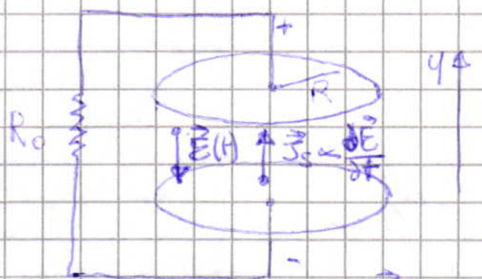
IV 10.5

Un condensatore piano con armature circolari ($\Sigma = 5 \cdot 10^{-2}\, m^2$, $h = 1\, cm$) caricato con una d.d.p. $V_0 = 10^4 V$, viene lasciato scaricare attraverso un resistore di resistenza $R_0 = 10^6 \Omega$.

Calcolare il flusso totale di energia dall'interno all'esterno del condensatore durante la scarica.



Dobbiamo calcolare il vettore di Poynting ~~all'~~ all'interno del condensatore.

Quindi occorrono $\vec{E}(t)$ e $\vec{B}(t)$ all'interno.

$\vec{B}$ origina dalla corrente di spostamento generata dalla scarica (che fa variare $\vec{E}$ nel tempo).

Quindi $\vec{J}_S = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \varepsilon_0$, con $\vec{E}(t) = V(t)/R \cdot (-\hat{y})$

Poiché $\vec{E}$ decresce, la sua derivata è orientata come $\hat{y}$ (v. figura)

Dunque il campo $\vec{B}$ associato alla corrente di spostamento si calcola con il T. di A. generalizzato: lungo la superficie cilindrica che delimita il condensatore abbiamo:

$$2\pi R \cdot B = \mu_0 \cdot \underbrace{\vec{J}_S \cdot \pi R^2}_{\text{corrente}} \longrightarrow B = \frac{\mu_0 R}{2} \cdot \underbrace{\varepsilon_0 \left|\frac{\partial E}{\partial t}\right|}_{-\varepsilon_0 \partial E/\partial t} = \frac{R}{2c^2}\left|\frac{\partial E}{\partial t}\right| \quad \left(c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}\right)$$

Le linee di forza sono circonferenze ortogonali all'asse e l'orientazione di $\vec{B}$ è coerente con la consueta convenzione ($\Rightarrow$ antiorario)

Il vettore $\vec{I}$ (o $\vec{S}$, secondo le diverse convenzioni nei libri di testo) è

$$\vec{I} = \vec{E} \times \vec{H} = (\text{in q. caso}) = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}$$

ed è dunque orientato radialmente in verso uscente dal condensatore il modulo è

$$I = \frac{EB}{\mu_0} = -\frac{E}{\mu_0} \frac{\mu_0 R}{2} \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} = -\frac{\varepsilon_0}{4} R \cdot \frac{\partial E^2}{\partial t}$$

La potenza è

$$P = \int_{\Sigma_{laterale}} \vec{I} \cdot \hat{n}\, dS = I \cdot 2\pi R h = -\frac{\pi R^2 h}{2} \varepsilon_0 \frac{\partial E^2}{\partial t} = \underbrace{-\frac{1}{2} \varepsilon_0 \left(\frac{\partial E^2}{\partial t}\right)}_{\text{variaz. nel tempo della densità di energia}} \cdot \overline{\sigma}$$

Integrando su tutto il processo di scarica abbiamo:

$$W = \int_0^{\infty} P\,dt = \frac{\sigma \varepsilon_0}{2}\left(E^2(\infty) - E^2(0)\right) = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2(0)\cdot\sigma$$

cioè l'energia immagazzinata nel condensatore all'istante iniziale.

Questo approccio fornisce dunque un'ulteriore interpretazione per la dissipazione nella resistenza dell'energia immagazzinata nel condensatore.

Numericamente,

$$V = V_0 e^{-t/R_0C} \quad , \quad E = \frac{V(t)}{h}$$

$$\Rightarrow I = \frac{\varepsilon_0 R}{4}\left|\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{V_0^2}{h^2} e^{-2t/R_0C}\right)\right| = \frac{\varepsilon_0 R V_0^2}{2h^2 R_0 C} e^{-2t/R_0C}$$

$$R_0 C = R_0 \cdot \frac{\varepsilon_0 \Sigma}{h} = 4.43 \cdot 10^{-5}\ s \quad , \quad R = \left(\frac{\Sigma}{\pi}\right)^{1/2} = 0.126\ m$$

$$I = 12.6 \cdot 10^3\, e^{-4.5\cdot 10^4 t}\ W/m^2$$

$$W = 2.2\ mJ$$

[N.B. meglio rispettare notazione di NV e scrivere $-\frac{\partial E^2}{\partial t}$ al posto del modulo.]

05/09/2007 - es. 4 + considerazioni extra

Un condensatore piano con armature circolari di raggio $R = 20$ cm, distanti $d = 2.0$ cm, è collegato mediante un circuito di resistenza trascurabile a un generatore di forza elettromotrice $V(t) = V_0 \sin \omega t$, di resistenza interna trascurabile, con $V_0 = 10$ V e $\omega = 1.0$ rad/s.

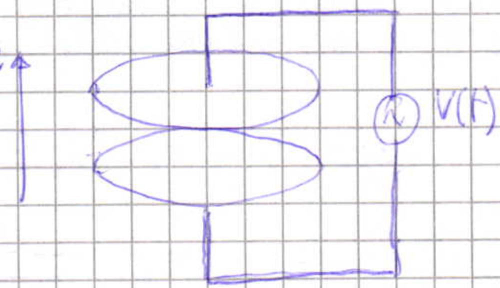
Trascurando gli effetti di bordo, si determinino in modulo, all'istante di tempo $t^* = 1.0$ s:

a) il campo di induzione magnetica B_i in un punto interno al condensatore, a distanza $r_i = 10$ cm dall'asse;

b) il campo B_e in un punto esterno al condensatore, a distanza $r_e = 50$ cm dall'asse;

c) l'energia elettrostatica immagazzinata all'interno del condensatore;

d) l'energia magnetica immagazzinata



a) ignoriamo eff. di bordo:

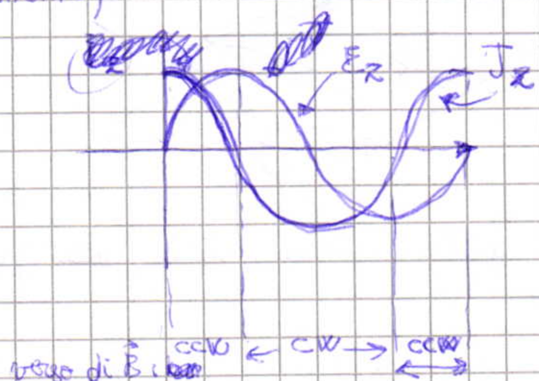
$$\vec{E}(t) = \frac{V(t)}{d} = \frac{V_0 \sin \omega t}{d}$$

(ragionare sulla simmetria e mostrare l'andamento di $\vec{B}$ in ragione della corrente di spostamento)

Perciò

$$J_s = \frac{\varepsilon_0 \omega V_0}{d} \cos \omega t$$

uniforme, non costante.



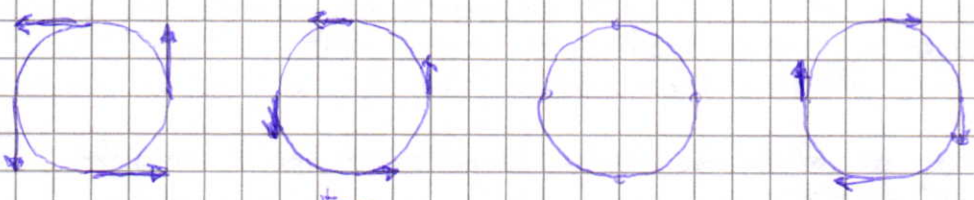
Per il calcolo del modulo usiamo il teorema di Ampere con la corrente di spostamento:

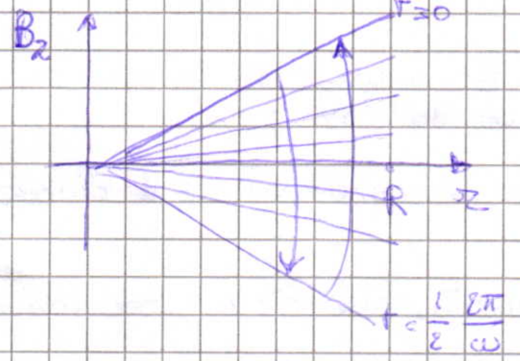
$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \left(\underbrace{\vec{J}_c}_{\vec{0}} + \underbrace{\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}_{\vec{J}_s} \right) \qquad \text{(IV e.d.M.)}$$

$$\Rightarrow 2\pi r_i B(r_i, t) = \mu_0 \Phi_{r_i}(\vec{J}_s) = \mu_0 \frac{\varepsilon_0 \omega V_0}{d} \cos \omega t \cdot \pi r_i^2$$

$$B(r_i, t) = \frac{r_i \omega V_0}{2 c^2 d} \cos \omega t \qquad c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$$

Per $t = t^*$, $B(r_i, t^*) = 1.50 \cdot 10^{-16}\ T$

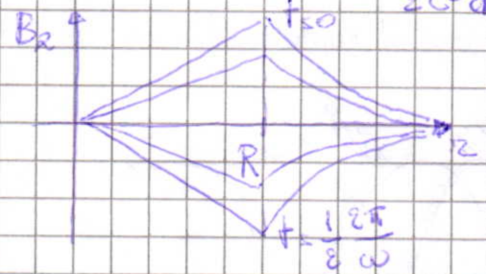




b) Per il campo B_e si ragiona allo stesso modo, ma il flusso di J_s è diverso da zero solo attraverso la sezione πR^2:

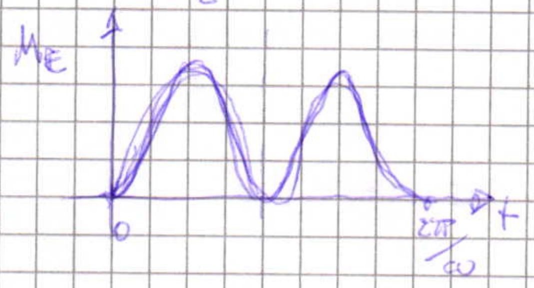
$$2\cancel{\pi} r_e B(r_e, t) = \mu_0 \frac{\varepsilon_0 \omega V_0}{d} \cos\omega t \cdot \cancel{\pi} R^2$$

$$\Rightarrow B(r_e, t^*) = \frac{\omega V_0}{2c^2 d} \cos\omega t \cdot \frac{R^2}{r_e}$$



c) L'energia elettrostatica totale nell'ipotesi di campo elettrico nullo all'esterno è

$$U_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2(t) \cdot \pi R^2 d = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \frac{V_0^2 \sin^2\omega t^*}{d^{\cancel{2}}} \pi R^2 \cancel{d} = 1.97 \cdot 10^{-9}\ J$$



d)

$$U_B = \int_0^R \frac{1}{2\mu_0} B^2\, 2\pi r\, dr \cdot d = \int_0^R \frac{\pi d}{\mu_0} \frac{\omega^2 V_0^2}{4c^4 d^2} \cos^2\omega t \cdot r^3 dr =$$

$$= \frac{\pi \omega^2 V_0^2 R^4}{16 \mu_0 c^4 d} \cos^2 \omega t = (\text{per } t = t^*) = 4.51 \cdot 10^{-29}\ J$$

(va come u_E: ovviamente l'energia entra e esce dal sistema ripartendosi tra u_E e u_B)

Considerazioni sul vettore di Poynting al bordo: v. figura per E_z e J_z

$0 < t < \frac{1}{4}\frac{2\pi}{\omega}$: $\vec{E}$ verso l'alto, $\vec{B}$ antiorario $\Rightarrow$ $\vec{E} \times \vec{B}$ entra

$\Rightarrow$ energia entra nel sistema, infatti u_E e u_B crescono

$\frac{1}{4}\frac{2\pi}{\omega} < t < \frac{1}{2}\frac{2\pi}{\omega}$: $\vec{E}$ verso l'alto, $\vec{B}$ orario $\Rightarrow$ $\vec{E} \times \vec{B}$ esce

$\Rightarrow$ energia esce dal sistema, u_E e u_B decrescono

... e così via.

$$\vec{I}(r=R) = \vec{E} \times \vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}$$

$$\frac{1}{\mu_0} \cdot \frac{V_0 \sin \omega t}{d} \cdot \frac{R \omega V_0}{2c^2 d} \cos \omega t \qquad \text{(entrante o uscente)}$$

$$\Phi_{\text{bordo}}(\vec{I}) = \frac{V_0^2 \omega R}{\cancel{2} \underbrace{\mu_0 c^2}_{1/\varepsilon_0} d^{\cancel{2}}} \sin \omega t \cos \omega t \cdot \cancel{2} \pi R \cdot \cancel{d} =$$

$$= \frac{\varepsilon_0 \pi R^2 \omega V_0^2}{d} \sin \omega t \cos \omega t \qquad \text{(potenza attraverso il bordo)}$$

Compito 15/02/2011, es. 4

Le armature di un condensatore a facce piane parallele, di superficie $S = 80\ cm^2$, vengono allontanate fra loro con velocità costante $v = 3\ mm/s$ dalla distanza iniziale $d_0 = 1\ mm$. Durante il movimento vengono mantenute connesse a un generatore di forza elettromotrice costante pari a 100V.

a) Determinare la densità di corrente di spostamento fra le armature del condensatore in funzione del tempo trascurando possibili effetti di bordo e assumendo trascurabile la resistenza ohmica del circuito.

b) Calcolare il valore numerico della corrente di spostamento all'istante $t_0 = 2s$ e indicarne la direzione e il verso rispetto al vettore campo elettrico.

c) Nell'ipotesi in cui la resistenza R del circuito non possa essere trascurata, scrivere l'equazione esplicita del circuito per la carica $Q(t)$ presente sulle armature del condensatore.

$$C(x) = \varepsilon_0 \frac{S}{d_0 + vt}$$

a) $$E = \sigma/\varepsilon_0 = \frac{CV_0}{S\varepsilon_0} =$$

$$= \frac{V_0}{d_0 + vt}$$

$$J_s = \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{-\varepsilon_0 v V_0}{(d_0 + vt)^2}$$

b) $J_s(t = t_0) = -5.4 \cdot 10^{-8}\ A/m^2$ (antiparallela a $\vec{E}$)

c) Se R non è trascurabile:

$$V_0 = RI(t) + \frac{Q(t)}{C} = R\frac{dQ}{dt} + Q(t)\frac{d_0 + vt}{\varepsilon_0 S}$$