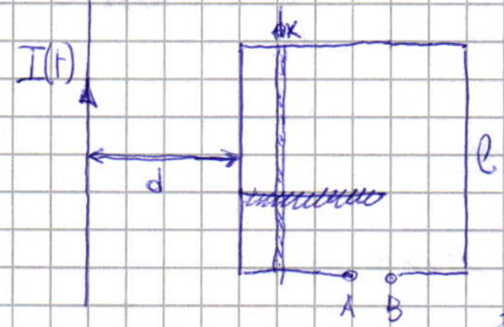
Prova d'esame per fisici (4/6/1975)

Si ha un filo indefinito percorso da una corrente dipendente dal tempo data da $I = I_0 e^{-kt}$, I_0 e k noti.
Coplanare con il filo si trova una spira quadrata di lato l, posta a distanza d dal filo e con un lato parallelo ad esso, interrotta tra due punti A e B.
Calcolare ampiezza e segno della differenza di potenziale esistente tra i punti A e B



rispetto alla normale uscente

$$B = \mu_0 \frac{I}{2\pi r} \longrightarrow \phi(B) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi}\int_d^{d+l} \frac{1}{r} \cdot l\, dr = -\frac{\mu_0 I l}{2\pi} \ln \frac{d+l}{d} =$$

(striscioline...)

$$= -\frac{\mu_0 I_0 l}{2\pi} \ln\left(1+\frac{l}{d}\right) \cdot e^{-kt}$$

$$f_i = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln\left(1+\frac{l}{d}\right) k I_0 e^{-kt}$$

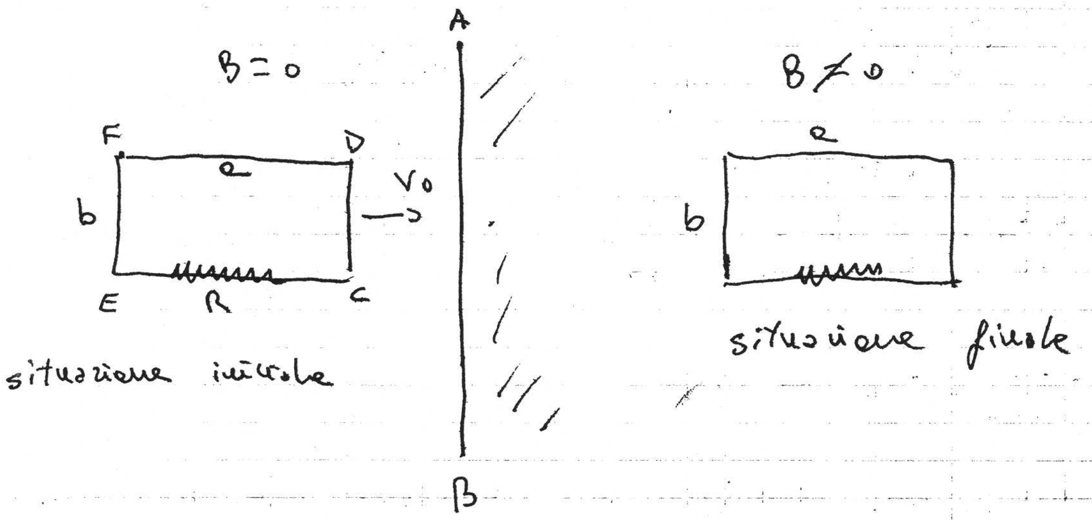
Il segno (−) è in accordo col fatto che la variaz. di flusso autoconcatenato tende a compensare quella del flusso esterno.
Il campo esterno è entrante e diminuisce, quindi quello autoindotto deve essere e diminuire con la stessa legge.
pure entrante per contribuire al flusso nello stesso verso e compensarne la diminuzione

Prova di esonero per chimici 10/6/72 107

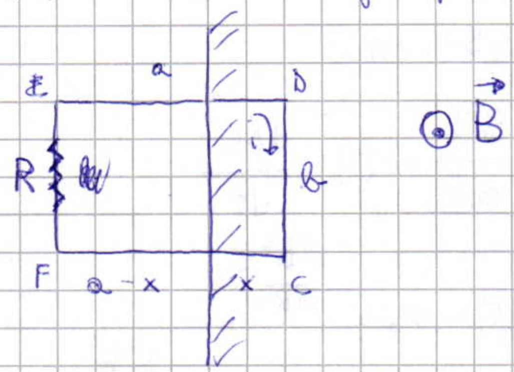
32
33 Si abbia un circuito rigido di resistenza complessiva R e di induttanza trascurabile, formato da una spira rettangolare di lati a e b. Tale circuito si trova inizialmente disposto come in figura, dove la retta AB delimita una zona di spazio dove esiste un campo magnetico costante e uniforme di induzione B, diretto ortogonalmente al foglio verso chi legge.

Un opportuno congegno mantiene il circuito in moto con velocita' costante V_0 diretta come in figura, cosicché esso penetra nella zona dove c'è il campo magnetico e alla fine è completamente immerso nel campo. In queste condizioni calcolare la corrente che passa nel circuito durante il passaggio, la carica totale che fluisce attraverso il circuito, e il lavoro totale compiuto dal congegno che mantiene la velocita' uniforme. Infine, sapendo che la massa del circuito è m, calcolare la dipendenza della velocita' dal tempo se essa non fosse mantenuta artificialmente costante. Calcolare la velocita' finale.

Dati: $a = 1$ m, $b = 20$ cm, $R = 100\ \Omega$, $B = 10^4$ G, $V_0 = 10$ m/s, $m = 10$



Prova esonero per chimici 10/6/1972 (v. testo fotocopiato)



$$f = - \frac{d\phi(\vec{B})}{dt}$$

$$\phi(B) = B b x$$

$$\Rightarrow f = - B b v_0$$

$$i = \frac{f}{R} = - \frac{b B v_0}{R} = -20 \text{ mA}$$ (ragionare sul verso, in base alla legge di Lenz)

$$Q = \int_0^T i(t)\, dt = \qquad T = \frac{a}{v_0}$$

$$= \frac{B b v_0}{R} \int_0^{a/v_0} dt = \frac{B a b}{R_0} = 2 \text{ mC}$$

Il lavoro necessario a mantenere la spira in m.r.u. è pari all'energia dissipata sulla resistenza per eff. Joule.

$$P = R i^2 = \cancel{R} \frac{B^2 b^2 v_0^2}{R^{\cancel{2}}}$$

$$\mathcal{E} = \int_0^T P(t)\, dt = \frac{B^2 b^2 v_0^2}{R} \int_0^{a/v_0} dt = \frac{B^2 b^2 v_0 a}{R} = 4 \text{ mJ}$$

Se questo lavoro non viene fornito, v_0 non è più costante.
In ogni istante varrà però

$$i = - \frac{B b v(t)}{R}$$

La spira subisce l'azione di una forza lungo il tratto CD, unico ramo del circuito ~~che~~ a sentire una forza non neutralizzata da una opposta.

Dunque, la equazione del moto è:

$$i l B = m a$$

$$-\frac{B^2 l^2}{mR} v(t) = \frac{dv(t)}{dt}$$

$$v(t) = v_0 e^{-\frac{l^2 B^2}{mR} t}$$

$$x(t) = -\frac{mR}{B^2 l^2} v_0 e^{-\frac{B^2 l^2}{mR} t} + k$$

$$x(t=0) = 0 \implies k = \frac{mR}{B^2 l^2} v_0$$

$$x(t) = \frac{mR}{B^2 l^2} v_0 \left(1 - e^{-B^2 l^2 / mR \, t}\right)$$

check dimensionale:

$$\left[m \underbrace{\frac{\cancel{F}}{\cancel{q}} l \frac{\cancel{t}}{\cancel{q}}}_{R} F^{-1} \cancel{q^2} F^{-2} \cancel{l^{2}} \cancel{l^{-2}} l \cancel{t^{-1}} \right]$$

$$\left[\cancel{m} l F^{-2} \cancel{F^{-1}} l \right] = [l] \quad \text{ok!}$$

$$x(t_a) = a = \frac{mR}{B^2 l^2} v_0 \left(1 - e^{-B^2 l^2 / mR \, t_a}\right)$$

$$t_a = -\frac{mR}{B^2 l^2} \ln\left(1 - \frac{a l^2 B^2}{mR v_0}\right)$$

da cui

$$v_{fin} = v(t_a) = v_0 \left(1 - \frac{a l^2 B^2}{mR v_0}\right) = 10\left(1 - 4 \cdot 10^{-3}\right) \text{ m/s}$$

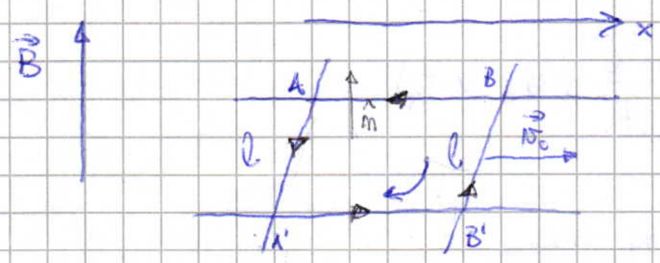
NV 6.7

Due rotaie parallele, poste in un piano orizzontale, distanti $l = 10\,cm$, di resistenza elettrica trascurabile, sono immerse in un campo $\vec{B}$ uniforme e costante, ortogonale al piano delle rotaie, di modulo $B = 0.5T$.

Due barrette conduttrici AA' e BB' uguali, di massa $m = 10g$, resistenza $R = 0.1\,\Omega$ possono scorrere senza attrito sulle rotaie.

BB' viene messa in moto con velocità $v_0 = 10\,m/s$ nella direzione $\hat{x}$.

Calcolare la legge con cui variano v_A e v_B nel tempo e l'energia dissipata per eff. Joule.



= verso positivo della corrente

Sulle cariche contenute in BB' agisce il campo di Lorentz: $\vec{E}_L = \vec{v}_B \times \vec{B}$

Perciò la f.e.m. indotta all'istante iniziale è $|\vec{E}_L(t=0)| \cdot l = Blv_0$ in modo che in BB' circoli corrente da B a B'

(valutabile anche in base a considerazioni di compensaz. di flusso, come sempre).

Quindi la corrente circola da B a B' e da A' a A. Dunque la barretta AA' subisce la forza $^{(*)}\ i\vec{l} \times \vec{B}$ diretta verso le x crescenti.

Il movimento di AA' fa comparire una f.e.m. indotta di segno opposto a quello di BB', in modulo pari a Blv_A.

$(*)\ q\vec{v}_d \times \vec{B} = q\frac{\vec{l}}{t} \times \vec{B} = i\vec{l} \times \vec{B}$

$$\Rightarrow f_{tot} = -Blv_B + Blv_A = -Bl(v_B - v_A)$$

(corrente oraria per $v_B = v_0$, $v_A = 0$)

$$i = \frac{f_{tot}}{2R} = -\frac{Bl(v_B - v_A)}{2R}$$

Quindi le forze agenti sulle sbarrette sono:

$$\left.\begin{aligned}\vec{F}_B &= i\vec{l}\times\vec{B} = -\frac{B^2 l^2}{2R}(v_B - v_A)\,\hat{x}\\ \vec{F}_A &= -i\vec{l}\times\vec{B} = \frac{B^2 l^2}{2R}(v_B - v_A)\,\hat{x}\end{aligned}\right\}$$ BB' rallenta, AA' accelera

Poiché $\vec{F}_B + \vec{F}_A = \vec{0}$, la conservaz. della q.d.m. permette di scrivere

$$\underset{0}{m v_A(t=0)} + \underset{v_0}{m v_B(t=0)} = m v_A(t) + m v_B(t)$$

$$\Rightarrow \quad v_0 = v_A + v_B$$

Eq. del moto per la sbarretta AA':

$$m\frac{dv_A}{dt} = \frac{B^2 l^2}{2R}(v_B - v_A) = \frac{B^2 l^2}{2R}(v_0 - 2v_A)$$

$$\frac{dv_A}{dt} = \frac{B^2 l^2}{2mR}(v_0 - 2v_A) \qquad \text{(sep. var.)}$$

$$\frac{dv_A}{v_0 - 2v_A} = \frac{B^2 l^2}{2mR}\,dt$$

(...)

$$v_A(t) = \frac{v_0}{2}\left(1 - e^{-B^2 l^2 t/mR}\right) \longrightarrow \frac{v_0}{2}$$

$$v_B(t) = v_0 - v_A(t) = \frac{v_0}{2}\left(1 + e^{-B^2 l^2 t/mR}\right) \rightarrow \frac{v_0}{2}$$

$$f_{tot} = -Bl(v_B - v_A) = -Bl v_0 e^{-B^2 l^2 t/mR} \qquad \tau = \frac{mR}{B^2 l^2} = 0.4\,s$$

$$W = \int_0^\infty \frac{f_{tot}^2(t)}{2R}\,dt = \frac{B^2 l^2 v_0^2}{2R}\int_0^\infty e^{-\frac{2B^2 l^2 t}{mR}} = \frac{1}{4}m v_0^2 = -\Delta T = +0.25\,J$$

$$\downarrow$$

$$\underset{T_{in}}{\frac{1}{2}m v_0^2} - \underset{T_{fin}}{\frac{1}{4}m v_0^2}$$