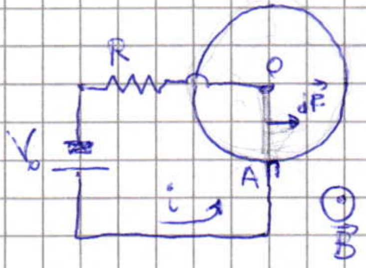
6.15 Variante 1: disco inizialmente fermo, viene connesso un generatore V_0 come in figura. Il disco entra in rotazione.

Calcolare come varia la velocità angolare ω nel tempo e darne la relazione con il momento delle forze agenti rispetto all'asse di rotazione. Calcolare inoltre l'energia totale spesa dal generatore.

Trascurare attrito, autoinduzione e resistenze diverse da R.



Il disco si mette in rotazione per effetto dell'azione del campo $\vec{B}$ sulle cariche in movimento lungo il raggio.

Quindi

$$d\vec{F} = i\, d\vec{r} \times \vec{B}$$

N.B. $d\vec{r}$ in questo caso è opposto a quello del caso precedente (ha il verso della corrente)

$$\vec{M} = \vec{r} \times d\vec{F} \quad \text{(uscente)}$$

$$M = \int_0^{D} i B r\, dr = \frac{i B D^2}{2}$$

Ma la f.e.m. indotta $f_i = \frac{B D^2 \omega}{2}$ (opposta a V_0)

Perciò la legge di Ohm si scrive:

$$R i = V_0 - \frac{B D^2 \omega}{2} \Longrightarrow i = \dots$$

$$\Longrightarrow M = \frac{B D^2}{2R}\left(V_0 - \frac{B D^2 \omega}{2}\right)$$

è massimo all'inizio, quando $\omega = 0$. Poi decresce con ω fino alla condizione

$$\omega = \omega_{fin} \quad \text{t.c.} \quad V_0 = \frac{B D^2 \omega_{fin}}{2} \Longleftrightarrow \omega_{fin} = \frac{2 V_0}{B D^2}$$

In questa condizione la f_i uguaglia V_0, per cui $i = 0$ e, non essendo presenti altri effetti dissipativi, il disco continua a ruotare con $\omega = \omega_{fin}$.

L'eq. del moto del disco è

$$I \dot{\omega} = \frac{B D^2}{2R}\left(V_0 - \frac{B D^2 \omega}{2}\right) \qquad I = \frac{1}{2} m D^2$$

ω è quindi un esponenziale ~~decrescente~~ con valore iniziale $\omega(0) = 0$

$$\Rightarrow \quad \omega = \frac{2V_0}{B\Delta^2}\left(1 - e^{-B^2\Delta^4 t/4IR}\right)$$

$$i = \frac{V_0}{R}\, e^{-\frac{B^2\Delta^2 t}{2mR}}$$

Bilancio energetico:

$$K_{fin} = \frac{1}{2} I \omega_{fin}^2$$

$$W_{Joule} = \int_0^\infty R i^2\, dt = \frac{V_0^2}{R}\int_0^\infty dt\, e^{-\frac{B^2\Delta^2 t}{mR}} = \frac{V_0^2}{\cancel{R}}\cdot\frac{m\cancel{R}}{B^2\Delta^2} = \frac{mV_0^2}{B^2\Delta^2} =$$

$$= \left(\text{poiché } \omega_{fin} = \frac{2V_0}{B\Delta^2}\right) =$$

$$= \frac{4}{4}\,\frac{mV_0^2}{B^2\Delta^2}\,\frac{\Delta^2}{\Delta^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} m\Delta^2\right)\omega_{fin}^2 = \frac{1}{2} I \omega_{fin}^2$$

$$\Rightarrow \quad L_{gen} = \underset{K}{W_{cin}} + \underset{W_J}{W_{Joule}} = 2W_{cin} = I\omega_{fin}^2$$

Si può continuare aggiungendo un momento meccanico esterno (ad es. NV 5.18) applicato tramite un carico di massa fissata.

La condizione $M_{tot} = 0$ diventa quindi

$$\frac{B\Delta^2}{2R}\left(V_0 - \frac{B\Delta^2\omega}{2}\right) - Mg\cdot\Delta = 0$$

e si trova una $\omega_{fin} = \frac{2}{B\Delta^2}\left(V_0 - \frac{2MgR}{B\Delta}\right)$ e così via.

Esonero 07/06/2013 - Es. 2

Una barretta metallica di massa $m = 50g$ e resistenza $R = 10 k\Omega$ poggia i suoi estremi su due guide metalliche parallele distanti $a = 15$ cm, con coefficiente d'attrito e resistenza elettrica trascurabili. Le due guide sono elettricamente connesse tramite un condensatore di capacità $C = 20 \mu F$ e sono inclinate di un angolo $\alpha = \pi/3$ rispetto al piano orizzontale.
Il sistema è immerso in un campo di induzione magnetica uniforme $|\vec{B}| = 2.0T$, verticale, orientato verso l'alto. Il condensatore è inizialmente scarico e la barretta è ferma. Al tempo $t=0$ essa viene lasciata scivolare lungo le guide sotto l'azione del suo peso.

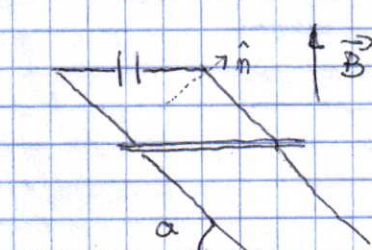
Trascurando l'autoinduzione, si determini:

a) l'equazione del circuito elettrico;

b) l'equazione del moto della barretta;

c) l'andamento della corrente che circola nella barretta in funzione del tempo;

d) il valore numerico della corrente dopo 0.2 s dall'istante iniziale.



Il flusso concatenato al generico istante t è

$$\phi(\vec{B}) = \int_{\Sigma(t)} \vec{B} \cdot \hat{n} \, d\Sigma = B a x \cos\alpha$$

$$\Rightarrow f_i = -\frac{d\phi}{dt} = -B a \underbrace{v}_{dx/dt,\ v = v(t)} \cos\alpha$$

(corrente oraria se la barretta scende)

L'eq. del circuito è quindi

$$B a v \cos\alpha = R\, i(t) + \frac{1}{C}\int_0^t i(t')dt'$$

Nell'equaz. del moto occorre includere il termine dovuto alla forza di Lorentz agente sulla barretta:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = mg \sin\alpha - a B i \cos\alpha$$

Ricaviamo $\frac{d^2x}{dt^2}$ isolando $\frac{dx}{dt}$ $(=v)$ nell'equaz. del circuito e derivando:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{aBC\cos\alpha} \int_0^t i(t')\, dt' + \frac{R}{aB\cos\alpha}\, i(t)$$

$$\downarrow$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{i(t)}{aBC\cos\alpha} + \frac{R}{aB\cos\alpha} \frac{di}{dt}$$

e sostituendo nell'equazione del moto si ottiene:

$$\frac{di}{dt} + i\left[\frac{1}{RC} + \frac{(aB\cos\alpha)^2}{mR}\right] = \frac{g\, aB \sin\alpha \cos\alpha}{R}$$

def $\quad i_\infty = \dfrac{g\, aB \sin\alpha\cos\alpha}{\cancel{R}} \Big/ \left[\dfrac{1}{\cancel{R}C} + \dfrac{(aB\cos\alpha)^2}{m\cancel{R}}\right]$

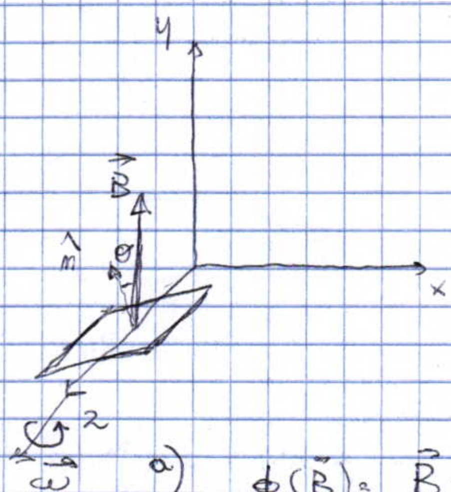
$\Rightarrow \quad i(t) = i_\infty \left(1 - e^{-t/\tau}\right)$ (avendo usato $i(0) = 0$)

con $\tau = \left[\quad\quad\right]^{-1} = 0.2\ s$

$i_\infty = 2.6 \cdot 10^{-5}\ A$

$i(t = 0.2\,s) = 1.6 \cdot 10^{-5}\ A$

Esonero 06/06/2014, es. 2



$B = 2T$

$R = 10\,\Omega$

$\ell = 30\,cm$

a) $\phi(\vec{B}) = \vec{B} \cdot \hat{n} \cdot S = B \cos\theta \cdot \ell^2$ — $\theta(t)$

$\downarrow$

$$f_i = -\frac{d\phi}{dt} = -B\ell^2(-\sin\theta)\dot{\theta} = B\ell^2 \sin\theta \cdot \omega$$

$$i = \frac{B\ell^2 \sin\theta\, \omega}{R}$$

b) forze su lati $\perp \hat{z}$ formano coppia di braccio nullo. Sugli altri due lati agiscono forze opposte con braccio non nullo:

$$\vec{M} = iB\ell \cdot \ell \sin\theta\,(-\hat{\omega}) = -\frac{B^2\ell^4 \sin^2\theta}{R}\hat{\omega}$$

(analogamente si può calcolare come $\underbrace{iS\hat{n}}_{\vec{m}} \times \vec{B}$)

c)

$$I\ddot{\theta} = -\frac{B^2\ell^4 \sin^2\theta}{R}\dot{\theta}$$

Per mantenere $\dot{\theta}$ costante $= \omega_0$, occorre applicare un momento esterno

$$\vec{M}_e = -\vec{M}$$

erogando potenza:

$$P_e = M_e \cdot \underbrace{\dot{\theta}}_{\omega_0} = \frac{B^2\ell^4 \overbrace{\sin^2\theta}^{\text{non costante}}}{R} \cdot \omega_0^2 = Ri^2 \text{ (v. sopra)}$$

$$\langle P_e \rangle = \frac{1}{2}\frac{B^2\ell^4}{R}\omega_0^2 = 6.4\,W$$

Compito 19/06/2016, es. 3

Un circuito elettrico, di massa complessiva $m = 10\,g$, è costituito da una spira rigida rettangolare di lati $a = 0.5\,m$ e $b = 1.0\,m$, e resistenza elettrica $R = 150\,\Omega$ posta in serie a un condensatore di capacità $C = 100\,\mu F$.
La spira è libera di traslare senza attrito sul piano orizzontale xy ed è inizialmente forma con i lati di lunghezza a e b rispettivamente paralleli agli assi x e y.

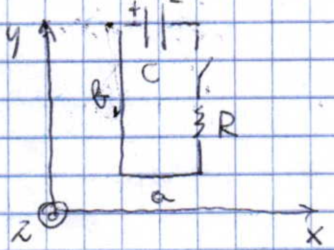
La spira è immersa in un campo magnetico funzione della posizione $\vec{B} = (0, 0, Ax)$, con $A = 0.2\,T/m$.
Il circuito è inizialmente aperto e la tensione ai capi del condensatore è $V_0 = 1.0\,kV$, con il segno indicato in figura.
Successivamente viene chiuso l'interruttore.
Si determini:

a) la f.e.m. indotta nella spira in funzione della sua velocità;

b) come varia la corrente in funzione del tempo;

c) la velocità asintotica della spira in modulo, direzione e verso (specificando il valore numerico).

(si trascuri l'autoinduzione del circuito)



a)

$$f_i = -\frac{d}{dt}\int_x^{x+a} bAx'\,dx' = -\frac{bA}{2}\frac{d}{dt}\left[(x+a)^2 - x^2\right] = -Aabv$$

b)

$$\underbrace{-Aabv}_{f_i} + \frac{Q}{C} = Ri$$

$$i = -\frac{dQ}{dt}$$

$$R\frac{di}{dt} = +baB\frac{dv}{dt} + \frac{i}{C}$$

$$F_x = iBA(x+a) - iBAx = iAaB$$

$$\Rightarrow m\frac{dv}{dt} = iAaB$$

Sostituendo nell' ~~eq~~ equaz. del circuito:

$$\frac{di}{dt} + i\underbrace{\left(\frac{1}{RC} + \frac{A^2a^2B^2}{mR}\right)}_{1/\tau} = 0$$

$$i = i_0 e^{-t/\tau} = \frac{V_0}{R} e^{-t/\tau}$$

sostituendo nell' equaz. del moto:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{AaB}{m} \cdot \frac{V_0}{R} e^{-t/\tau}$$

$$\downarrow$$

$$v(t) = \frac{\tau V_0 AaB}{mR}\left(1 - e^{-t/\tau}\right) \xrightarrow[t \to \infty]{} v = 1.0 \, m/s$$