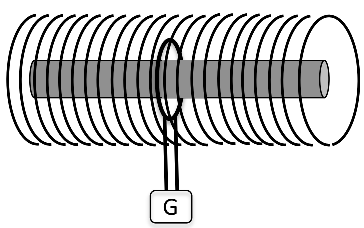
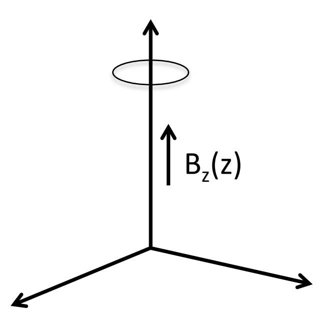
Compito di Esonero n. 2 del 16/6/2016.
per il corso di Elettromagnetismo.
proff. Giagu, Lacava, Rahatlou

Esercizio 1
All'interno di un solenoide cilindrico di lunghezza $l = 1.5$ m e di raggio $r_S << l$, con $N = 500$ spire, sono posti un cilindro di materiale ferromagnetico, con permeabilità ferromagnetica $\mu_r = 100$, lunghezza l e raggio $r_C = 2$ cm e una spira di raggio ρ, con $r_C < \rho < r_S$, e resistenza $R = 10\ \Omega$, connessa a un galvanometro balistico. Il solenoide, il cilindro ferromagnetico e la spira sono coassiali. Nel solenoide viene fatta circolare una corrente $I = 3$ A. Trascurando gli effetti di bordo, si determinino:
a) i campi H, B e M in funzione della distanza dall'asse;
b) le correnti amperiane presenti e il valore;
c) la carica (totale che scorre nella spira) misurata dal galvanometro balistico quando si estrae rapidamente il cilindro ferromagnetico dall'interno del solenoide;
d) il lavoro fatto da una forza esterna, diretta lungo l'asse del sistema, per estrarre il cilindro non considerando la presenza della spira connessa al galvanometro.



Esercizio 2
Un piccolo anello isolante di raggio r, massa $m_g = 2$ mg con una carica distribuita uniformemente $Q = 2\pi r\lambda = 2.0 \cdot 10^{-6}$ C, è posto in posizione orizzontale centrato sull'asse z. Intorno all'asse z è presente un campo di induzione magnetica, simmetrico rispetto all'asse, con componente $B_z(z) = \beta(h - z)$, con $\beta = 1.5$ T/m, da considerarsi la stessa sulle dimensioni della spira. L'anello viene lasciato libero di cadere da fermo dall'altezza $h = 1.2$ m e mentre cade inizia a ruotare intorno al suo asse. Si determinino:
a) la velocità di rotazione ω in funzione di z e il suo valore in $z = 0$;
b) l'energia di interazione dell'anello ruotante col campo magnetico in funzione della posizione z;
c) l'espressione della forza magnetica agente sull'anello nella direzione verticale;
d) l'equazione del moto di caduta.
(Se utile si osservi che $dz = v\ dt$; il momento d'inerzia dell'anello rispetto al suo asse è: $I = m_g r^2$.)



Soluzione secondo esonero Elettromagnetismo

June 16, 2016

1 Esercizio 1

a) All'interno del solenoide il valore del campo H è uniforme, assiale, e dipende dalla densità di spire e dalla corrente che scorre in queste

$$H = nI = \frac{N}{l} I = 1.0 \times 10^3 \text{ A/m} \qquad \text{per } r < r_s \ .$$

Il campo di induzione magnetica B è proporzionale ad H e vale

$$B_0 = \mu_0 H = \frac{\mu_0 N I}{l} = 4\pi \times 10^{-7} H = 1.3 \times 10^{-3} \text{ T} \qquad \text{per } r_c < r < r_s$$

nella regione vuota tra il cilindro di ferro e le spire del solenoide e

$$B = \mu_r \mu_0 H = \frac{\mu_0 \mu_r N I}{l} = \mu_r B_0 = 100 \times 1.3 \times 10^{-3} = 1.3 \times 10^{-1} \text{ T} \qquad \text{per } r < r_c$$

all'interno del cilindro di ferro. Dalla definizione della magnetizzazione

$$M = \frac{B}{\mu_0} - H = (\mu_r - 1) H = \frac{(\mu_r - 1) N I}{l} = 9.9 \times 10^4 \text{ A/m}$$

ed è non nulla solo all'interno del cilindo di ferro, per $r < r_c$.

b) La densità di corrente amperiana di superficie valgono

$$j_s = \vec{M} \times \hat{n} = |M| \hat{\phi} = \frac{(\mu_r - 1) N I}{l} \hat{\phi} = 9.9 \times 10^4 \text{ A/m}$$

$$I_s = j_s l = 1.5 \times 10^5 \text{ A}$$

e scorre in direzione tangenziale sulla superficie laterale del cilindro. La densità di corrente amperiana di volume sia per il fatto che il mezzo è omogeneo, sia se si calcola esplicitamente (in coordinate cilindriche)

$$j_V = \vec{\nabla} \times \vec{M} = 0 \ .$$

c) Per calcolare la carica totale misurata dal galvanometro si può applicare la legge di Felici sapendo che

$$\Phi_i = B_0 (\pi \rho^2 - \pi r_c^2) + \mu_r B_0 \pi r_c^2 \qquad \Phi_f = B_0 \pi \rho^2 \ ,$$

quindi

$$Q = \frac{1}{R} (\Phi_i - \Phi_f) = \frac{1}{R} B_0 \pi r_c^2 (\mu_r - 1) = 1.6 \times 10^{-5} \text{ C}$$

d) Il lavoro fatto dalla forza esterna è pari all'opposto della variazione dell'energia magnetica, di cui basta considerare il contributo che varia nell'estrazione del cilindro di ferro, ovvero quella contenuta nel volume occupato dal cilindro stesso

$$L_{ext} = -\Delta U_m = -\frac{1}{2} B_0 H \pi r_c^2 l + \frac{1}{2} B H \pi r_c^2 l = \frac{1}{2} \pi r_c^2 l \mu_0 \left(\frac{NI}{l} \right)^2 (\mu_r - 1) = 1.2 \times 10^{-1} \text{ J}$$

L'energia magnetica nella regione tra cilindro e solenoide non varia quindi si cancella nel calcolo di ΔU_m.

2 Esercizio 2

a) La variazione di flusso magnetico nella spira produce un campo elettromotore che spinge le cariche dell'anello in direzione tangenziale[1]. Applicando l'equazione di Maxwell

$$\oint \vec{E} \cdot \vec{dl} = -\frac{d\Phi(B)}{dt} \qquad 2\pi r E(r) = -\frac{d}{dt}\left(\pi r^2 B(z)\right) = -\pi r^2 \frac{dB_z}{dt} \qquad E(r) = -\frac{r}{2}\frac{dB_z}{dt} = \frac{r}{2}\beta\frac{dz}{dt} \ .$$

Il momento che la forza genera sull'asse dell'anello è

$$\vec{M} = \int_0^{2\pi} dq\hat{dl} \times \vec{E} = \int_0^{2\pi} \lambda r d\phi \vec{r} \times \vec{E}(r) = \lambda r^3 \pi \frac{dB_z}{dt}$$

e l'equazione del moto è quindi

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\pi\lambda r^3}{I}\frac{dB_z}{dt} \qquad \Rightarrow \qquad \omega(z) - \omega_0 = -\frac{\pi\lambda r^3}{I}(B(z) - B(h)) = -\frac{Qr^3}{2I}(B(z) - B(h))$$

che, considerando che $\omega_0 = 0$ e $B_z(h) = 0$ diventa

$$\omega(z) = -\frac{\pi\lambda r^3}{I}B(z) = -\frac{Q}{2m_g}\beta(h - z) \ .$$

Il valore in $z = 0$ è $\omega(0) = -\frac{Q}{2m_g}\beta h = -0.9$ rad/s. Il segno meno indica che la rotazione è nel verso orario e il vettore della velocità angolare punta verso il basso.

Allo stesso risultato si può giungere considerando che sulle cariche dell'anello in caduta agisce una forza di Lorentz dovuta al campo magnetico: questo non ha solamente componente lungo z (data) ma ha anche una componente radiale che si può ricavare sapendo che deve essere $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ ed è quindi legata alla componente verticale. Questa componente è quella che produce un moto tangenziale delle cariche presenti nell'isolante e quindi mette in moto l'anello. Il momento prodotto da questa forza di Lorentz è lo stesso trovato sopra e porta allo stesso risultato finale.

b) L'anello rotante dotato di carica equivale ad una spira percorsa da corrente ed ha quindi un momento magnetico m pari a

$$m = \frac{dQ}{dt}\pi r^2 = \frac{Q}{T}\pi r^2 = \frac{\lambda 2\pi r\omega}{2\pi}\pi r^2 = \lambda\omega\pi r^3 = \frac{Q\omega(z)r^2}{2}$$

quindi l'energia magnetica si può calcolare come

$$U_m(z) = -\vec{m} \cdot \vec{B} = -\lambda r^3 \pi \omega(z) B(z) = \lambda r^3 \pi \frac{\lambda \pi r^3}{I} B^2(z) = \frac{Q^2\beta^2 r^2}{4m_g}(h - z)^2$$

che dipende dalla posizione z.

c) Da quanto trovato sinora consegue la presenza di una forza magnetica agente sulla spira (equivalente a un momento magnetico $\vec{m}$) diretta lungo z (verso l'alto) data da

$$F = -\nabla U_m = \nabla(\vec{m} \cdot \vec{B}) = \frac{d}{dz}\left(-\frac{Q^2\beta^2 r^2}{4m_g}(h - z)^2\right) = \frac{Q^2\beta^2 r^2}{2m_g}(h - z) \ ,$$

anch'essa dipendente dalla quota z.

d) Considerando le forze agenti nella direzione z (prendendo un asse positivo verso l'alto) si può scrivere l'equazione del moto di caduta

$$m_g\frac{dv}{dt} = m_g\frac{d^2 z}{dt^2} = -m_g g + F_m = -m_g g + \frac{Q^2\beta^2 r^2}{2m_g}(h - z) \ .$$

Volendo si può notare che il secondo termine della forza è molto minore della forza peso quindi, almeno nel tragitto tra la quota h da cui parte l'anello ed il suolo a $z = 0$, il moto è uniformemente accelerato con accelerazione sostanzialmente pari a g [2].

[1] Se fosse un materiale conduttore le cariche produrrebbero una corrente all'interno dell'anello ma essendo isolante, e le cariche presenti solidali con l'anello, la forza che sposta le cariche fa ruotare l'intero anello.

[2] Nel caso in cui l'anello potesse sprofondare a $z < 0$ e supponendo in quella regione il campo B_z continuasse ad avere la stessa forma analitica, il moto finale sarebbe quello di un oscillatore attorno ad una posizione di equilibrio a $z \ll 0$.