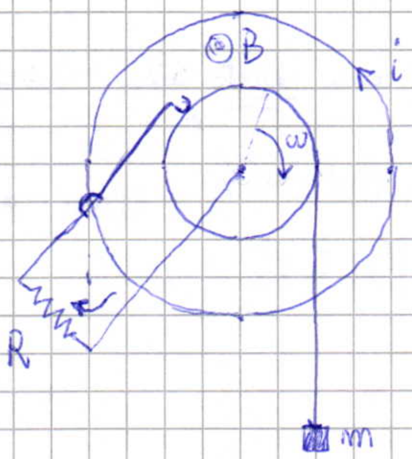
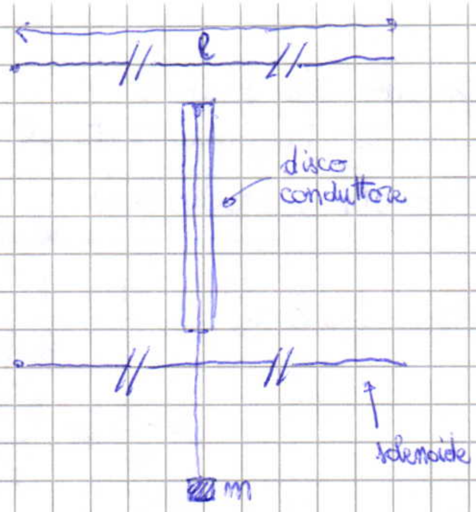


sezione xy



sezione yz

$N = 2000$ spire

$l = 2\,m$

$r_0 = 0.15\,m$

$r_1 = 0.16\,m$

$i = 12\,A$

$R = 0.8\,\Omega$

$\nu = 1800$ giri/min

$\Downarrow$

$\omega = 2\pi \frac{1800}{60}$

a) Calcolare la f.e.m. indotta

b) Calcolare la potenza dissipata per eff. Joule

c) aggiungendo un peso di massa $m = 10\,Kg$, calcolare la sua velocità limite di caduta v_{lim}.

Nel solenoide vale

$$B = \mu_0 i \frac{N}{l} = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 12 \cdot \frac{2000}{2} = 0.015\,T$$

$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} \Rightarrow$ il campo indotto vale $\frac{q\omega r B}{q} = \omega r B$ ed è diretto come $\vec{v} \times \vec{B}$, cioè radialmente in modo che la corrente circoli dalla periferia al centro del disco.

La f.e.m. indotta si ottiene integrando il campo sul cammino radiale:

$$f_{tot} = \int_0^{r_0} E \cdot dr = \omega B \int_0^{r_0} r\,dr = \frac{1}{2}\omega B r_0^2 = 31.8\,mV$$

La potenza Joule dissipata è

$$P = \frac{f_{tot}^2}{R} = 1.28\,mW$$

Il momento applicato al disco è

diretto tangenzialmente al disco in verso opposto alla rotazione

$$dF = i\,dr\,B \rightarrow d\vec{M} = -i\,r\,dr\,B\,\hat{\omega}$$

uscente (cioè opposto a $\vec{\omega}$)

(freni e.m.)

$$M = -iB\int_0^{r_0} r\,dr = \frac{1}{2} i B r_0^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{R}\left(\frac{1}{2}\omega B r_0^2\right) B r_0^2 =$$

$$= -\frac{1}{4}\omega\frac{B^2 r_0^4}{R}$$

Il momento applicato dal peso è

$$M' = mg\,r_0$$

$$0.5 \times m r_0^2 \dot{\omega} = mg r_0 - \frac{B^2 r_0^4}{4R}\omega$$

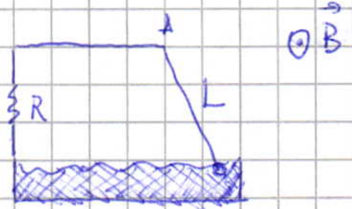
$$\dot{\omega} + \underbrace{\frac{B^2 r_0^2}{2mR}}_{A_1}\omega = \underbrace{\frac{g}{r_0}}_{A_2}$$

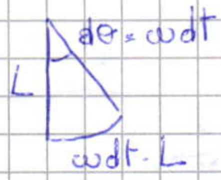
$$\omega = A_2/A_1\left(1 - e^{-A_1 t}\right) \xrightarrow[t\to\infty]{} \frac{A_2}{A_1}$$

$$\Rightarrow v_{lim} = \omega_{lim}\cdot r_0 = \frac{A_2}{A_1} r_0 = \frac{4mRg}{B^2 r_0^2} = 62\ \text{Km/s}$$

(N.B. c'era un dato in più: il raggio r_1) ∎

Soluzione es. 1





$$d\Sigma = \frac{1}{2} L \cdot \omega dt\, L = \frac{1}{2} L^2 \omega dt$$

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = \cancel{\frac{d}{dt}}$$

$$d\Phi = B\, d\Sigma = \frac{1}{2} B L^2 \omega dt$$

$$\mathcal{E} = -\frac{1}{2} B L^2 \omega \Rightarrow I = -\frac{B L^2 \omega}{2R}$$

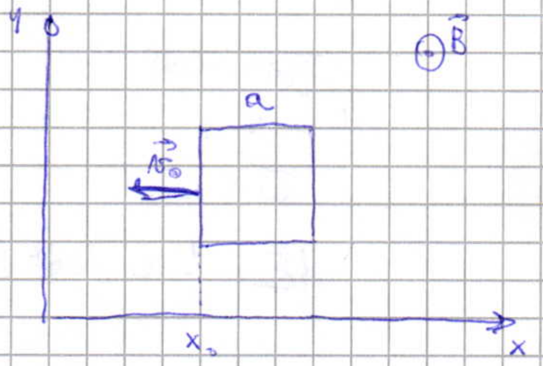
$$\vec{F} = \int_0^L I\, d\vec{l} \times \vec{B}$$ (discutere direz. e verso)

$$|\vec{F}| = \frac{B^2 L^3 \omega}{2R}$$ (proporzionale alla velocità della massa, come una forza di attrito)

Perciò l~~a~~ equazione del moto del pendolo diventa

$$m L \ddot{\theta} = -mg \sin\theta - \frac{B^2 L^3}{2R} \dot{\theta}$$

Soluzione es. 2



$\odot \vec{B}$ $\qquad |\vec{B}| = B_0 x$

$$d\phi(\vec{B}) = B_0 x \, a \, dx$$

N.B. la notazione "$d\phi$" è riferita al contributo infinitesimo al flusso concatenato all'istante t e non alla sua variazione nel tempo dt!

$$\phi(\vec{B}) = \int_x^{x+a} B_0 a x' dx' =$$

$$= \frac{1}{2} B_0 a x'^2 \Big|_x^{x+a} = \frac{1}{2} B_0 a (a^2 + 2ax)$$

$$R = \rho \cdot \frac{l}{S} = \rho \cdot \frac{4a}{S} = 10\,\Omega$$

$$i = -\frac{1}{R}\frac{d\phi}{dt} = -\frac{B_0 a^2 v}{R} \qquad \left(v = \frac{dx}{dt}\right)$$

Nel nostro caso, $v = -v_0$:

$$\Rightarrow i = +\frac{B_0 a^2 v_0}{R} = 0.2\,\text{mA} \quad \text{(positiva, dunque antioraria)}$$

La spira raggiunge $x = 0$ nel tempo

$$t_0 = \frac{x_0}{v_0} = 2\,s$$

Perciò, l'energia dissipata in questo tempo è:

$$\mathcal{E} = R i^2 t_0 = \frac{B_0^2 a^4 v_0^2}{R} t_0 = 8 \cdot 10^{-7}\,J$$

La forza agente sui tratti verticali del circuito è:

$$\vec{F}_x = \int_0^a i\,d\vec{l} \times \vec{B}(x) = -i a B_0 \vec{x}$$

$$\vec{F}_{x+a} = \int_0^a i\,d\vec{l} \times \vec{B}(x+a) = +i a B_0 (\vec{x} + \vec{a})$$

Le forze agenti sui due lati paralleli all'asse x hanno invece risultante nulla.

La forza agente sulla spira è dunque:

$$\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_{x+a} = i a^2 B_0 \hat{x} \qquad (\text{avendo posto } \vec{a} = a\hat{x})$$

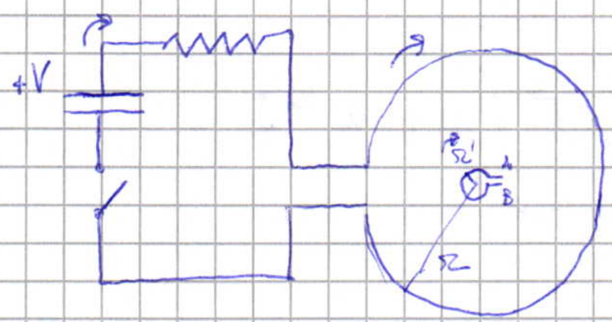
Perciò è opposta a $\vec{v}$ e produce una decelerazione della spira. Il modulo è $F = 2 \cdot 10^{-7}\,N$.

Per cancellare questo effetto occorre quindi applicare una forza esterna $-\vec{F}$, compiendo lavoro:

$$L = F \cdot x_0 = 2 \cdot 10^{-7}\,N \cdot 4\,m = 8 \cdot 10^{-7}\,J$$

che è ovviamente uguale all'energia dissipata per effetto Joule durante il moto (come calcolato sopra).

Soluzione esercizio 5



In assenza di autoinduzione e di campi esterni variabili, il circuito è un normale circuito RC in scarica:

$$\frac{Q}{C} + Ri = 0 \longrightarrow Q = Q_0 e^{-t/RC}$$

Poiché $Q(t=0) = CV_0$, si ha $Q_0 = CV_0$

Il fluire della corrente di scarica nel circuito fa sì che la spira generi un campo d'induzione magnetica B che nel centro vale:

$$B = \frac{\mu_0 i}{2r}, \quad i = \frac{dQ}{dt} = -\frac{\cancel{C}V_0}{R\cancel{C}} e^{-t/RC} = -\frac{V_0}{R} e^{-t/RC}$$

Dato il segno iniziale della d.d.p. tra le armature, la corrente di scarica fluisce in verso orario, e il campo B è quindi disposto in verso entrante. La sua espressione è

$$B = -\frac{\mu_0}{2r}\frac{V_0}{R} e^{-t/RC}$$

Il suo flusso concatenato con la spira di raggio r', nell'ipotesi $r' \ll r$, è quindi:

$$\phi(B) = -\pi r'^2 \cdot \frac{\mu_0}{2r}\frac{V}{R} e^{-t/RC}$$

$$f = -\frac{d\phi}{dt} = -\pi r'^2 \frac{\mu_0}{2r}\frac{V}{R}\frac{1}{RC} e^{-t/RC}$$

$f(t=0) = -98.7 \cdot 10^{-8}\,V$ (la corrente circola in verso orario)