frac{B_t(\text{ferro})}{B_t(\text{vuoto})} = \frac{\mu_r(\text{ferro})}{\mu_r(\text{vuoto})} = 10^3$$

$\vec{M}$ è diverso da zero solo dentro la guaina:

$$\vec{M} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{H} = \frac{\cancel{\mu_0}\mu_r \vec{H}}{\cancel{\mu_0}} - \vec{H} = (\mu_r - 1)\vec{H}$$

Graficamente:



Per le correnti amperiane, $\vec{J}_v = 0$ perché il materiale è omogeneo

$$\vec{\nabla}\times\vec{M} = \begin{cases} \cancel{\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial M_z}{\partial \theta} - \dfrac{\partial M_\theta}{\partial z}} & (r) \\ \cancel{\dfrac{\partial M_\rho}{\partial z} - \dfrac{\partial M_z}{\partial \rho}} & (\theta) \\ \cancel{\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial (r M_\theta)}{\partial r} - \dfrac{\partial M_r}{\partial \theta}} & (z) \end{cases}$$

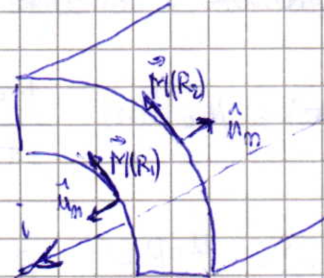
da tab. I.12 MS

Sulle due superfici, i versi di $\vec{J}_s$ si calcolano dal prodotto $\vec{M}\times\hat{u}_n$.

I due moduli sono:

$$J_s(R_1) = M(R_1) = (\mu_r - 1)\frac{i}{2\pi R_1}$$

$$J_s(R_2) = M(R_2) = (\mu_r - 1)\frac{i}{2\pi R_2}$$



$\Downarrow$ con questa scelta di i

$\vec{J}_s(R_1)$ parallela a $\vec{J}_c$

$\vec{J}_s(R_2)$ antiparallela a $\vec{J}_c$

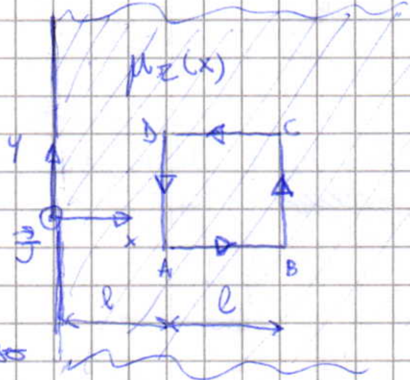
N.B. Le J sono diverse, ma le correnti sono opposte perché i due domini di integrazione sono a loro volta differenti.

Questo mostra che all'esterno della ~~...~~ guaina gli effetti della magnetizzazione si annullano e rimane il solo contributo del filo.

Inoltre, considerando il contributo di una guaina infinitesima, con questo argomento è possibile mostrare che $\vec{J}_v = 0$.

Esame 16/09/2004 - Es. D

Una lastra conduttrice piana e infinita, giacente nel piano y-z, è percorsa da una corrente di densità $J_{0s} = J_{0z} = 6.4\cdot 10^4$ A/m (uscente dal foglio). Il semispazio $x>0$ è riempito da un materiale ferromagnetico, la cui permeabilità magnetica relativa, nelle condizioni in esame, può essere approssimata come $\mu_r(x) = 1 + k e^{-x/\lambda}$, con $k = 87$ e $\lambda = 3.2$ m. Il semispazio $x<0$ è vuoto.



Calcolare:

I - modulo, direzione e verso dei campi $\vec{B}$, $\vec{H}$ e $\vec{M}$ in funzione di x;

II - le correnti di magnetizzazione J_τ e J_s

III - le circuitazioni di $\vec{B}$ e $\vec{H}$ lungo il percorso ABCD indicato in figura, dove $l = 25$ cm è il lato del quadrato e la distanza del lato AD dalla lastra.

I - Per H usiamo il T. di A. su un cammino quadrato posto simmetricam. rispetto alla lastra. La simmetria assicura che H è diretto lungo y.

$$H_y l + H_y l = J_0 l \Rightarrow H_y = \frac{J_0}{2} = 3.2\cdot 10^4 \text{ A/m} \cdot \mathrm{sgn}(x)$$

↳ il verso è nelle y crescenti per $x>0$ e decrescenti per $x<0$

Campo $\vec{B}$ parallelo ad $\vec{H}$ e in modulo:

$$B(x) = \begin{cases} \mu_0 H = \mu_0 \frac{J_0}{2} = 4.0\cdot 10^{-2}\,\text{T} & \text{per } x<0 \\ \mu_0 \mu_r H = \mu_0 \frac{J_0}{2}\cdot\left(1 + k e^{-x/\lambda}\right) & \text{per } x>0 \end{cases}$$

La magnetizzazione $\vec{M}$ è nulla per $x<0$. Per $x>0$:

$$\vec{M} = (\mu_r - 1)\vec{H} = k e^{-x/\lambda}\vec{H}$$

II - All'interfaccia abbiamo la corrente di magnetizzazione:

$$\vec{J}_s = \vec{M}(x=0) \times \hat{u}_n = \vec{M}(x=0) \times (-\hat{x})$$

$\Rightarrow$ $\vec{J}_s$ è parallela ed equiversa a $\vec{J}_0$ e in modulo vale

$$J_s = M(x=0) = k\cdot H = k\frac{J_0}{2} = 2.8\cdot 10^6 \text{ A/m}$$

$$\vec{J} = \nabla \times \vec{M} = \left(\frac{\partial M_z}{\partial y} - \cancel{\frac{\partial M_y}{\partial z}}, \cancel{\frac{\partial M_x}{\partial z}} - \cancel{\frac{\partial M_z}{\partial x}}, \frac{\partial M_y}{\partial x} - \cancel{\frac{\partial M_x}{\partial y}}\right)$$

$$\Rightarrow \vec{J}_v = \frac{\partial M_y}{\partial x} \cdot \hat{z} = -\frac{K}{\lambda}\frac{J_0}{2} e^{-x/\lambda}\, \hat{z} \quad (\underline{\text{entrante}})$$

Come prevedibile, $\vec{J}_v$ è antiparallela a $\vec{J}_s$. Inoltre la corrente di volume totale e quella superficiale sono opposte:

$$\int_0^\infty J_{v(z)} = \int_0^\infty -\frac{kJ_0}{\lambda 2} e^{-x/\lambda} = -\frac{kJ_0}{2} = -J_{s(z)}$$

III - Per il t. di A, poiché il percorso indicato non concatena correnti di conduzione, ~~perciò~~ si ha

$$\oint_{ABCD} H = 0$$

La circuitaz. di B si può di nuovo calcolare con il t. di A, includendo però tutte le correnti, cioè in questo caso J_v:

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 \int J_{v} \, dx\, dy = \mu_0 \int_0^l dy \int_l^{2l} dx \underbrace{\vec{J}_v \cdot \hat{z}}_{J_{vz}} =$$

$$= \mu_0 l \int_l^{2l} -\frac{kJ_0}{\lambda 2} e^{-x/\lambda} = \mu_0 \frac{kJ_0}{2} l \left(e^{-2l/\lambda} - e^{-l/\lambda}\right) = -0.061 \; Wb/m$$

↳ il tratto in cui B è contrario all'orientaz. scelta per il cammino contribuisce più dell'altro.

Oppure, si può calcolare direttamente $\oint B$:

$$\oint_{ABCD} \vec{B}\cdot d\vec{l} = \int_{BC} \vec{B}\cdot d\vec{l} + \int_{DA} \vec{B}\cdot d\vec{l} =$$

$$= l\left[B(x=2l) - B(x=l)\right] = l \cdot \frac{k\mu_0 J_0}{2} \cdot \left(e^{-2l/\lambda} - e^{-l/\lambda}\right)$$