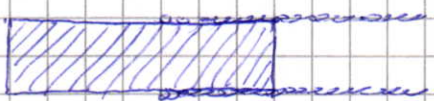
Energia magnetica e forze magnetiche.

$\boxed{\text{MS E.VII.18}}$

Consideriamo un solenoide di lunghezza $l = 10\,cm$, costituito da $N = 1000$ spire di area $S = 1\,cm^2$ percorse da corrente $I = 1\,A$. Nel solenoide viene inserito un nucleo di ferro dolce; le condizioni di lavoro sono tali che il nucleo ha una caratteristica $B(H)$ approssimativamente lineare, cosicché si può porre $B = \mu_0\mu_r H$ con $\mu_r = 1000$.

Calcolare la forza con cui il nucleo viene risucchiato dentro il solenoide.



N.B. induttanza di un solenoide:

$$L = \frac{\Phi(B)}{I} = \frac{\mu_0(\mu_r)\, n \cancel{I} \cdot S \cdot n l}{\cancel{I}} = \mu_0\mu_r n^2 S l$$

$$U_m = \frac{1}{2} L I^2$$

quando il nucleo è inserito per un tratto x, avremo (trascurando effetti di bordo) un sistema di 2 induttanze in serie:

$$L_{tot} = \mu_0\mu_r n^2 S x + \mu_0 n^2 S (l - x) = \mu_0 n^2 S\left[l + (\mu_r - 1)x\right]$$

$$U_m = \frac{1}{2} L_{tot} I^2 = \frac{\mu_0 n^2 S}{2} I^2 \left[l + (\mu_r - 1)x\right]$$

Poiché, come in tutti questi problemi, usiamo l'ipotesi $I = cost$, la forza sarà

$$\Delta U_m = \frac{1}{2} L_{pieno} I^2 - \frac{1}{2} L_{vuoto} I^2 = \frac{1}{2} I^2 \Delta L$$

$$\Delta U_{gen} = \int dt\, f_A \cdot I = -\int dt \frac{d}{dt}(LI)\cdot I = -I^2 \int dL = -I^2 \Delta L$$

$$\vec{F} = (+)\, \vec{\nabla} U_m \quad (\equiv -\vec{\nabla} U_{tot})$$

→ solenoide + generatore che lavora per mantenere i costante

$$\Rightarrow \quad F_x = +\frac{\partial U_m}{\partial x} = (\mu_r - 1)\frac{\mu_0 n^2 S}{2} I^2$$

> 0 per paramagnetici e ferromagnetici (attrattiva i.e. risucchio)

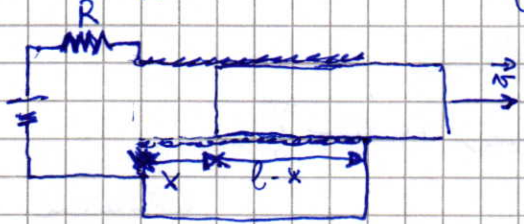
< 0 per diamagnetici (repulsiva)

Nel caso in esame, è $F_x = 6.28\,N$

NV 7.23

Un solenoide molto lungo, con sez. $\Sigma = 4\,cm^2$ e $n = 20$ spire/cm è alimentato da un generatore di f.e.m. V_0; la res. complessiva è $R = 3\,\Omega$.
Parzialmente inserita nel solenoide si trova una ~~spira~~ barra di ferro dolce con $\mu_r = 10^3$. Si supponga di far spostare la barra con vel. costante pari a $v = 40$ cm/s verso l'interno o l'esterno del solenoide. Calcolare nei due casi quanto deve valere V_0 per mantenere nel circuito una corrente costante (*) $i = 20A$ e quanto vale la forza che bisogna applicare ~~dall'esterno~~ alla barra.
Discutere inoltre il bilancio energetico del sistema.
Si usi l'approx. di solenoide indefinito.

(*) Quindi è un gen. di corrente ...



Ancora 2 solenoidi in serie:

$$L_{eq} = \mu_0 n^2 \Sigma x + \mu_0 n^2 \mu_r \Sigma (l-x)$$
$$\mu_0 n^2 \Sigma \left[\mu_r l + (1-\mu_r) x \right]$$

(assumiamo $\frac{dx}{dt} = +v$ se esce, $-v$ se entra)

(I) $$f = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d}{dt}(L \cdot i) = -i \frac{dL}{dt} = -\mu_0 n^2 \Sigma i \overbrace{(1-\mu_r)}^{-\chi_m} v > 0$$

(II) $$f = -\mu_0 n^2 \Sigma i (1-\mu_r) \cdot (-v) < 0$$

$\Downarrow$

$$V_0 + f = Ri$$

$$V_0 = Ri - f$$

(I) $(R - \mu_0 n^2 \Sigma \chi_m v) i = 44\,V$

diversa resistenza apparente (cfr. $Ri = 60\,V$)

(II) $(R + \mu_0 n^2 \Sigma \chi_m v) i = 76\,V$

$$dU_m = d\left(\frac{1}{2} L i^2\right) = \frac{1}{2} i^2\, dL = \frac{1}{2} i^2 \mu_0 n^2 \Sigma \chi_m\, dx$$
$$F = (+)\frac{dU}{dx} = -\frac{1}{2} i^2 \mu_0 n^2 \Sigma \chi_m$$

$\Rightarrow$ la barra viene risucchiata con forza costante.

$\Rightarrow$ Per mantenere moto uniforme, occorre applicare

$$F_{est} = -F = 400\,N$$

(le cond. iniziali stabiliscono se il moto è ad uscire o a entrare).

Bilancio: $W_J = Ri^2 = 1200\,W$; il generatore eroga $V_0 \cdot i = \begin{cases} 880\,W \\ 1520\,W \end{cases}$

$dU_m/dt = -\frac{1}{2} i^2 \mu_0 n^2 \Sigma \chi_m v$ (fornisce potenza se barra esce) $= 160\,W$

Altri 160 W forniti con lavoro esterno $F_{est} v = 160\,W$

$$dL_{gen}/dt = W_J + \frac{dU_m}{dt} + F_{est} \cdot v$$

Esame 04/07/2005 - Es. 3.

Un toro costituito da lega ferromagnetica con $\mu_r = 400$ (costante), di sezione $\Sigma = 60\ cm^2$ e lunghezza media $l = 2.4\ m$, è posto su di un piano orizzontale.

Il toro è tagliato trasversalmente in due punti diametralmente opposti, uno dei due semitori è fissato al piano, mentre il secondo può scorrere sul piano, senza attrito, lungo la direzione x, come indicato in figura.

Il circuito eccitatore è un solenoide con $N = 1500$ spire percorso dalla corrente $i = 1.6\ A$, mantenuta costante da un generatore esterno.

Il secondo semitoro viene allontanato in modo da creare due traferri, ciascuno di spessore $s = 6.0\ mm$, e mantenuto in posizione tramite due spessori di permeabilità magnetica relativa unitaria, posti nello spazio tra i traferri.

A tale semitoro è collegato un filo inestensibile di massa trascurabile a cui può essere appesa una massa m.

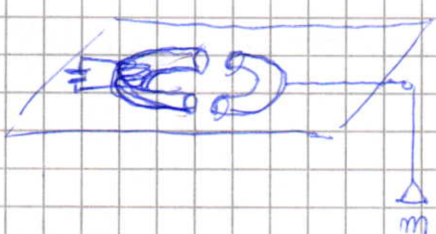
Calcolare:

a) L'intensità di $\vec{B}$ e $\vec{H}$ nel materiale ferromagnetico quando i due semitori non sono ancora separati;

b) L'intensità di $\vec{B}$ e $\vec{H}$ nel materiale e nei traferri a separazione avvenuta;

c) la variazione di energia magnetica nell'operazione di separazione;

d) il valore minimo di m necessario per provocare il distacco del semitoro dagli spessori.



a) Calcoliamo H dal T. di A. su cammino circolare di lunghezza l:

$$\oint H\,dl = Hl = Ni \Rightarrow H = \frac{Ni}{l} \quad \frac{As}{m}$$

$$B = \mu_0 \mu_r H = 0.5\ T$$

b) Ripetiamo il calcolo ma con semi-tori separati:

$$\oint H\,dl = H' l + 2s H_0' = Ni$$

inoltre, poiché le componenti normali di $\vec{B}$ si conservano e ignoriamo il flusso disperso, sarà:

$$B' = B_0' = \mu_0 H_0' = \mu_0 \mu_r H' \Rightarrow H' = \frac{B'}{\mu_0 \mu_r}, \quad H_0' = \frac{B'}{\mu_0}$$

$$\frac{B'}{\mu_0 \mu_r} l + \frac{B'}{\mu_0} \cdot 2s = Ni$$

Da cui: $B' (= B_0') = \dfrac{\mu_0 \mu_r Ni}{l + 2s\mu_r} = 0.17\,T$

$$\left.\begin{aligned} H_0' &= \frac{B'}{\mu_0} = \frac{\mu_r Ni}{l + 2s\mu_r} = 1.3 \cdot 10^5 \,\frac{As}{m} \\ H' &= \frac{B'}{\mu_0 \mu_r} = \frac{Ni}{l + 2s\mu_r} = 3.3 \cdot 10^2 \,\frac{As}{m} \end{aligned}\right\}$$

compatibilmente con $\dfrac{H_{n1}}{H_{n2}} = \dfrac{\mu_{r2}}{\mu_{r1}}$

c) $\Delta U = U_{fin} - U_{in}$

$$U_{in} = \frac{1}{2} BH \cdot \tau = \frac{1}{2} BH \cdot \Sigma l = \text{(sostituendo i valori ricavati)} =$$

$$= \frac{1}{2} \mu_0 \mu_r \left(\frac{Ni}{l}\right)^2 \cdot \Sigma l = \frac{1}{2} \mu_0 \mu_r \frac{N^2 i^2 \Sigma}{l}$$

$$U_{fin} = \frac{1}{2} B_0' H_0' \underbrace{\tau_0}_{2\Sigma s} + \frac{1}{2} B' H' \cdot \underbrace{\tau}_{\Sigma l} = \text{(usando } B' = B_0',\ H_0' = \mu_r H')$$

$$= \frac{1}{2} B' H' (\mu_r \tau_0 + \tau) = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 \mu_r Ni}{l + 2s\mu_r} \frac{Ni}{\cancel{l + 2s\mu_r}} \cancel{(2s\mu_r + l)} \cdot \Sigma$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\mu_0 \mu_r (Ni)^2 \Sigma}{l + 2s\mu_r} = U_{in} \cdot \frac{l}{l + 2s\mu_r}$$

$$\Delta U = U_{in} \left(\frac{l}{l + 2s\mu_r} - 1\right) < 0 \longrightarrow -2\,\mu J$$

d) Il generatore mantiene costante la corrente, per cui (analogo dielettrico)

$$F = + \frac{\partial U_m(x)}{\partial x} \qquad U_m(x) = \frac{1}{2} \Sigma \mu_0 \mu_r \frac{(Ni)^2}{l + 2x\mu_r}$$

$$\Rightarrow F_m(x) = -\,\Sigma \mu_0 \mu_r^2 (Ni)^2 \frac{1}{(l+2x\mu_r)^2}$$

La massa minima che provoca il distacco è quella per cui

$$mg = \Sigma \mu_0 \mu_r^2 (Ni)^2 \frac{1}{(l+2x\mu_r)^2}\bigg|_{x=0} \Rightarrow 13.7\ kg$$

(è massima per $x=0$)