Compito 03/07/2008, es. 4

Un elettromagnete alimentato a corrente alternata ha le espansioni polari a sezione circolare di area A e un traferro di spessore $d \ll \sqrt{A}$.
Il campo d'induzione magnetica $\vec{B}$ nel traferro è spazialmente uniforme e il suo modulo cambia nel tempo secondo la legge $B = B_0 \sin(2\pi\nu t)$.

Un cilindretto di rame di raggio a e altezza h è posto nel traferro con asse coincidente con quello delle espansioni del magnete.

Determinare:

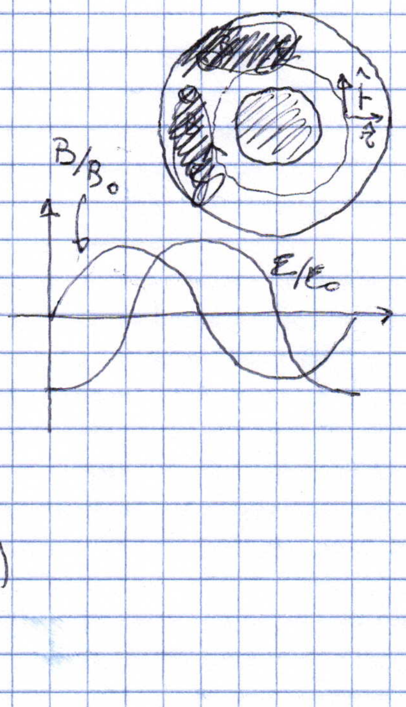
1. il campo elettrico indotto, specificando la forma geometrica delle linee di forza, la loro direzione, il verso e l'espressione analitica della sua dipendenza dal tempo;
2. la potenza dissipata per unità di volume nel cilindretto di rame;
3. la potenza dissipata in media nel cilindretto;
4. il flusso del vettore di Poynting attraverso la superficie laterale del cilindretto di rame.

$\rho = 1.7 \cdot 10^{-8}\ \Omega m$, $B_0 = 0.5T$, $a = 1.5cm$, $h = 3.0cm$, $\nu = 50Hz$
(trascurare la corrente di spostamento e l'autoinduzione nel cilindretto)

1) Da considerazioni di simmetria: linee di forza di $\vec{E}$ circolari su piani ortogonali all'asse del sistema

$$\oint_{\text{cammino circolare}} \vec{E}\cdot d\vec{l} = \Phi(\vec{\nabla}\times\vec{E}) = \Phi\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right)$$

$$\vec{E}(r) = E(r)\hat{t}$$



$$2\pi r E(r) = -\pi r^2 \cdot 2\pi\nu B_0 \cos(2\pi\nu t)$$

2)

$$\Rightarrow J = \frac{E(r)}{\rho} = -\frac{\pi r \nu B_0}{\rho}\cos(2\pi\nu t)$$

$$w = \vec{J}\cdot\vec{E} = \frac{E^2}{\rho} = \frac{\pi^2 r^2 \nu^2 B_0^2}{\rho}\cos^2(2\pi\nu t)$$

3)

$$W = \int w\, d\tau = \frac{\pi^2\nu^2 B_0^2}{\rho}\cos^2(2\pi\nu t)\int_0^a r^2 \cdot 2\pi r\, dr \cdot h =$$

$$= \frac{\pi^3\nu^2 B_0^2 a^4 h}{2\rho}\cos^2(2\pi\nu t) \xrightarrow[\text{media}]{} \frac{\pi^3\nu^2 B_0^2 a^4 h}{4\rho} = 433\,W$$

4) $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} \Big|_{r=a} = - \frac{\pi a \nu B_0^2}{\mu_0} \sin(2\pi\nu t) \cos(2\pi\nu t)\, \hat{r}$

$\phi(\vec{S}) = -2\pi a h \cdot \frac{\pi a \nu B_0^2}{\mu_0} \sin(\ ) \cos(\ )$ che ha media nulla.

05/02/2010 - es. 3

Un solenoide ($l = 0.5$ m, $N = 1000$, raggio $a = 10.0$ cm). Un cilindro ferromagnetico ($\mu_r = 1000$), raggio $b = 5.0$ cm lungo l è inserito coassialmente al solenoide.

Il solenoide è in serie a una resistenza $R = 5\,\Omega$ e un generatore di tensione continua $V_0 = 10$ V.

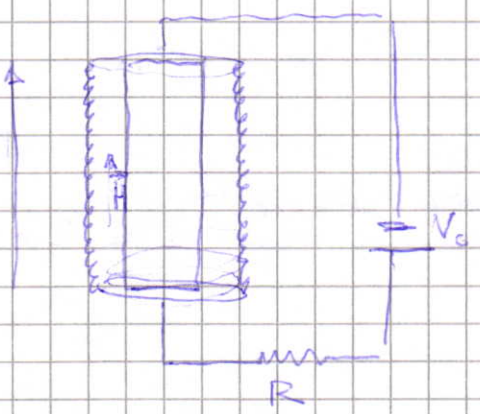
Il circuito viene chiuso a $t=0$.

Calcolare:

a) L'induttanza del solenoide

b) modulo e direzione del campo elettrico a distanza b dall'asse a un tempo $t^* = 5$ s.

c) il flusso del vett. di P. attraverso la superficie laterale del cilindro all'istante t^*



$\vec{H} = H_z \hat{z}$

$H_z = \dfrac{N}{l}\, i$ (uguale nel vuoto e nel materiale)

$B_z = \begin{cases} \mu_0 \mu_r H_z & (r < b) \\ \mu_0 H_z & (b < r < a) \\ 0 & \text{fuori (nel lim di solenoide infinito)} \end{cases}$

$$\phi(B) = N\left[\mu_0 H_z \pi (a^2 - b^2) + \mu_0 \mu_r H_z \pi b^2\right] =$$

$$= N \mu_0 H_z \pi \left[a^2 + b^2(\mu_r - 1)\right]$$

$$L = \frac{\phi}{i} = \frac{N^2}{l} \mu_0 \pi \left[a^2 + b^2(\mu_r - 1)\right] = 19.8\ \text{H}$$

Circuito RL:

$$V_0 - L\frac{di}{dt} = Ri$$

$$i = \frac{V}{R}\left(1 - e^{-t/\tau}\right) \qquad \tau = L/R$$

i varia $\rightarrow$ H varia $\rightarrow$ $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

da considerazioni di simmetria, le linee di $\vec{E}$ sono circonferenze ortogonali all'asse del cilindro. ~~La~~ Circuitaz. di $\vec{E}$ su cammino circolare di raggio B:

$$2\pi \cancel{b} \cdot E = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\mu_0 \mu_r \frac{N}{l} i\right) \pi b^{\cancel{2}} = $$

$$\oint E = \phi_{\pi b^2}(\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \phi_{\pi b^2}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right)$$

$$E = -\frac{\mu_0 \mu_r N \dot{i} b}{2l} = -\frac{\mu_0 \mu_r N V_0 b}{2l \cancel{R} \tau} e^{-t/\tau} = \frac{\mu_0 \mu_r N V_0 b}{2lL} e^{-t/\tau}$$

$$\tau = \frac{L}{\cancel{R}}$$

per $t = t^*$, $E = 8.88 \cdot 10^{-3}$ V/m

$\vec{I} = \vec{E} \times \vec{H}$

- H aumenta, perché aumenta i
- $-\frac{\partial H}{\partial t}$ è negativa $\Rightarrow$ circuitaz. negativa $\Rightarrow$ E orario
  flusso verso l'alto negativo
- $\vec{E} \times \vec{H} \Rightarrow \vec{I}$ entra

$\phi(I) = E \cdot H \cdot 2\pi b l = 4.05$ W

Compito 02/09/2009, es. 4

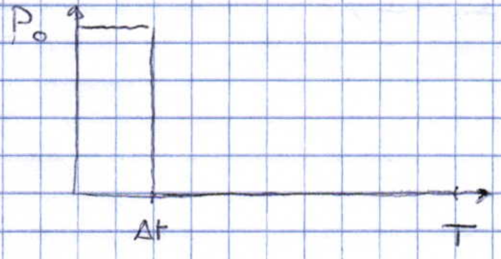
Un laser di potenza è schematizzabile come una sorgente di luce monocromatica di lunghezza d'onda $\lambda = 5320\ \text{Å}$, che emette un fascio di raggi paralleli, di diametro $d = 2\,mm$, di intensità $I_0 = cost$ per un intervallo di tempo $\Delta t = 5\,ms$ che si ripete periodicamente ogni $T = 20\,ms$. All'interno del fascio il campo è approssimabile come un'onda elettromagnetica piana. La potenza è, dunque, elevata durante l'emissione di luce. Il fascio incide ortogonalmente ad una lastrina di materiale parzialmente trasparente, che riflette il 5% della luce e ne assorbe il 3% dell'intensità incidente.
Sapendo che la potenza media (sul periodo T) è $P = 62.5\,W$:

a) Calcolare la potenza e l'intensità medie durante l'impulso P_0 e I_0 del fascio (supposto uniforme nella sezione);

b) scegliendo come asse z la direzione di propagazione, e come asse x quello del campo elettrico dell'onda, assunta a polarizzazione piana, ricavare la forma analitica del campo $\vec{E}(x,t)$ e del campo di induzione magnetica $\vec{B}(x,t)$, quando il campo si propaga nel vuoto, specificando i valori numerici delle grandezze che compaiono in detta rappresentazione analitica;

c) determinare l'impulso totale e la forza media cui è soggetta la lastrina durante ciascun intervallo Δt durante il quale è colpita dalla luce, facendo il confronto con il caso in cui al posto della lastrina trasparente ci fosse una superficie completamente assorbente, oppure riflettente.

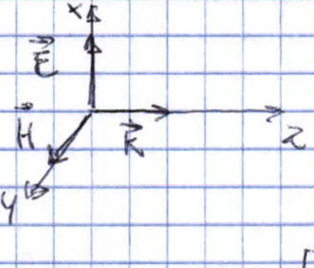
a)



$$P = \frac{P_0 \Delta t}{T} \Rightarrow P_0 = P\frac{T}{\Delta t} = 0.25\,GW$$

$$\text{per def. } I_0 = \frac{P_0}{\pi d^2/4} = 8.0\,KW/m^2$$

b)



$$E_x(z,t) = E_0 \sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}(z - ct)\right], \quad E_y = E_z = 0$$

$$B_y(z,t) = B_0 \sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}(z - ct)\right], \quad B_x = B_z = 0$$

$$I_0 = \langle|\vec{E}\times\vec{H}|\rangle = \frac{1}{2}\frac{E_0 B_0}{\mu_0} = \frac{1}{2}E_0^2\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} = \frac{E_0^2}{2Z_0} \Rightarrow E_0 = 2.45\cdot 10^3\ V/m$$

$$B_0 = \frac{E_0}{c} = E_0\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$$

$B_0 = E_0/c = 0.82\ G$

c) Dalle proprietà della lastra si sa che:

$$I_r = 0.05\, I_0$$

$$I_a = 0.03\, I_0$$

La componente riflessa trasferisce alla lastra una impulso pari al doppio del suo impulso (cfr. urto elastico):

$$q_r = 2 \cdot \frac{I_r S}{c} \cdot \Delta t = 1.7 \cdot 10^{-19}\ Ns$$

$$\left(f_r = \frac{q_r}{\Delta t} = 3.4 \cdot 10^{-11} N \right)$$

La componente assorbita

$$q_a = \frac{I_a S \Delta t}{c} = 5 \cdot 10^{-20}\ Ns \quad \left(f_a = q_a/\Delta t = 1.00 \cdot 10^{-11} N \right)$$

Se la lastra è completam. assorbente, $I_a = I_0$ e $I_r = 0$; se è riflettente, $I_a = 0$ e $I_r = I_0$.