

AA 2018-19; canale A-F; A. Maselli e P. M. Santini
Scritto del 18/06/2019

1) Data la funzione $f(z) = \frac{z^{1/3}}{\sinh z}$, individuare le sue singolarità in $\overline{\mathbb{C}}$ e la loro natura, calcolando inoltre, dove è possibile, i corrispondenti residui (scegliendo un'opportuna determinazione della radice).

R. $z_n = i\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$ sono poli semplici, con residuo $(-1)^n \sqrt[3]{\pi|n|} \exp(i\pi/6)$, se $n > 0$, e $(-1)^n \sqrt[3]{\pi|n|}i$, se $n < 0$. $f(z) \sim z^{-2/3}$, se $z \sim 0$; quindi 0 è punto di diramazione; ∞ è sia punto di diramazione che punto d'accumulazione di poli semplici.

2) Utilizzando il teorema dei residui, calcolare l'integrale $I = \int_0^{\infty} \frac{\log x}{x^2+4} dx$.

R. $I = \frac{\pi}{4} \log 2$; lo si calcola in due possibili modi: i) integrando $\frac{\log^2 z}{z^2+4}$ sul contorno pac-man, oppure $\frac{\log z}{z^2+4}$ su "mezzo" contorno pac-man, sfruttando la parità di $(x^2+4)^{-1}$

3) Data la serie di Taylor

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{\frac{n}{2}} n!}{n^n} (z - z_0)^n,$$

determinare il suo raggio di convergenza R e studiarne la convergenza (puntuale, assoluta, uniforme) nel piano complesso (inclusa la circonferenza di centro z_0 e raggio R). Sugg. può essere utile far uso della formula di Stirling: $n! = \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n} (1 + O(n^{-1}))$, $n \gg 1$.

R. $R = e/\sqrt{3}$; per $z - z_0 = R e^{i\theta}$, $\frac{3^{\frac{n}{2}} n!}{n^n} (z - z_0)^n = \sqrt{2\pi n} e^{i n \theta} (1 + O(n^{-1}))$. Quindi: conv. assoluta per $|z - z_0| < R$, uniforme per $|z - z_0| \leq \rho < R$, e divergenza per $|z - z_0| \geq R$.

4) i) Sia $f(x) = \lfloor x^2 \rfloor$, dove $\lfloor y \rfloor$ è il più grande intero $\leq y$; calcolare $f'(x)$ per $x \geq 0$. ii) Calcolare $I = \int_0^{\pi} e^x \delta(x \cos x) dx$.

R. i) $f(x) = \sum_{n \geq 1} H(x - \sqrt{n})$, quindi $f'(x) = \sum_{n \geq 1} \delta(x - \sqrt{n})$. ii) $x \cos x$ ha zeri semplici in 0 e in $\pi/2 + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, ma solo 0, $\pi/2$ contribuiscono (0 dà un contributo dimezzato, stando al bordo). Quindi: $I = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} e^{\pi/2}$

5) Sia $\hat{f}(k) = (\mathcal{F}f)(k) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ikx} f(x) dx$ la trasformata di Fourier di $f(x)$, $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$. i) Calcolare $\|\mathcal{F}\|$. ii) Mostrare (con un controesempio) che, se $f \in L^1(\mathbb{R})$, l'implicazione $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ è falsa. iii) Calcolare la trasformata di Fourier $\hat{R}(k)$ della funzione

$$R(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-(x-y)^2}}{y^2+1} dy. \tag{1}$$

R. i) Dalla formula di Plancherel: $\|\mathcal{F}f\|/\|f\| = \sqrt{2\pi}$, $\forall f \in L_2(\mathbb{R})$, segue che $\|\mathcal{F}\| = \sqrt{2\pi}$. ii) Se $f(x) = H(1-x^2) \in L_1(\mathbb{R})$, $\hat{f}(k) = \frac{2\sin k}{k} \notin L_1(\mathbb{R})$. iii) Se $R(x) = \int_{\mathbb{R}} g(x-y)f(y)dy$, con $g(x) = e^{-x^2}$ e $f(x) = (x^2+1)^{-1}$, dal thm. di convoluzione segue che: $\hat{R}(k) = \pi^{3/2}e^{-k^2/4-|k|}$ ($\hat{g}(k) = \sqrt{\pi} \exp(-k^2/4)$ e $\hat{f}(k) = \pi e^{-|k|}$).

6) Dato l'operatore di innalzamento (o traslazione sinistra) $T : l_2 \rightarrow l_2$: $T(x_1, x_2, x_3, \dots) := (x_2, x_3, x_4, \dots)$, $x = (x_1, x_2, x_3, \dots) \in l_2$, dove l_2 è lo spazio delle successioni al quadrato sommabili, i) calcolare $\|T\|$, ii) trovare l'hermitiano coniugato T^\dagger di T , e iii) trovare una soluzione particolare dell'equazione lineare

$$(1 - \alpha T)x = (1, 0, 2, 0, 0, \dots), \quad x \in l_2, \quad \alpha \in \mathbb{C}. \quad (2)$$

R. i) $\|T\| = 1$; ii) $(T^\dagger y, x) = (y, Tx)$, $\forall x, y \in l_2$, quindi $T^\dagger(x_1, x_2, x_3, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots)$. iii) $x = (1 - \alpha T)^{-1}(1, 0, 2, 0, 0, \dots) = (1 + \alpha T + \alpha^2 T^2)(1, 0, 2, 0, 0, \dots) = (1 + 2\alpha^2, 2\alpha, 2, 0, \dots)$; soluzione particolare $\forall \alpha \in \mathbb{C}$.

AA 2018-19; canale A-F; A. Maselli e P. M. Santini
Scritto del 02/07/2019

1) [5] Utilizzando il teorema dei residui, calcolare il seguente integrale [descrivere in modo esplicito il cammino di integrazione] $\int_0^\infty \frac{dx}{x^{1/3}(4+x)}$.

R. $2^{1/3}\pi/\sqrt{3}$.

2) [6] Calcolare il seguente integrale di Fourier, utilizzando il metodo dei residui, $\forall k \in \mathbb{R}$

$$I(k) = \int_{\mathbb{R}} \frac{x e^{ikx}}{(x^2 + 1)^2} dx . \quad (3)$$

R. $I(k) = i\pi k e^{-|k|}/2$

3) [6] Data la funzione $f(z) = \frac{z+\pi}{\sin z}$: (i) determinarne le singolarità in $\bar{\mathbb{C}}$ e la loro natura, calcolandone i residui corrispondenti, (ii) calcolare il valore dell'integrale $I = \oint_{\gamma} f(z) dz$, dove γ e' la circonferenza centrata in 0 e di raggio $3\pi/2$, percorsa in senso antiorario.

R. (i) $z_n = n\pi, n \in \mathbb{Z}, n \neq -1$ poli semplici; $-\pi$ singolarità apparente; ∞ punto di accumulazione poli semplici; $Res(f, z_n) = (-1)^n(n+1)\pi, n \neq -1$; (ii) $I = -2\pi^2 i$.

4) ([3]+[3]) i) Data la successione di funzionali lineari $F^{(n)}(\varphi) = \int_0^\infty n^a e^{-nx} \varphi(x) dx$, determinarne il limite, per $n \rightarrow \infty$, al variare di $a \geq 0$. ii) Calcolare

$$I = \int_{-1}^1 \delta(e^{-x} \sin(\pi x)) dx.$$

R. i) $0 \leq a < 1: F^{(n)} \rightarrow 0; a = 1: F^{(n)} \rightarrow 2\hat{\delta}_0; a > 1: F^{(n)} \rightarrow \infty$. ii)

$$I = \frac{(e+1)^2}{2\pi e} = \frac{1+\cosh 1}{\pi}$$

5) ([2]+[2]+[3]) i) Sviluppate la funzione $f(x) = x$ in serie di Fourier nell'intervallo $[-\pi, \pi]$; ii) dire dove tale serie converge puntualmente, assolutamente e uniformemente, in tale intervallo, individuandone gli eventuali punti di discontinuità e trovando il valore della somma in tali punti; confrontando infine i grafici di $f(x)$ e della somma $S(x)$ della serie su tutto \mathbb{R} .

iii) Usare questi risultati per calcolare le somme notevoli $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}$ e $\sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

R. i) $x \sim S(x) \equiv 2 \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx)$. ii) $S(x)$ conv. puntualmente per $x \in (-\pi, \pi)$, unif. in ogni chiuso contenuto in $(-\pi, \pi)$; non conv. assolutamente. $S(x)$ discontinua in $\pm\pi$, con $S(\pm\pi) = 0$. iii) Parseval: $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} = \pi/4$;

$$x = \pi/2: \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{2n+1} = \pi^2/6$$

6) ([2]+[2]+[3]) i) Mostrare che l'operatore d/dx non è limitato in $L^\infty[a, b]$.
 ii) Mostrare che l'operatore $\hat{p} = -id/dx$ è hermitiano in $L^2[a, b]$, con condizioni periodiche al bordo. iii) Calcolare lo spettro di \hat{p} in $L^2[a, b]$, con condizioni periodiche al bordo (con le relative autofunzioni, se esistono), chiarendo se lo spettro sia discreto, continuo o residuo.

R. Ad es., per $f_n(x) = \frac{\sin(2\pi nx/(b-a))}{n}$, $\|f_n(x)\|_\infty = 1/n$, $\|f'_n(x)\|_\infty = 1$.

Quindi $\frac{\|f'_n\|}{\|f_n\|} = n \not\rightarrow \text{cost.}$ ii) $(f, \hat{p}g) = \int_a^b \bar{f}(-ig')dx = -i[\bar{f}g]_a^b + (\hat{p}f, g) = (\hat{p}f, g)$, poichè $[\bar{f}g]_a^b = 0$. iii) $\hat{p}\psi = \lambda\psi$, $\psi \in \{L^2[a, b], \psi(a) = \psi(b)\}$.
 $\Rightarrow \sigma_p(\hat{p}) = \{\frac{2\pi}{b-a}n\}$, $n \in \mathbb{N}^+$, con $\psi_n(x) = \exp(i\frac{2\pi}{b-a}nx)$. $\sigma_r = \sigma_c = \emptyset$.

AA 2018-19; canale A-F; A. Maselli e P. M. Santini
Scritto del 12/09/2019

1) ([6]) Data la funzione $f(z) = \frac{z-i\pi/2}{\cosh z}$, i) individuare le sue singolarità in $\overline{\mathbb{C}}$ e la loro natura, calcolando inoltre, dove è possibile, i corrispondenti residui. ii) Calcolare l'integrale $I = \oint_C f(z)dz$ lungo la circonferenza di raggio π , centrata nell'origine, e percorsa in senso antiorario.

R. i) $z_n = i\pi(n + 1/2)$, $n \neq 0$ sono poli semplici; $z_0 = i\pi/2$ sing. apparente. $\text{Res}(z_n) = (-1)^n \pi n$. ∞ punto d'acc. di poli semplici. ii) $I = 2\pi^2 i$

2) ([6]) Utilizzando il teorema dei residui, calcolare il seguente integrale (disegnare il cammino di integrazione scelto)

$$I = \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^{1/4}(x+4)^2}$$

R. $I = \pi/16$

3) ([5]) Usando il teorema dei residui, calcolare il seguente integrale (disegnare il cammino di integrazione scelto)

$$g(k, \tau) = \int_{\mathbb{R}} (x - \tau)^{-n} e^{ikx} dx,$$

dove $k \in \mathbb{R}$, n è un intero positivo, e la parte immaginaria del parametro τ è positiva.

R. $g(k, \tau) = H(k) \frac{2\pi i^n k^{n-1}}{(n-1)!} e^{ik\tau}$

4) ([3]+[2]+[2]) i) Data la funzione gradino $H(x)$ ($H(x) = 1$ se $x > 0$, $H(x) = 0$ se $x < 0$), i) svilupparla in serie di Fourier nell'intervallo $[-\pi, \pi]$. ii) Studiare le proprietà di convergenza (puntuale, uniforme, assoluta) della serie in tale intervallo, individuando il valore della somma $S(x)$ della serie negli eventuali punti di discontinuità; disegnare infine i grafici di $H(x)$ e della somma $S(x)$ in \mathbb{R} . iii) Calcolare la somma notevole: $S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

5) ([2]+[2]+[2]) Se $\hat{f}(k) = \exp(-k^4)$ è la trasformata di Fourier di $f(x)$ ($\hat{f}(k) = \int_{\mathbb{R}} \exp(-ikx) f(x) dx$), calcolare le trasformate di Fourier di: i) $g(x) = f'(x)$, ii) $h(x) = xf(x)$, e iii) dell'integrale di convoluzione $R(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{f(y)}{(x-y)^2+1} dy$.

R. $\hat{g}(k) = ik \exp(-k^4)$, $\hat{h}(k) = -4ik^3 \exp(-k^4)$, $\hat{R}(k) = \pi \exp(-(|k| + k^4))$

6) ([3]+[3]) i) Data la successione di funzionali lineari $F^{(n)}(\varphi) = \int_0^{\infty} n^a \exp(-nx^2) \varphi(x) dx$, determinarne il limite, per $n \rightarrow \infty$, al variare di $a \geq 0$. ii) Se $f(x) = (x^2 - 1)H(x)$, esprimere $f'(x)$, $f''(x)$ attraverso distribuzioni notevoli, e calcolare $I = \int_{\mathbb{R}} x e^{-x^2} f''(x) dx$.

R. i) $F^{(n)} \rightarrow 0$, se $0 \leq a < 1/2$; $F^{(n)} \rightarrow \sqrt{\pi}\hat{\delta}_0$, se $a = 1/2$; $F^{(n)} \rightarrow \infty$, se $a > 1/2$. ii) $f'(x) = 2xH(x) - \delta(x)$; $f''(x) = 2H(x) - \delta'(x)$, $I = 2$

AA 2018-19; canale A-F; A. Maselli e P. M. Santini
Scritto del 27/11/2019

1) ([5]) Utilizzando il teorema dei residui, calcolare il seguente integrale [descrivere in modo esplicito il cammino di integrazione]

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 4x}{x^2 + 1} dx . \quad (4)$$

R. πe^{-4}

2) ([6]) Calcolare l'integrale [descrivere in modo esplicito il cammino di integrazione utilizzato]

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{x^3 + 1} dx . \quad (5)$$

R. $= -2\pi^2/27$

3) ([5]) Studiare il dominio di convergenza della seguente serie:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^{2k} z^{2k}}{2k} \quad (6)$$

R. $R = 1/2$. Conv. assoluta in $|z| < 1/2$, uniforme in ogni compatto di $|z| \leq 1/2$ che non contiene $z = \pm i/2$. Divergenza per $z = \pm i/2$ e per $|z| > 1/2$.

4) ([3]+[3]) i) Calcolare $(H(x) \sin x)''$ attraverso note distribuzioni ($H(x)$ è la funzione gradino: $H(x) = 1$ per $x > 0$, e $H(x) = 0$ per $x < 0$). ii) Calcolare l'integrale $I = \int_0^{\pi} \delta((x - \pi/2) \sin x) \exp x dx$.

R. i) $(H(x) \sin x)'' = \delta(x) - H(x) \sin x$, ii) $I = 1/\pi + e^{\pi/2} + e^{\pi}/\pi$

5) ([2]+[2]+[2]) Se la trasformata di Fourier di $f(x) = (x^2 + 1)^{-1}$ è $\hat{f}(k) = \pi e^{-|k|}$, calcolare le trasformate di Fourier delle seguenti funzioni: i) $f_1(x) = (4x^2 + 1)^{-1}$, ii) $f_2(x) = \frac{x}{(x^2+1)^2}$, iii) $f_3(x) = \frac{x}{x^2+1}$ (NON facendo uso del teorema dei residui!).

R. $\hat{f}_1(k) = (\pi/2)e^{-|k|/2}$, $\hat{f}_2(k) = -\frac{1}{2}(ik)\hat{f}(k) = -\frac{i\pi k}{2}e^{-|k|}$, $\hat{f}_3(k) = i\hat{f}'(k) = -i\pi \operatorname{sign}(k)e^{-|k|}$

6) ([2]+[3]+[2]) i) Sviluppare la funzione $f(x) = e^x$ in serie di Fourier nell'intervallo $[-\pi, \pi]$ (suggerimento: conviene usare la base degli esponenziali $\{e^{inx}\}$). ii) Studiare la convergenza puntuale, assoluta e uniforme della serie in $[-\pi, \pi]$, individuare gli eventuali punti di discontinuità della somma

$S(x)$ della serie ed il valore della somma in tali punti; disegnare i grafici di $f(x)$ e $S(x)$ **su tutto** \mathbb{R} . iii) Usare la relazione di Parseval per calcolare la somma notevole $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$.

R. i) $e^x \sim \frac{\sinh(\pi)}{\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{(-1)^n}{1-in} e^{inx}$, ii) $S(x)$ non converge assolutamente; converge unif. a e^x in ogni compatto contenuto in $(-\pi, \pi)$; converge puntualmente a e^x in $(-\pi, \pi)$; converge a $\frac{e^\pi + e^{-\pi}}{2}$ in $\pm\pi$ (punti di discontinuità). iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} = \frac{1}{2} (\pi \coth(\pi) - 1)$

Scritto del 20/01/2020; canale A-F; A. Maselli e P. M. Santini

1) [5] Usare il teorema dei residui per calcolare la seguente trasformata di Fourier (disegnare il cammino di integrazione utilizzato)

$$I(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ikx}}{x^2 + 9} dx, \quad \forall k \in \mathbb{R}. \quad (7)$$

R. $I(k) = (\pi/3) \exp(-3|k|)$

2) [7] Usare il teorema dei residui per calcolare il seguente integrale (disegnare il cammino di integrazione utilizzato)

$$I = \int_0^{\infty} \frac{1}{x^2 + 3x + 2} dx. \quad (8)$$

R. $I = \log 2$, attraverso l'integrazione della funzione $(\log z)/(z^2 + 3z + 2)^{-1}$ sul contorno pacman.

3) ([2]+[4]) i) Calcolare il raggio di convergenza della serie seguente, e ii) le sue proprietà di convergenza in tutto \mathbb{C} al variare del parametro $p \geq 0$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n^p n!} (z - z_0)^n \quad (9)$$

(potrebbe essere utile usare la formula di Stirling: $n! = n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} (1 + O(n^{-1}))$, $n \gg 1$).

R. i) $R = e^{-1}$. ii) Se $0 \leq p \leq 1/2$, conv. assoluta in $|z - z_0| < R$, uniforme in ogni compatto di $|z - z_0| \leq R$ che non contiene $z = z_0 + R$. Divergenza per $z = z_0 + R$ e per $|z - z_0| > R$. Se $p > 1/2$, conv. totale per $|z - z_0| \leq R$. Divergenza per $|z| > R$.

4) ([3]+[3]) i) Data la funzione $f(x) = e^{|x|}$, $x \in \mathbb{R}$, calcolare $f'(x)$ e $f''(x)$ usando note distribuzioni. ii) Calcolare $I = \int_0^{3/2} \delta(e^x \cos(\pi x)) dx$.

R. i) $f'(x) = \text{sign}(x)e^{|x|}$, $f''(x) = e^{|x|} + 2\delta(x)$. ii) $I = (\pi\sqrt{e})^{-1}(1 + (2e)^{-1})$

5) ([3]+[3]) Sia $\hat{f}(k) = (\mathcal{F}f)(k) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ikx} f(x) dx$ la trasformata di Fourier di $f(x)$, $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$. i) Mostrare (con un controesempio) che, se $f \in L^1(\mathbb{R})$, l'implicazione $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ è falsa. ii) Calcolare la trasformata di Fourier $\hat{R}(k)$ della funzione

$$R(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-(x-y)^2}}{y^2 + 9} dy \quad (10)$$

Sugg. può essere utile ricordare i) che la trasformata di Fourier di $g(x) = \exp(-x^2)$ è $\hat{g}(k) = \sqrt{\pi} \exp(-k^2/4)$, e ii) il risultato dell'esercizio 1).

R. i) Se $f(x) = H(1 - x^2) \in L^1(\mathbb{R})$, allora $\hat{f}(k) = 2 \sin(k)/k \notin L^1(\mathbb{R})$. ii) Usando il teorema di convoluzione: $\hat{R}(k) = (\pi^{3/2}/3) \exp(-k^2/4 - 3|k|)$

6)([2.5]+[4.5] pt) Dato l'operatore di innalzamento (o traslazione sinistra) $T : l_2 \rightarrow l_2$:

$$T(x_1, x_2, x_3, \dots) := (x_2, x_3, x_4, \dots), \quad x = (x_1, x_2, x_3, \dots) \in l_2, \quad (11)$$

dove l_2 è lo spazio delle successioni al quadrato sommabili, i) trovare l'hermitiano coniugato T^\dagger di T , e ii) lo spettro di T , specificando se sia spettro discreto, continuo o residuo.

R. i) $T^\dagger(x_1, x_2, x_3, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots)$. ii) $\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T)$, con $\sigma_p(T) = \{|\lambda| < 1\}$ e autovettori $\underline{x}_\lambda = (1, \lambda, \lambda^2, \dots) \in l_2$, e $\sigma_c(T) = \{|\lambda| = 1\}$, con $\underline{x}_\lambda = (1, \lambda, \lambda^2, \dots) \in l_\infty$

Scritto del 18/02/2020, canale A-F, A. Maselli e P. M. Santini,

1) (5 pt) Calcolare il seguente integrale trigonometrico tramite il metodo dei residui:

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{1 - 2a \cos x + a^2} dx, \quad (0 < a < 1). \quad (12)$$

R. $2\pi/(1 - a^2)$

2) (6 pt) Calcolare l'integrale a valore principale usando il metodo dei residui

$$P.V. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(2\pi x)}{x^2 - 1} dx. \quad (13)$$

R. 0

3) Determinare lo sviluppo in serie di Laurent delle seguenti funzioni nel dominio specificato

$$\begin{aligned} f_1(z) &= \frac{z+2}{z^2-4z+3} & 2 < |z-1| < \infty, \\ f_2(z) &= \frac{z}{z^2-1} & 1 < |z+2| < 3. \end{aligned} \quad (14)$$

R. $f_1(z) = \frac{1}{z-1} + 5 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^{n-2}}{(z-1)^n}$, $f_2(z) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(z+2)^n} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+2)^n}{3^{n+1}}$

4) ([3]+[3]) i) Data la successione di funzionali lineari $\{F^{(n)}\}$ definita da $F^{(n)}(\varphi) = n^a \int_0^{\infty} x^2 e^{-nx^2} \varphi(x) dx$, determinarne il limite, per $n \rightarrow \infty$, al variare di $a \geq 0$ (può essere utile ricordare che $\int_0^{\infty} x^2 \exp(-x^2) dx = \sqrt{\pi}/4$). ii)

Calcolare l'integrale $I = \int_0^{\infty} \delta(e^x \sin(\pi x)) dx$.

R. i) $F^{(n)} \rightarrow 0$ se $0 \leq a < 3/2$; $F^{(n)} \rightarrow (\sqrt{\pi}/2)\hat{\delta}_0$ se $a = 3/2$; $F^{(n)} \rightarrow \infty$ se $a > 3/2$. ii) $I = \frac{e+1}{2\pi(e-1)}$

5) ([2]+[2]+[2]) i) Sviluppare la funzione $H(x)$ in serie di Fourier nell'intervallo $[-\pi, \pi]$, dove H è la funzione gradino ($H(x) = 1, x > 0$; $H(x) = 0, x < 0$).

ii) Dire se la somma $S(x)$ di tale serie converge puntualmente, assolutamente e uniformemente a $H(x)$, in tale intervallo, trovando il valore della somma negli eventuali punti di discontinuità. Disegnare infine i grafici di $H(x)$ e della somma $S(x)$ della serie su tutto \mathbb{R} . iii) Calcolare la somma notevole

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

6) ([2]+[3]+[2]) Dato l'operatore $\hat{p} = -id/dx$, i) mostrare che non è limitato in $C[a, b]$ rispetto alla norma $\|\cdot\|_{\infty}$. ii) Mostrare che è hermitiano sia in $L^2[a, b]$, con condizioni periodiche al bordo, che in $L^2(\mathbb{R})$. iii) Calcolarne lo spettro in $L^2[a, b]$, con condizioni periodiche al bordo (e le relative

autofunzioni, se esistono), chiarendo se sia discreto, continuo o residuo.

R. i) ad esempio, se $f_n(x) = \sin(nx)/n$, $\|f_n\|_\infty = 1/n$, $\|\hat{p}f_n\|_\infty = 1$. Quindi $\|\hat{p}f_n\|_\infty/\|f_n\|_\infty = n$ non limitato.

AA 2019-20. Scritto telematico del 16/06/2020
canale A-D, A. Maselli e P. M. Santini, versione 1

1) (10 pt) Calcolare il seguente integrale tramite il metodo dei residui:

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + 3} dx . \quad (15)$$

R. $e^{-\sqrt{3}}\pi/(2\sqrt{3})$

2) (4 pt) Scrivere lo sviluppo in serie di potenze della funzione $f(z) = \frac{1}{z-z^2}$, centrato in $z_0 = 1$, per $|z - 1| > 1$.

R. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(z-1)^{n+2}}$

3) (10 pt) i) Sviluppare la funzione $f(x) = e^{iax}$, con a reale non intero, in serie di Fourier nell'intervallo $[-\pi, \pi]$ (si suggerisce di usare lo sviluppo in esponenziali); ii) dire dove tale serie converge puntualmente, assolutamente e uniformemente in tale intervallo, individuandone gli eventuali punti di discontinuità e trovando il valore della somma in tali punti. iii) Usare lo sviluppo trovato per calcolare la somma notevole $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{(-1)^n}{n-a}$, calcolando la serie ottenuta in un valore di x opportuno.

R. i) $e^{iax} \simeq \frac{\sin(a\pi)}{\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{(-1)^n}{a-n} e^{inx}$; ii) la somma $S(x)$ della serie converge puntualmente a e^{iax} in $(-\pi, \pi)$, unif. in ogni compatto contenuto in $(-\pi, \pi)$; la serie non converge assolutamente. Il prolungamento periodico è discontinuo in $\pm\pi$, e $S(\pm\pi) = \cos(a\pi)$. iii) In $x = 0$ la convergenza è puntuale e si ottiene $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{(-1)^n}{n-a} = -\frac{\pi}{\sin(a\pi)}$.

4) (4 pt) Calcolare l'integrale $I = \int_{1/2}^{\infty} \delta(\cos(\pi x)) e^{-x} dx$.

R. $\delta(\cos(\pi x)) = \frac{1}{\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(x - n - 1/2)$, quindi $I = \frac{1}{\pi\sqrt{e}} \left(\frac{1}{2} + \sum_{k \geq 1} e^{-k} \right) = \frac{1}{2\pi\sqrt{e}} \frac{e+1}{e-1}$.

5) (4 pt) Dato l'operatore $\hat{L} = a|e^{(1)} \rangle \langle e^{(1)}| + b|e^{(2)} \rangle \langle e^{(2)}| : l_2 \rightarrow l_2$, dove $\{\underline{e}^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}^+}$ è la base canonica in l_2 , trovarne lo spettro in l_2 .

R. Solo spettro discreto $\sigma_p = \{0, a, b\}$. i) $a \neq b$: all'autovalore a corrisponde l'autovettore $\underline{e}^{(1)}$; all'autovalore b l'autovettore $\underline{e}^{(2)}$, e all'autovalore 0 corrispondono gli autovettori $\underline{e}^{(j)}$, $j \geq 2$ (e una qualunque comb. lin.). ii) $a = b$: all'autovalore a corrisponde sia l'autovettore $\underline{e}^{(1)}$ che $\underline{e}^{(2)}$ (e una qualunque comb. lin. dei due). Come sopra per l'autovalore 0.

AA 2019-20. Scritto telematico del 16/06/2020
canale A-D, A. Maselli e P. M. Santini, versione 2

1) (10 pt) Calcolare con il teorema dei residui l'integrale:

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^{1/4}(x^2+1)}. \quad (16)$$

R. $\sec(\pi/8)\pi/2$

2) (4 pt) Scrivere lo sviluppo in serie di Laurent di $f(z) = \frac{1}{z-2}$ centrato in $z_0 = 1$, per $|z-1| > 1$ e $|z-1| < 1$. Si suggerisce di disegnare preventivamente le singolarità ed il centro dello sviluppo.

– $\sum_{n=0}^{\infty} (z-1)^n$ per $|z-1| < 1$ e $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z-1)^{n+1}}$ per $|z-1| > 1$

3) (10 pt) Se $\hat{f}(k) = \sqrt{2\pi}e^{-k^2/2}$ è la trasformata di Fourier di $f(x) = e^{-x^2/2}$ ($\hat{f}(k) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ikx} f(x) dx$), calcolare le trasformate di Fourier delle funzioni $f_1(x) = e^{-x^2}$, $f_2(x) = xe^{-x^2/2}$, e dell'integrale di convoluzione $f_3(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-\frac{(x-y)^2}{2}}}{y^2+1} dy$.

R. $\hat{f}_1(k) = \sqrt{\pi}e^{-k^2/4}$; $\hat{f}_2(k) = -i\sqrt{2\pi}ke^{-k^2/2}$; $\hat{f}_3(k) = \pi\sqrt{2\pi}e^{-k^2/2-|k|}$

4) (4 pt) Se $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{a^n}$, $a > 1$, calcolare $\|f\|_2$.

R. $\|f\|_2^2 = \pi \sum_{n \geq 1} a^{-2n} = \frac{\pi}{a^2-1}$. Quindi $\|f\|_2 = \sqrt{\frac{\pi}{a^2-1}}$

5) (4 pt) Calcolare il $\text{Ker}(2\hat{E}^+ - \hat{1})$, dove $\hat{E}^+ : l_2 \rightarrow l_2$ è definito da $\hat{E}^+(x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_2, x_3, x_4, \dots)$.

R. $(2x_2, 2x_3, 2x_4, \dots) = (x_1, x_2, x_3, \dots)$. Quindi $x_{n+1} = \frac{x_n}{2} = \frac{x_{n-1}}{2^2} = \frac{x_{n-2}}{2^3} = \dots = \frac{x_1}{2^n}$, e $\text{Ker}(2\hat{E}^+ - \hat{1}) = \text{span}\{(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \dots)\}$.

AA 2019-20. Scritto telematico del 16/06/2020
canale A-D, A. Maselli e P. M. Santini, versione 3

1) (10 pt) Calcolare con il teorema dei residui il seguente integrale trigonometrico:

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\cos \theta + 3}. \quad (17)$$

R. $\pi/\sqrt{2}$

2) (4 pt) Trovare il raggio R di convergenza della serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{\sqrt{k}}}{k} (z-z_0)^k$, e chiarire dove converge assolutamente e uniformemente (senza studiare il comportamento al bordo).

R. Raggio di convergenza $R = 1$. Per Hadamard la serie diverge per $|z-z_0| >$

1, converge assolutamente per $|z - z_0| < 1$ e uniformemente per $|z - z_0| \leq \rho < 1$

3) (10 pt) Dato $\hat{E}^- : l_2 \rightarrow l_2$ definito da $\hat{E}^-(x_1, x_2, x_3, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots)$,
 i) Calcolare il suo aggiunto (hermitiano coniugato). ii) Determinare per quali valori di $a \in \mathbb{C}$ esiste unica la soluzione $\underline{x} \in l_2$ dell'equazione $(\hat{1} - a\hat{E}^-)\underline{x} = \underline{e}^{(1)}$ e calcolarla, dove $\underline{e}^{(1)} = (1, 0, 0, \dots) \in l_2$.

R. 3) ii) $\|\hat{E}^-\| = 1$, quindi se $|a| < 1$ esiste limitato l'operatore $(\hat{1} - a\hat{E}^-)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \hat{E}^{-n}$. Poichè inoltre $\hat{E}^{-n}\underline{e}^{(1)} = \underline{e}^{(n+1)}$, si ha $\underline{x} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \hat{E}^{-n}\underline{e}^{(1)} = (1, a, a^2, a^3, \dots) \in l_2$, if $|a| < 1$.

4) (4 pt) Data la successione di funzionali $F^{(n)}(\varphi) = n^a \int_0^{\infty} x^3 e^{-nx^2} \varphi(x) dx$, calcolarne il limite per $n \rightarrow \infty$, al variare di $a \geq 0$. Può essere utile sapere che $\int_0^{\infty} x^3 e^{-x^2} dx = 1/2$.

R. Se $F^{(n)}(\varphi) = n^{a-2} \int_0^{\infty} y^3 e^{-y^2} \varphi(\frac{y}{\sqrt{n}}) dy$, con $y = \sqrt{n}x$. Nell'ipotesi in cui sia possibile fare il limite sotto integrale si ottiene $F^{(n)}(\varphi) \sim n^{a-2} \varphi(0)/2$:
 Quindi: se $0 \leq a < 2$, $F^{(n)} \rightarrow 0$. Se $a > 2$, $F^{(n)} \rightarrow \infty$. Se $a = 2$, $F^{(n)} \rightarrow \hat{\delta}_0$ (si ricordi che $\int_0^{\infty} \delta(x) \varphi(x) dx = \varphi(0)/2$).

5) (4 pt) Data la matrice $A = i\theta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\theta \in \mathbb{R}$, calcolare e^A .

R. $e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$, con $A^{2k} = (-1)^k \theta^{2k} I$, $A^{2k+1} = (-1)^k \theta^{2k} A$. Quindi $e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^{2k+1}}{(2k+1)!} = I \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \theta^{2k}}{(2k)!} + A \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \theta^{2k}}{(2k+1)!} = \cos \theta I + \frac{\sin \theta}{\theta} A = \begin{pmatrix} \cos \theta & i \sin \theta \\ i \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$

AA 2019-20. Scritto telematico del 30/06/2020
canale A-D, A. Maselli e P. M. Santini, versione 1

1) (10 pt) Calcolare l'integrale

$$I = \int_0^{\infty} \frac{x^{-1/2}}{x^3 + 1} dx$$

utilizzando il metodo dei residui.

R. $2\pi/3$

2) (4 pt) Determinare tutti i valori di a) $\log(\sqrt{3} + i)$; b) $(2i)^{1/3}$.

R. a) $\log(2) + i(\frac{\pi}{6} + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$, b) $2^{1/3} e^{i(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3})}$, $k = 0, 1, 2$

3) (10 pt) Dato l'operatore $P = |e^{(2)}\rangle\langle e^{(2)}|$, dove $e^{(2)}$ è il versore canonico $(0, 1, 0, \dots)$ di l_2 , i) calcolare autovalori e autovettori di P in l_2 . ii) Ricordando la relazione tra lo spettro discreto di un operatore A e della funzione $F(A)$ di tale operatore, calcolare autovalori e autovettori di $U(P) = \exp(iaP)$, $a \in \mathbb{R}$ (non è necessario calcolare esplicitamente $U(P)$). iii) Verificare che $U^+ = U^{-1}$.

R. i) P è il proiettore ortogonale su $e^{(2)}$, quindi ha: autovalore 1 con autovettore $e^{(2)}$, e autovalore 0 con autovettori $\{e^{(j)}\}_{j \neq 2}$ (una qualunque comb. lin.). ii) $U = \exp(iaP)$ ha quindi autovalore $\exp(ia)$ con autovettore $e^{(2)}$, e autovalore $\exp(ia \cdot 0) = 1$ con autovettori $\{e^{(j)}\}_{j \neq 2}$ (una qualunque comb. lin.). iii) dalle note del corso: $\hat{1} = \exp((ia - ia)P) = \exp(iaP) \exp(-iaP) = \exp(-iaP) \exp(iaP)$; quindi $U^{-1} = \exp(-iaP)$; inoltre $U^\dagger = (\sum_0^{\infty} \frac{(iaP)^n}{n!})^\dagger = \sum_0^{\infty} \frac{(-iaP)^n}{n!} = \exp(-iaP)$, poichè $P^\dagger = P$.

4) (4 pt) Sviluppare in serie di Fourier la funzione $\sinh x$ nell'intervallo $[-\pi, \pi]$.

R. $\sinh x \simeq \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n e^{inx}$, con $f_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^x - e^{-x}}{2} e^{-inx} dx = \dots = \frac{\sinh \pi}{\pi} \frac{(-1)^n in}{1+n^2}$.

5) (6 pt) Data la funzione $f(x) = H(x)g(x)$, determinare $g(x)$ tale che i) $f(x)$ sia continua e $f''(x) = 2\delta(x)$; ii) $f''(x) = \delta'(x)$.

R. i) $f(x)$ continua $\Leftrightarrow g(0) = 0$; quindi $f'(x) = \delta(x)g(0) + H(x)g'(x) = H(x)g'(x)$, $f''(x) = \delta(x)g'(0) + H(x)g''(x) = 2\delta(x)$. $\Rightarrow g(x) = 2x$. ii) $f'(x) = \delta(x)g(0) + H(x)g'(x)$, $f''(x) = \delta'(x)g(0) + \delta(x)g'(0) + H(x)g''(x) = \delta'(x)$, $\Rightarrow g(x) = 1$.

AA 2019-20. Scritto telematico del 30/06/2020
canale A-D, A. Maselli e P. M. Santini, versione 2

1) (10 pt) Calcolare utilizzando il metodo dei residui il seguente integrale

$$I = \int_0^{\infty} \frac{x^{1/2}}{x^3 + 8} dx$$

R. $\pi/(6\sqrt{2})$

2) (4 pt) Determinare tutti i valori di a) $\sqrt{3} \log(1 - i)$; b) $(-2)^{1/4}$.

R. a) $\sqrt{3} \log(\sqrt{2}) + i\sqrt{3}(\frac{7\pi}{4} + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$, b) $2^{1/4} e^{i(\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2})}$, $k = 0, 1, 2, 3$

3) (10 pt) Dato l'operatore $P = |e^{(1)}\rangle\langle e^{(1)}|$, dove $e^{(1)}$ è il versore canonico $(1, 0, 0, \dots)$ di l_2 , i) calcolare autovalori e autovettori di P in l_2 . ii) Ricordando la relazione tra lo spettro discreto di un operatore A e della funzione $F(A)$ di tale operatore, calcolare autovalori e autovettori di $U(P) = (1 - iaP)(1 + iaP)^{-1}$, $-1 < a < 1$ (non è necessario calcolare esplicitamente $U(P)$). iii) Verificare che $U^+ = U^{-1}$. Si ricordi che $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, con A e B operatori invertibili, e che $F_1(A)F_2(A) = F_2(A)F_1(A)$, dove F_1 e F_2 sono due funzioni dell'operatore A .

R. i) P è il proiettore ortogonale su $e^{(1)}$, quindi ha: autovalore 1 con autovettore $e^{(1)}$, e autovalore 0 con autovettori $\{e^{(j)}\}_{j \neq 1}$ (una qualunque comb. lin.). ii) $U = (1 - iaP)(1 + iaP)^{-1}$ ha quindi autovalore $(1 - ia)/(1 + ia)$ con autovettore $e^{(1)}$, e autovalore $(1 - ia \cdot 0)/(1 + ia \cdot 0) = 1$ con autovettori $\{e^{(j)}\}_{j \neq 1}$ (una qualunque comb. lin.). iii) Ricordando che $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$, si ha che: $U^{-1} = (1 + iaP)(1 - iaP)^{-1}$ e $U^\dagger = ((1 + iaP)^{-1})^\dagger (1 - iaP)^\dagger = ((1 + iaP)^\dagger)^{-1} (1 + iaP) = (1 - iaP)^{-1} (1 + iaP)$, avendo usato $P = P^\dagger$. Infine due funzioni diverse dello stesso operatore commutano, quindi $U^{-1} = U^\dagger$.

4) (4 pt) Sviluppare in serie di Fourier la funzione $\cosh x$ nell'intervallo $[-\pi, \pi]$.

R. $\cosh x = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n e^{inx}$, con $f_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^x + e^{-x}}{2} e^{-inx} dx = \dots = \frac{\sinh \pi}{\pi} \frac{(-1)^n}{1+n^2}$.

5) (6 pt) Data la funzione $f(x) = aH(x)x^n$, con $a \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}^+$, determinare a e n tali che i) $f''(x) = H(x)$; ii) $f''(x) = 2\delta(x)$.

R. $f'(x) = a\delta(x)x^n + anH(x)x^{n-1} = anH(x)x^{n-1}$, poichè $n \in \mathbb{N}^+$, e $f''(x) = an\delta(x)x^{n-1} + an(n-1)H(x)x^{n-2}$. Quindi i) $f''(x) = H(x)$ implica $n = 2$ e $a = 1/2$; ii) $f''(x) = 2\delta(x)$ implica $n = 1$ e $a = 2$.

AA 2019-20. Scritto del 10/09/2020
canale A-D, A. Maselli e P. M. Santini

1) (10 pt) Calcolare il seguente integrale con il metodo dei residui:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3 \sin x}{x^4 + 1} dx .$$

(R.) $\pi \cos(1/\sqrt{2})e^{-1/\sqrt{2}}$

2) (4 pt) Scrivere lo sviluppo in serie di potenze centrato in $z_0 = 1$ della funzione $f(z) = \frac{1}{z-z^2}$, per $|z-1| > 1$.

(R.) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(z-1)^{n+2}}$

3) (10 pt) Dati gli operatori $\hat{D} = d/dx$ e $\hat{P} = |e^{(1)} \rangle \langle e^{(1)}|$, dove $\underline{e}^{(1)} = (1, 0, 0, \dots) \in l_2$, A) calcolare lo spettro di \hat{D} i) nello spazio delle funzioni periodiche di $L^2[a, b]$, esibendo le relative autofunzioni, e ii) in $L^2(\mathbb{R})$. B) Risolvere l'equazione $(\hat{1} - \alpha \hat{P})\underline{x} = \underline{e}^{(1)} + 2\underline{e}^{(2)}$ in l_2 , con $\underline{e}^{(2)} = (0, 1, 0, \dots) \in l_2$, e determinare i valori del parametro α tali che la soluzione esista.

R. A) i) $\sigma_p = \{\lambda_n = \frac{2\pi i}{b-a}n, n \in \mathbb{Z}\}$, $\psi_n(x) = e^{\lambda_n x}$; ii) Non c'è spettro discreto (non esiste $\lambda \in \mathbb{C}$ tale che $e^{\lambda x} \in L^2(\mathbb{R})$). Non c'è spettro residuo (se $\lambda \in \sigma_r$, $\bar{\lambda} \in \sigma_p(\hat{D}^\dagger)$; un assurdo, poichè $\hat{D}^\dagger = -\hat{D}$ e non c'è spettro discreto). Per $\lambda \in i\mathbb{R}$, $e^{\lambda x} \in L_\infty(\mathbb{R})$ e il risolvente è illimitato (la dimostrazione è come negli appunti per l'operatore quantità di moto); quindi $\sigma_c = i\mathbb{R}$. B) $\underline{x} = (\hat{1} - \alpha \hat{P})^{-1} (\underline{e}^{(1)} + 2\underline{e}^{(2)}) = \left(1 + \frac{\alpha}{1-\alpha} \hat{P}\right) (\underline{e}^{(1)} + 2\underline{e}^{(2)}) = \frac{1}{1-\alpha} \underline{e}^{(1)} + 2\underline{e}^{(2)}$, con $\alpha \neq 1$ (per invertire l'operatore si assume $|\alpha| < 1$, essendo \hat{P} proiettore ortogonale con $\|\hat{P}\| = 1$, ma poi si osserva che la soluzione ottenuta è tale per ogni $\alpha \neq 1$). Si poteva arrivare al risultato piu' facilmente risolvendo l'equazione in modo diretto.

4) (4 pt) Se $\hat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ikx} f(x) dx$ è la trasformata di Fourier di $f(x) \in L^2(\mathbb{R})$, calcolare la trasformata di Fourier dell'integrale $F(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-|x-y|} H(1-y^2) dy$, dove $H(\xi)$ è la funzione gradino ($H(\xi) = 1, \xi > 0$, e $H(\xi) = 0, \xi < 0$).

R. Usando il teorema del prodotto di convoluzione: $\hat{F}(k) = TF(e^{-|x|})TF(H(1-x^2)) = \frac{2}{1+k^2} \frac{2 \sin k}{k} = \frac{4 \sin k}{k(1+k^2)}$

5) (4 pt) Calcolare l'integrale $I = \int_0^{2\pi} \delta(e^x \sin x) dx$.

R. $I = \frac{1}{2} + e^{-\pi} + \frac{e^{-2\pi}}{2} = \frac{1}{2}(1 + e^{-\pi})^2$

AA 2019-20. Scritto del 16/11/2020
canale A-D, A. Maselli e P. M. Santini

1) (10 pt) Calcolare il seguente integrale con il metodo dei residui:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(3x)}{(x^2 + 1)^2} dx .$$

R. $2\pi e^{-3}$

2) (4 pt) Determinare tutti i valori di a) $(3i)^{1/2}$, b) $\log(2 + 2i)$

R. a) $\sqrt{3}e^{i\pi(1/4+k)}$, $k = 0, 1$; b) $\log(2\sqrt{2}) + i\pi(1/4 + 2k)$, $k \in \mathbb{Z}$.

3) (10 pt) Dati gli operatori d^2/dx^2 e $E^+ : l_2 \rightarrow l_2$, dove $E^+(x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_2, x_3, x_4, \dots)$, 1) calcolare lo spettro di d^2/dx^2 nello spazio delle funzioni $f(x) \in L^2[0, 1]$ tali che $f(0) = f(1)$ e $f'(0) = f'(1)$. 2) Determinare i valori del parametro $a \in \mathbb{C}$ per cui la soluzione $\underline{x} \in l_2$ dell'equazione $(1 - aE^+)\underline{x} = (1, 2, 3, 0, 0, \dots)$ esiste unica, e calcolare tale soluzione.

R. 1) $d^2/dx^2 f = \lambda f \Rightarrow f = ae^{\sqrt{\lambda}x} + be^{-\sqrt{\lambda}x}$, $\lambda \in \mathbb{C}$. $f(0) = f(1)$ e $f'(0) = f'(1)$ implicano che $e^{\pm\sqrt{\lambda}} = 1$, $\Rightarrow \sqrt{\lambda_n} = 2\pi in$, $n \in \mathbb{Z}$. Quindi gli autovalori sono $\{\lambda_n = -4\pi^2 n^2\}$ e le autofunzioni $f_n^\pm = e^{\pm 2\pi in x}$. 2) Se

$|a| < 1$, esiste unica la soluzione $\underline{x} = (1 - aE^+)^{-1}\underline{y} = \sum_{j=0}^{\infty} a^j (E^+)^j \underline{y} =$

$(1 + 2a + 3a^2, 2 + 3a, 3, 0, \dots) \in l_2$. È soluzione $\forall a \in \mathbb{C}$, ma per $|a| > 1$ non è unica, perchè anche l'equazione omogenea ha soluzione non banale $\underline{h} = (1, 1/a, 1/a^2, \dots) \in l_2$, $\Rightarrow \underline{x} = (1 + 2a + 3a^2, 2 + 3a, 3, 0, \dots) + c \underline{h}$

4) (4 pt) Dire quali delle seguenti funzioni $f_1(x) = \frac{\sin(2x)}{2+\cos x}$, $f_2(x) = \frac{\sin(\pi x)}{2+\cos x}$, $f_3(x) = \frac{\sin(2x)}{1+2\cos x}$ hanno uno sviluppo in serie di Fourier $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n e^{inx}$ in $[-\pi, \pi]$ i cui coefficienti f_n vanno a zero, per $n \rightarrow \infty$, più rapidamente di ogni potenza, e perchè.

R. solo $f_1(x)$, perchè è periodica in $[-\pi, \pi]$ con tutte le sue infinite derivate; $f_2(x)$ non è periodica in $[-\pi, \pi]$ e $f_3(x)$ non appartiene a $L_1(\mathbb{R})$.

5) (4 pt) Calcolare l'integrale $I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \delta(e^{-x} \cos x) dx$.

R. zeri dell'argomento della δ : $x_n = \pi/2 + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sum_{n=-1}^0 e^{n\pi + \pi/2} \delta(x - x_n) dx = \frac{1}{2}(e^{\pi/2} + e^{-\pi/2}) = \cosh(\pi/2)$

AA 2019-20. Scritto del 25/01/2021
canale A-D, P. M. Santini

1) (10 pt) Dato l'integrale:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sqrt[p]{x}}{(x+2)^2} dx, \quad (18)$$

i) determinare per quali valori di $p > 0$ l'integrale è ben definito;
 ii) calcolare l'integrale per $p = 2$ usando il teorema dei residui.

R. i) $p > 1$, ii) $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$

2) (4 pt) Scrivere lo sviluppo in serie di potenze di $f(z) = \frac{1}{z-i}$ centrato in $z_0 = 0$, per $|z| < 1$ e $|z| > 1$. Si suggerisce di disegnare preventivamente le singolarità ed il centro dello sviluppo.

R. $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n i^{n+1} z^n$, $|z| < 1$. $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} i^n z^{-(n+1)}$, $|z| > 1$.

3) (10 pt) Dato l'operatore $\hat{E}^+ : l_2 \rightarrow l_2$ definito da $\hat{E}^+(x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_2, x_3, x_4, \dots)$, i) calcolarne l'aggiunto (hermitiano coniugato); ii) determinare per quali valori del parametro $a \in \mathbb{C}$ il $\text{Ker}(a\hat{E}^+ - 1)$ in l_2 è non banale, e costruirlo; iii) dire per quali valori del parametro $a \in \mathbb{C}$ esiste unica la soluzione dell'equazione $(a\hat{E}^+ - 1)\underline{x} = (1, 1, 1, 0, \dots)$ in l_2 , e trovarla.

R. i) $(\hat{E}^+)^{\dagger} = \hat{E}^-$. ii) Se $|a| > 1$, $\text{Ker}(a\hat{E}^+ - 1) = \{(1, 1/a, 1/a^2, \dots, 1/a^{n-1}, \dots)\} \in l_2$; se $|a| \leq 1$ il Ker è banale. iii) Se $|a| < 1$, esiste unica la soluzione $\underline{x} = -(1 - a\hat{E}^+)^{-1}(1, 1, 1, 0, \dots) = -(1 + a\hat{E}^+ + a^2(\hat{E}^+)^2 + a^3(\hat{E}^+)^3)(1, 1, 1, 0, \dots) = -(1 + a + a^2, 1 + a, 1, 0, \dots)$; tale soluzione è unica anche per $|a| = 1$; non è unica per $|a| > 1$, perchè ad essa si aggiunge un qualunque elemento del $\text{Ker}(a\hat{E}^+ - 1)$.

4) (4 pt) Se $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{2^n}$, calcolare $\|f\|_2$.

R. $\|f\|_2^2 = 2\pi + \pi \sum_{n=1}^{\infty} 4^{-n} = 7\pi/3$

5) (4 pt) Se $\mathcal{F}(f)(k) = \sqrt{2\pi}e^{-k^2/2}$ è la trasformata di Fourier di $f(x) = e^{-x^2/2}$ ($\mathcal{F}(f)(k) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ikx} f(x) dx$), calcolare la trasformata di Fourier di

$g(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-\frac{(x-y)^2}{2}}}{y^2+1} dy$.

R. $\mathcal{F}(g) = \mathcal{F}(\exp(-x^2/2)) \mathcal{F}((x^2+1)^{-1}) = \pi\sqrt{2\pi}e^{-k^2/2-|k|}$

AA 2019-20. Scritto del 22/02/2021

canale A-D, P. M. Santini

1) (10 pt) Usare il teorema dei residui per calcolare l'integrale di Fourier:

$$I(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{(x+i)(x^2+1)} dx \quad (19)$$

al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$.

R. $I(k) = -i\frac{\pi}{2}e^{-k}$, $k \geq 0$. $I(k) = i\pi(k - 1/2)e^k$, $k < 0$.

2) (6 pt) i) Studiare le singolarità di $f(z) = \frac{\cos z}{z^2 - \frac{\pi z}{2}}$ in \mathbb{C} e nel punto ∞ .

ii) Calcolare l'integrale $I = \oint_{\gamma} f(z) dz$, dove γ è la circonferenza centrata nell'origine e di raggio 2, percorsa in senso anti-orario.

R. i) 0 polo semplice; $\pi/2$ singolarità apparente; ∞ sing. essenziale. ii) $I = 2\pi i \operatorname{Res}(f(z), 0) = -4i$.

3) (6 pt) Data la funzione $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{(x^2-4)^a}$, determinare per quali valori del parametro $a \in \mathbb{R}$: i) $f(x) \in L^1(\mathbb{R}^+)$, ii) $f(x) \in L^2(\mathbb{R}^+)$.

R. i) $f \in L^1(\mathbb{R}^+) \Leftrightarrow 3/4 < a < 1$ ($a > 3/4$ per conv. all' ∞ e $a < 1$ per conv. in $x = 2$). ii) $f \notin L^2(\mathbb{R}^+) \forall a \in \mathbb{R}$ ($a > 1/2$ per conv. all' ∞ e $a < 1/2$ per conv. in $x = 2$).

4) (7 pt) i) Costruire lo sviluppo in serie di Fourier di $f(x) = \sin(\pi x)$ in $[-\pi, \pi]$ (sugg. usare l'identità $\sin(ax)\sin(bx) = [\cos((a-b)x) - \cos((a+b)x)]/2$, oppure scrivere $\sin(\pi x)$ attraverso esponenziali). ii) Dire se tale serie converge assolutamente, e dove converge uniformemente. iii) Determinare gli eventuali punti di discontinuità della sua somma $S(x)$ in \mathbb{R} , ed il valore della somma in tali punti.

R. i) $\sin(\pi x) \sim \frac{2\sin(\pi^2)}{\pi} \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}n}{n^2 - \pi^2} \sin(nx)$. ii) No conv. ass.; conv. unif. in ogni chiuso contenuto in $(-\pi, \pi)$. iii) Discontinuità in $x_n = (2n+1)\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, con $S(x_n) = 0$.

5) (4 pt) Calcolare l'integrale $I = \int_0^{2\pi} \delta(x \cos x) e^{-x} dx$.

R. $I = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left(e^{-\pi/2} + \frac{e^{-3\pi/2}}{3} \right)$

AA 2020-21. Scritto straordinario del 05/05/2021
canale A-D, P. M. Santini e A. Urbano

1) [10] Calcolare il valore del seguente integrale

$$\mathcal{I} = \text{PV} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x(x^2 + 4x + 5)} dx$$

con il metodo dei residui. Si discuta esplicitamente e si motivi il cammino di integrazione scelto.

R. 1) La funzione di variabile complessa $f(z) = e^{iz}/z(z^2 + 4z + 5)$ ha singolarità in $z = 0$ (a causa della quale l'integrale è da intendersi nel senso del suo valore principale di Cauchy) e in $z^2 + 4z + 5 = (z + 2)^2 + 1 = 0$, cioè $z = -2 \pm i$. Un possibile cammino di integrazione è dato da $\mathcal{C} = \gamma_R(\theta) + \lambda_2(x) + \gamma_r(\theta) + \lambda_1(x)$ percorso positivamente, dove quindi $\lambda_1(x) = x$ ($r \leq x \leq R$), $\gamma_R(\theta) = Re^{i\theta}$ ($0 \leq \theta \leq \pi$), $\lambda_2(x) = -x$ ($R \geq x \geq r$), $\gamma_r(\theta) = re^{i\theta}$ ($\pi \geq \theta \geq 0$) e dove r e R sono scelti, rispettivamente, sufficientemente piccolo e sufficientemente grande affinché sia $z = -2 + i \in \text{Int}(\mathcal{C})$. Si noti che con questa scelta di contorno $z = 0 \notin \text{Int}(\mathcal{C})$. Il teorema dei residui permette quindi di calcolare $\oint_{\mathcal{C}} f(z) dz = 2\pi i \text{Res}_{z=-2+i} f(z)$ da cui otteniamo $\mathcal{I} = \pi[i - (2 + i)e^{-1-2i}]/5$. Si noti che nel limite $r \rightarrow 0$ e $R \rightarrow \infty$ l'integrale su $\lambda_1 + \lambda_2$ ricostruisce \mathcal{I} mentre l'integrale su γ_R vale zero per il lemma di Jordan e l'integrale su γ_r è dato da $\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\gamma_r} f(z) dz = -\pi i \text{Res}_{z=0} f(z)$.

2) [4] Si consideri la funzione

$$f(z) = (z^2 - 1)^{1/2}. \quad (20)$$

Si identifichi il punto (o i punti) di diramazione e si discuta la natura della singolarità all'infinito (se eventualmente presente). Si illustri una possibile scelta di tagli che renda la funzione monodroma.

R. La funzione $f(z) = (z^2 - 1)^{1/2} = (z + 1)^{1/2}(z - 1)^{1/2}$ ha due punti di diramazione in $z_0 = 1$ e $z_1 = -1$. Entrambi i punti di diramazione sono di ordine 1 (punti di diramazione semplici). Il punto all'infinito non è un punto di diramazione. Un ramo monodromo della funzione si ottiene, ad esempio, tagliando il piano complesso sull'asse reale tra -1 e $+1$. Nel punto all'infinito $f(z)$ ha un polo semplice. Osserviamo infatti che la funzione $f(1/z) = (1 - z^2)^{1/2}/z$ ammette lo sviluppo in serie di Laurent in un anello attorno all'origine (ovvero per $0 < |z| < 1$) dato da $f(1/z) = (1/z) \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} (-1)^n z^{2n} = 1/z - z/2 - z^3/8 + \dots$.

3) [10] Definita la trasformata di Fourier $\hat{f}(k) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ikx} f(x) dx$ della funzione $f(x) \in L^1(\mathbb{R})$, i) mostrare che $\hat{f}(k)$ è uniformemente limitata e $\hat{f}(k) \rightarrow$

0 per $k \rightarrow \pm\infty$. ii) Calcolare la trasformata di Fourier dell'integrale $g(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-\frac{(x-y)^2}{2}}}{y^2+1} dy$, ricordando che la trasformata di Fourier di $e^{-x^2/2}$ è $\sqrt{2\pi}e^{-k^2/2}$.

R. ii) Per il teorema di convoluzione, la TF di $g(x)$ è il prodotto delle TF di $e^{-x^2/2}$ e di $\frac{1}{y^2+1}$; quindi $\hat{g}(k) = \pi\sqrt{2\pi}e^{-(k^2/2+|k|)}$

4) [4] Se $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{3^n}$, calcolare $\|f\|_2$.

R. Relazione di Parseval: $\|f\|_2 = \pi \sum_{n \geq 1} 9^{-n} = \pi/8$.

5) [4] Calcolare l'integrale $I = \int_0^{2\pi} \delta(\sin x)e^{-x} dx$.

R. Tre zeri semplici $0, \pi, 2\pi$ nell'intervallo $[0, 2\pi]$, con $0, 2\pi$ estremi di integrazione. Quindi $I = 1/2 + e^{-\pi} + e^{-2\pi}/2$.

AA 2020-21. Scritto del 22/06/2021
canale A-D, P. M. Santini e A. Urbano

1) [10 pt] Si valuti il seguente integrale

$$\text{PV} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(-\pi x/2)}{(x^2+1)(x-1)} dx \quad (21)$$

applicando il teorema dei residui.

R.

$$\text{PV} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(-\pi x/2)}{(x^2+1)(x-1)} dx = \text{Im PV} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\pi x/2}}{(x^2+1)(x-1)} dx.$$

Consideriamo la funzione di variabile complessa $f(z) = e^{-i\pi z/2}/(z^3 - z^2 + z - 1)$ ed applichiamo il teorema dei residui $\mathcal{C} = \gamma_R \cup \lambda_1 \cup \gamma_r \cup \lambda_2$ scegliendo il contorno come segue $\oint_{\mathcal{C}} f(z) dz = 2\pi i \text{Res}[f(z), -i]$, con: $\gamma_R(\theta) = Re^{i\theta}$, $\pi \leq \theta \leq 2\pi$; $\lambda_1(x) = x$, $R \geq x \geq 1+r$; $\gamma_r(\theta) = 1 + re^{i\theta}$, $0 \geq \theta \geq -\pi$; $\lambda_2(x) = x$, $1+r \geq x \geq -R$. Il calcolo del residuo dà $\text{Res}[f(z), -i] = \frac{e^{-\pi/2}}{4i}(1-i)$, mentre decomponendo su \mathcal{C} e prendendo i limiti $R \rightarrow \infty$ e $r \rightarrow 0$ otteniamo

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ r \rightarrow 0}} \left[\int_{\lambda_1} f(z) dz + \int_{\lambda_2} f(z) dz \right] &= -\text{PV} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\pi x/2}}{x^3 - x^2 + x - 1} dx, \\ \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} f(z) dz &= 0, \\ \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\gamma_r} f(z) dz &= -\pi i \text{Res}[f(z), 1] = -\frac{\pi}{2}, \end{aligned} \quad (22)$$

dove l'integrale nella seconda equazione si annulla per il lemma di Jordan mentre l'integrale nella terza è stato valutato con il lemma delle singolarità indentate. In definitiva, quindi, si ottiene

$$\text{PV} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(-\pi x/2)}{x^3 - x^2 + x - 1} dx = \frac{\pi}{2} e^{-\pi/2} \quad (23)$$

Equivalentemente, notando che $\sin(-\pi x/2) = -\sin(\pi x/2)$, si sarebbe potuto chiudere il percorso nel semipiano complesso superiore.

2) [5 pt] Si consideri la funzione

$$f(z) = \frac{z}{e^z - 1} \quad (24)$$

nel piano complesso esteso \mathbb{C}^* . Si identifichino, specificandone la natura, le singolarità di $f(z)$ e si valutino, ove possibile, i corrispondenti residui.

R. Poiché $e^z - 1 = 0$ per $z_k = 2\pi i k$ con $k \in \mathbb{Z}$, abbiamo singolarità in $z = z_k$. La singolarità $z_0 = 0$ è una singolarità apparente dato che $\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = 1$. Le singolarità $z_k = 2\pi i k$ con $k \neq 0$ sono poli semplici (sono zeri semplici

di $e^z - 1$ ed il residuo vale $\text{Res}[f(z), z_k] = z_k$. Consideriamo il punto all'infinito. Ponendo $w = 1/z$, abbiamo $f(w) = 1/[w(e^{1/w} - 1)]$ che ha singolarità in $w = 0$ (ovvero $z = \infty$) ma anche per $1/w = 2\pi ik$ con $k \in \mathbb{Z}$, cioè in $w_k = -i/2\pi k$ (ovvero $1/z_k$). Le singolarità $\{w_k\}$ chiaramente si accumulano in $w = 0$. Questo significa che $z = \infty$ non è una singolarità isolata ma un punto di accumulazione di poli semplici.

3) [10 pt] Dato $\hat{P} = \underline{e}^{(1)} \cdot \underline{e}^{(1)\dagger} = |e^{(1)}\rangle\langle e^{(1)}|$, dove $\{\underline{e}^{(n)}\}_{n \geq 1}$ è la base canonica in l_2 , i) trovare la soluzione $|x\rangle \in l_2$ dell'equazione

$$\left(\hat{1} - \frac{1}{2}\hat{P}\right)|x\rangle = 2|e^{(1)}\rangle + |e^{(2)}\rangle. \quad (25)$$

ii) Trovare lo spettro dell'operatore $\hat{A} = \hat{1} - \frac{1}{2}\hat{P}$.

R. i) Poichè $\|\hat{P}/2\| = 1/2$, $\underline{x} = (\hat{1} - \frac{1}{2}\hat{P})^{-1} (2\underline{e}^{(1)} + \underline{e}^{(2)}) = \left(\hat{1} + \hat{P}\right) (2\underline{e}^{(1)} + \underline{e}^{(2)}) = 4\underline{e}^{(1)} + \underline{e}^{(2)}$. ii) Applicando $\langle e^{(j)}|$ all'equazione agli autovalori $(\hat{1} - \frac{1}{2}\hat{P})|\psi\rangle = \lambda|\psi\rangle$ si ottiene: $\psi_1/2 = \lambda\psi_1$, $\psi_j = \lambda\psi_j$, $j \geq 2$, con $\psi_j = \langle e^{(j)}|\psi\rangle$, $j \geq 1$. Quindi si ha l'autovalore $1/2$ con autovettore $|e^{(1)}\rangle$, e l'autovalore 1 con autovettori $|e^{(j)}\rangle$, $j \geq 2$. Il risolvente $(\hat{A} - \lambda\hat{1})^{-1}$ esiste limitato $\forall \lambda \neq 1, 1/2$, e vale $\frac{1}{1-\lambda}(\hat{1} + \frac{1}{1-2\lambda}\hat{P})$; quindi non c'è spettro continuo e residuo (la non esistenza di spettro residuo segue anche dal fatto che \hat{A} è hermitiano).

4) [4 pt] Calcolare l'integrale

$$I = \int_0^{3\pi/2} \delta(\cosh(x) \sin(x)) dx. \quad (26)$$

R. $I = 1/2 + 1/\cosh(\pi)$

5) [4 pt] Se la trasformata di Fourier di $f(x) = e^{-x^2}$ è $\hat{f}(k) = e^{-\frac{k^2}{4}}$, calcolare le trasformate di Fourier delle funzioni $f_1(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}}$ e $f_2(x) = x^2e^{-x^2}$.

R. $f_1(x) = xf(x/\sqrt{2}) \Rightarrow \hat{f}_1(k) = i\frac{d}{dk} \left(\sqrt{2}\hat{f}(\sqrt{2}k)\right) = -i\sqrt{2}ke^{-\frac{k^2}{2}}$. $\hat{f}_2(k) = i^2\frac{d^2}{dk^2}\hat{f}(k) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{k^2}{2}\right)e^{-\frac{k^2}{4}}$

AA 2020-21. Scritto del 06/07/2021
canale A-D, P. M. Santini e A. Urbano

1) [10 pt] Calcolare l'integrale

$$\mathcal{I} = \int_0^{\infty} \frac{x^{3/2}}{1+x^3} dx \quad (27)$$

usando opportunamente il teorema dei residui.

Soluzione 1. Consideriamo la funzione complessa $f(z) = \frac{z^{3/2}}{1+z^3}$ e scegliamo il ramo monodromo $z^{3/2} = |z|^{3/2}e^{3i\theta/2}$ con $0 < \theta < 2\pi$ tagliando il piano complesso lungo il semiasse reale positivo. Possiamo quindi calcolare l'integrale sfruttando il taglio ed usando il contorno pacman $\mathcal{C} = \lambda_1 \cup \gamma_R \cup \lambda_2 \cup \gamma_r$ definito dalle parametrizzazioni $\lambda_1(x) = xe^{i\epsilon}$ ($r \leq x \leq R$), $\gamma_R(\theta) = Re^{i\theta}$ ($\epsilon \leq \theta \leq 2\pi - \epsilon$), $\lambda_2(x) = xe^{i(2\pi-\epsilon)}$ ($R \geq x \geq r$), $\gamma_r(\theta) = re^{i\theta}$ ($2\pi - \epsilon \geq \theta \geq \epsilon$), con $\epsilon > 0$. Dal teorema dei residui sappiamo che $\oint_{\mathcal{C}} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=0}^2 \text{Res}[f(z), z_k]$, dove z_k sono le tre radici che verificano l'equazione $1 + z_k^3 = 0$ ovvero $z_0 = e^{i\pi/3}$, $z_1 = -1$ e $z_2 = e^{5i\pi/3}$. Il calcolo dei residui fornisce $\sum_{k=0}^2 \text{Res}[f(z), z_k] = -2i/3$ mentre su \mathcal{C} i contributi su λ_1 e λ_2 riproducono $2\mathcal{I}$ (i contributi su γ_R e γ_r vanno a zero nei limiti $R \rightarrow \infty$ e $r \rightarrow 0$). In definitiva troviamo $\mathcal{I} = 2\pi/3$.

2) [5 pt] Si consideri la funzione

$$f(z) = \left(\frac{1}{z} - \frac{a}{z^2}\right) e^z, \quad \text{con } a \in \mathbb{R}. \quad (28)$$

Si determini la parte principale dello sviluppo in serie di Laurent di $f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n z^n$ in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Si determini per quali valori di a la funzione $f(z)$ non ha una primitiva in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Soluzione 2. Usiamo lo sviluppo di Taylor dell'esponenziale complesso e^z per scrivere $f(z) = \left(\frac{1}{z} - \frac{a}{z^2}\right) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = \left(\frac{1}{z} - \frac{a}{z^2}\right) (1 + z + \dots) = \frac{1}{z} - \frac{a}{z^2} - \frac{a}{z} + \dots = -\frac{a}{z^2} + \frac{1-a}{z} + \dots$. Consideriamo ora una generica curva \mathcal{C} chiusa, semplice e regolare tale che $0 \in \text{Int } \mathcal{C}$. Abbiamo $\oint_{\mathcal{C}} f(z)dz = 2\pi i(1-a)$. Poiché una condizione *necessaria* per l'esistenza della primitiva è che questo integrale si annulli, concludiamo che per $a \neq 1$ la funzione per certo non ammette primitiva in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

3) [12 pt] a) Se \hat{A} è un operatore hermitiano, determinare per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{C}$ l'operatore $e^{\alpha \hat{A}}$ i) è hermitiano; ii) è unitario (basta soddisfare alla proprietà $\hat{U}^\dagger = \hat{U}^{-1}$). b) Se \hat{P} è un proiettore ortogonale,

mostrare che i) $e^{\hat{P}} = \hat{1} + (e - 1)\hat{P}$; ii) $\|e^{\hat{P}}\| = e$.

Soluzione 3. a) $(e^{\alpha\hat{A}})^\dagger = \sum_{k \geq 0} \frac{(\bar{\alpha}\hat{A})^k}{k!} = e^{\bar{\alpha}\hat{A}}$, $(e^{\alpha\hat{A}})^{-1} = e^{-\alpha\hat{A}}$; quindi i) $\alpha \in \mathbb{R}$; ii) $\alpha \in i\mathbb{R}$. b) i) $e^{\hat{P}} = \sum_{k \geq 0} \frac{\hat{P}^k}{k!} = \hat{1} + \hat{P} \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k!} = \hat{1} + (e - 1)\hat{P}$. ii) $\|e^{\hat{P}}\| \leq 1 + (e - 1)\|\hat{P}\| = e$; si ottiene l'uguaglianza per $\underline{x} \in \mathcal{R}(\hat{P})$.

4) [4 pt] Date le funzioni $f(x) = \sum_{n \geq 0} \left(\frac{i}{2}\right)^n e^{inx}$ e $g(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{3^n} e^{inx}$, calcolare il prodotto scalare (f, g) nell'intervallo $[-\pi, \pi]$. Si consiglia di usare il noto isomorfismo euclideo tra ...

Soluzione 4. Si usa l'isomorfismo euclideo tra $L^2[-\pi, \pi]$ e l_2 : $(f, g) = 2\pi \sum_{k \geq 1} \left(\frac{-i}{6}\right)^k = \frac{2\pi}{6i-1}$.

5) [4 pt] Sia $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}^+}$ la successione di funzionali lineari definita da

$$F_n(\varphi) = n^a \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{nx^2 + 1} dx, \quad a > 0. \quad (29)$$

Determinare a cosa converge debolmente tale successione al variare del parametro $a > 0$.

Soluzione 5. $F_n(\varphi) = n^{a-1/2} \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(y/\sqrt{n})}{y^2+1} dy \sim n^{a-1/2} \pi \varphi(0)$, $n \gg 1$. Quindi $F_n \rightarrow 0$ se $0 < a < 1/2$; $F_n \rightarrow \pi \hat{\delta}_0$ se $a = 1/2$; $F_n \rightarrow \infty$, se $a > 1/2$.

AA 2020-21. Scritto del 09/09/2021
canale A-D, P. M. Santini e A. Urbano

1) [10 pt] Usando opportunamente il teorema dei residui, calcolare l'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{e^x + 1} dx, \quad \text{per } a \in (0, 1). \quad (30)$$

[suggerimento: si consideri il contorno rettangolare nel piano complesso di vertici $-R, R, R + 2\pi i, -R + 2\pi i$.]

R1. Il contorno $\mathcal{C} = \lambda_1 \cup \lambda_2 \cup \lambda_3 \cup \lambda_4$ è definito dalle ovvie parametrizzazioni $\lambda_1(x) = x$ ($-R \leq x \leq R$), $\lambda_2(y) = R + iy$ ($0 \leq y \leq 2\pi$), $\lambda_3(x) = x + 2\pi i$ ($R \geq x \geq -R$), $\lambda_4(y) = -R + iy$ ($2\pi \geq y \geq 0$). L'equazione di variabile complessa $e^z + 1 = 0$ ammette solo $z_0 = i\pi$ come soluzione contenuta all'interno di \mathcal{C} . Nel limite $R \rightarrow \infty$ il teorema dei residui ci permette di scrivere

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} \oint_{\mathcal{C}} \frac{e^{az}}{e^z + 1} dz &= (1 - e^{2\pi ia}) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{e^x + 1} dx = 2\pi i \operatorname{Res}[f(z), z_0] \\ &= -2\pi i e^{i\pi a} \longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{e^x + 1} dx = \frac{\pi}{\sin(\pi a)}. \end{aligned} \quad (31)$$

2) [5 pt] Si consideri la funzione

$$f(z) = 2 - z^2 - 2 \cos z. \quad (32)$$

Si trovi la serie di Maclaurin di $f(z)$ e se ne specifichi il raggio di convergenza. Si determini l'ordine dello zero di $f(z)$ per $z = 0$. Si consideri infine la funzione $g(z) = f(1/z)$. Si determini la serie di Laurent di $g(z)$ per $|z| > 0$ e si specifichi il tipo di singolarità in $z = 0$.

R2. Abbiamo $f(z) = 2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!} z^{2n}$. Il raggio di convergenza è $R = \infty$.

Lo zero è di ordine 4. Abbiamo $g(z) = 2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!} \frac{1}{z^{2n}}$ per $|z| > 0$. La singolarità in $z = 0$ è essenziale.

3) [10 pt] Dato $\hat{E}^- : l_2 \rightarrow l_2$ tale che $\hat{E}^-(x_1, x_2, x_3, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots)$, $\underline{x} = (x_1, x_2, x_3, \dots) \in l_2$, i) determinare il Ker e l'immagine di \hat{E}^- ; ii) determinare il Ker di $\hat{A} \equiv \hat{1} - \frac{1}{2}\hat{E}^-$; iii) trovare la soluzione $\underline{x} \in l_2$ dell'equazione $\hat{A}\underline{x} = \underline{e}^{(1)}$, dove $\underline{e}^{(1)} = (1, 0, 0, \dots) \in l_2$.

R3. i) $\operatorname{Ker}(\hat{E}^-) = \{\underline{0}\}$, $\mathcal{R}(\hat{E}^-) = \{\underline{x} \in l_2; x_1 = 0\}$; ii) $\operatorname{Ker} \hat{A} = \{\underline{0}\}$; iii) $\|\hat{E}^-/2\| = 1/2$, quindi esiste unica la soluzione $\underline{x} = \sum_{k \geq 0} (\hat{E}^-/2)^k \underline{e}^{(1)} =$

$$\sum_{k \geq 0} \underline{e}^{(k+1)}/2^k = (1, 1/2, 1/2^2, \dots, 1/2^{k-1}, \dots) \in l_2.$$

4) [4 pt] Calcolare l'integrale

$$I = \int_0^{\infty} \delta(x(x^2 - 3x + 2)) e^{-x} dx. \quad (33)$$

R4. $I = 1/4 + e^{-1} + e^{-2}/2$

5) [4 pt] Se la funzione $f(x)$ ammette il seguente sviluppo di Fourier in $[-\pi, \pi]$

$$f(x) = 1 + \sum_{n \geq 1} \left(\frac{\sin(nx)}{n} + (-1)^n \frac{\cos(nx)}{n} \right), \quad (34)$$

calcolare $\|f\|_2$ (nel calcolo, potrebbe essere utile conoscere le somme delle seguenti serie $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$).

R5. Parseval: $\|f\|_2 = \sqrt{2\pi + \pi \sum_{n \geq 1} (1/n^2 + 1/n^2)} = \sqrt{2\pi + \pi^3/3}$

AA 2020-21. Scritto straordinario del 15/11/2021
canale A-D, P. M. Santini e A. Urbano

1) [10 punti] Usando opportunamente il teorema dei residui, si calcoli

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1+a^2-2a\cos\theta}, \quad \text{per } a > 1 \quad (35)$$

R. Usiamo il cambiamento di variabili $z = e^{i\theta}$ per cui $\cos\theta = (z + 1/z)/2$. L'integrale diventa $\oint_{\gamma} \frac{dz}{(z-a)(az-1)}$ dove γ è la circonferenza unitaria; la funzione integranda presenta singolarità in $z = a$ e $z = 1/a$. Quando $a > 1$, solo il residuo in $z = 1/a$ cade all'interno della circonferenza unitaria. Il residuo che ci interessa è dato da $\text{Res}\left[\frac{i}{(z-a)(az-1)}, z = 1/a\right] = \frac{-i}{a^2-1}$ e, di conseguenza, troviamo che $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1+a^2-2a\cos\theta} = \frac{2\pi}{a^2-1}$.

2) [5 punti] Calcolare tutti i valori di

$$\text{Ln}[(1+i)^{\pi i}] \quad (36)$$

dove Ln è il logaritmo complesso.

R. Per prima cosa riscriviamo $(1+i)^{\pi i} = e^{i\pi \text{Ln}(1+i)} = e^{-\pi^2/4+2p\pi^2+i\pi \log \sqrt{2}} = e^{-\pi^2/4+2p\pi^2} e^{i\pi \log \sqrt{2}}$, con $p \in \mathbb{Z}$. Dopo di che, calcoliamo il logaritmo complesso $\text{Ln}[(1+i)^{\pi i}] = \pi^2(2p - \frac{1}{4}) + i\pi(\log \sqrt{2} + 2q)$, con $p, q \in \mathbb{Z}$.

3) [3+3+4] Dato l'operatore $\hat{A} = |\underline{e}^{(1)}\rangle\langle \underline{e}^{(1)}| + 2|\underline{e}^{(2)}\rangle\langle \underline{e}^{(2)}|$, $\hat{A} : l_2 \rightarrow l_2$, dove $\{\underline{e}^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}^+}$ è la base canonica in l_2 , a) determinare il $\text{Ker}(\hat{A})$, b) l'immagine $\mathcal{R}(\hat{A})$, e c) lo spettro di \hat{A} in l_2 .

R. a) $\text{Ker}(\hat{A}) = \text{span}\{\underline{e}^{(n)}\}_{n \geq 3}$; b) $\mathcal{R}(\hat{A}) = \text{span}\{\underline{e}^{(1)}, \underline{e}^{(2)}\}$; c) lo spettro è discreto e vale $\{0, 1, 2\}$. L'autovettore corrispondente a 0 è un qualunque elemento del $\text{Ker}(\hat{A})$; l'autovettore corrispondente a 1 è $\underline{e}^{(1)}$ e l'autovettore corrispondente a 2 è $\underline{e}^{(2)}$.

4) [4] Se $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n} \cos(nx)$, calcolare $\|f\|_2$.

R. $c_n = e^{-n}$, $n \geq 0$. Dalla relazione di Parseval: $\|f\|_2^2 = 2\pi|c_0|^2 + \pi \sum_{n \geq 1} |c_n|^2 = \pi \frac{2e^2-1}{e^2-1}$

5) [4] Se $f(x) = \begin{cases} e^x - 1, & x < 0, \\ ax, & x > 0 \end{cases}$, con a parametro reale, determinare a affinché $f''(x)$ non contenga la δ di Dirac.

R. $f(x) = axH(x) + (e^x - 1)H(-x)$, allora $f'(x) = aH(x) + ax\delta(x) - (e^x - 1)\delta(x) + H(-x)e^x = aH(x) + H(-x)e^x$, e $f''(x) = (a-1)\delta(x) + e^x H(-x)$. Quindi $a = 1$

Scritto del 17/01/2022
canale A-D, P. M. Santini e A. Urbano

1) [10 punti] Usando opportunamente il teorema dei residui, si calcoli

$$\text{PV} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x(x^3+1)}. \quad (37)$$

R. Scriviamo

$$\text{PV} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x(x^3+1)} = 2\pi i \text{Res}[f(z), \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}] + \pi i \text{Res}[f(z), 0] + \pi i \text{Res}[f(z), -1] \quad (38)$$

$$= 2\pi i(-1/3) + \pi i + \pi i(-1/3) = 0. \quad (39)$$

con $f(z) = 1/z(z^3+1)$. Si noti che sono state indentate le singolarità che cadono sull'asse reale in $z=0$ e $z=-1$, mentre, chiudendo il contorno di integrazione nel semipiano complesso superiore, l'unica singolarità interna si trova in $z = e^{i\pi/3}$.

2) [5 punti] Si trovi lo sviluppo in serie di Laurent $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n$ della seguente funzione

$$f(z) = \frac{1}{z^2(1-z)} \quad (40)$$

in ciascuno dei domini di \mathbb{C} in cui tale espansione può essere definita.

R. Distinguiamo $0 < |z| < 1$ e $|z| > 1$. Se $0 < |z| < 1$ scriviamo

$$f(z) = \frac{1}{z^2(1-z)} = \frac{1}{z^2} \sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \sum_{n=-2}^{+\infty} z^n \quad (41)$$

Viceversa, se $|z| > 1$ scriviamo

$$f(z) = \frac{1}{z^2(1-z)} = -\frac{1}{z^3} \frac{1}{1-1/z} = -\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{z^n}. \quad (42)$$

3) (10 pt) Dato l'operatore $\hat{A} = |e^{(1)}\rangle\langle e^{(1)}| + 3|e^{(2)}\rangle\langle e^{(2)}|$, dove $e^{(j)}$ è il versore canonico di l_2 con tutte le componenti nulle tranne la j -esima, che vale 1, i) calcolare Ker e immagine di \hat{A} ; ii) calcolare lo spettro di \hat{A} in l_2 (non dimenticare il calcolo degli autovettori, se esistono). iii) Ricordando la

relazione tra lo spettro discreto di un operatore \hat{A} e della funzione $F(\hat{A})$ di tale operatore, calcolare autovalori e autovettori di $F(\hat{A}) = \exp(2i\hat{A})$ (non è necessario calcolare esplicitamente $F(\hat{A})$).

R. i) $\text{Ker}\hat{A} = \text{span}\{e^{(j)}, j > 2\}$, $\mathcal{R}(\hat{A}) = \text{span}\{e^{(1)}, e^{(2)}\}$. ii) Essendo un operatore di rango finito (l'immagine a dimensione finita), ha solo spettro discreto, con autovalori $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1$ e $\lambda_3 = 3$, e autovettori rispettivamente nel $\text{Ker}\hat{A}$, $e^{(1)}$ e $e^{(2)}$. iii) L'operatore $\exp(2i\hat{A})$ ha autovalori $\exp(2i\lambda_j)$, $j = 1, 2, 3$, e gli stessi autovettori di \hat{A} .

4) (4 pt) i) Sviluppare in serie di Fourier la funzione e^{2x} nell'intervallo $[-\pi, \pi]$. ii) La somma di tale serie converge? Converte assolutamente?

$$\text{R. } e^{2x} \sim \frac{\sinh(2\pi)}{\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{(-1)^n e^{inx}}{2-in} = \frac{\sinh(2\pi)}{\pi} \left(\frac{1}{2} + \sum_{n \geq 1} (-1)^n \left(\frac{4 \cos(nx) + 2n \sin(nx)}{n^2 + 4} \right) \right).$$

La somma converge in $(-\pi, \pi)$, ma non converge assolutamente.

5) (4 pt) Costruire una soluzione $g(x)$ dell'equazione $g''(x) = 2\delta(x)$, dove $\delta(x)$ è la funzione δ di Dirac.

R. La soluzione generale è $g(x) = 2xH(x) + ax + b$, con a e b costanti arbitrarie. Soluzioni particolari rilevanti sono $g_1(x) = 2xH(x)$ ($a = b = 0$) e $g_2(x) = |x|$ ($a = -1, b = 0$).

Scritto del 09/02/2022
canale A-D, P. M. Santini e A. Urbano

1) [**11 punti**] Usando il teorema dei residui, si calcolino i seguenti integrali

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \cos x}{x^2 + 1} dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + 1} dx. \quad (43)$$

R. Usando il teorema dei residui scriviamo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x e^{ix}}{x^2 + 1} = 2\pi i \operatorname{Res}\left[\frac{z e^{iz}}{z^2 + 1}, i\right] = \frac{\pi i}{e}, \quad (44)$$

per cui, separando parte reale e parte immaginaria, troviamo $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \cos x}{x^2 + 1} = 0$ e $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + 1} = \pi/e$.

2) [**4 punti**] Assumendo $p \in \mathbb{N}$, si calcoli il raggio di convergenza R della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^p (z - 3i)^n, \quad (45)$$

e se ne specifichi il tipo di convergenza (escludendo il comportamento sul bordo).

R. Possiamo calcolare R come

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^p}{(n+1)^p} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 + 1/n} \right)^p = 1. \quad (46)$$

La serie diverge per $|z - 3i| > 1$, converge assolutamente per $|z - 3i| < 1$ ed uniformemente in $|z - 3i| \leq \rho$ con $\rho < 1$.

3) (**10 pt**) A) Dato l'operatore derivata $\hat{D} = \frac{d}{dx}$, i) calcolarne l'aggiunto (hermitiano coniugato) nello spazio delle funzioni periodiche di $L^2[a, b]$, ii) trovarne lo spettro in tale spazio, esibendo le relative autofunzioni. B) Dato l'operatore $\hat{A} = |e^{(1)}\rangle\langle e^{(1)}| + 2|e^{(2)}\rangle\langle e^{(2)}|$, dove $\{\underline{e}^{(j)}\}_{j \in \mathbb{N}^+}$ è la base canonica di l_2 ($\underline{e}^{(j)}$ è il versore che ha componente 1 nel sito j e 0 in tutti gli altri), risolvere l'equazione $(\hat{1} + \hat{A})\underline{x} = \underline{e}^{(1)} + 3\underline{e}^{(3)}$ in l_2 .

R. A) i) $\hat{D}^\dagger = -\hat{D}$; ii) $\sigma_p = \{\lambda_n = \frac{2\pi n}{b-a}i, \}$, $n \in \mathbb{Z}$, $\psi_n(x) = e^{\lambda_n x}$. B) $\underline{x} = \underline{e}^{(1)}/2 + 3\underline{e}^{(3)}$.

4) (4 pt) Se $\hat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ikx} f(x) dx$ è la trasformata di Fourier di $f(x) \in L^2(\mathbb{R})$, calcolare la trasformata di Fourier di $F(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{H(1-y^2)}{(x-y)^2+1} dy$, dove $H(\xi)$ è la funzione gradino ($H(\xi) = 1, \xi > 0$, e $H(\xi) = 0, \xi < 0$). (si suggerisce l'uso del teorema di convoluzione)
 R. $TF(H(1-x^2)) = 2 \sin k/k, TF((1+x^2)^{-1}) = \pi e^{-|k|}$; quindi $TF(F(x)) = 2\pi \frac{\sin k}{k} e^{-|k|}$.

5) (4 pt) Calcolare l'integrale $I = \int_{-\pi}^{\pi} \delta(e^x \cos x) dx$.
 R. $I = 2 \cosh\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

Scritto del 09/05/2022
canale A-D, P. M. Santini e A. Urbano

1) [9 punti] Usando il teorema dei residui, calcolare l'integrale

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{13 + 5 \cos t}, \quad (47)$$

specificando il contorno di integrazione sul piano complesso.

R.

$$I = (-2i) \oint_{\gamma} \frac{dz}{26z + 5z^2 + 5} = 4\pi \operatorname{Res}_{z=-1/5} \left[\frac{1}{26z + 5z^2 + 5} \right] = \frac{\pi}{6}. \quad (48)$$

γ è la circonferenza unitaria del piano complesso percorsa in senso antiorario; la funzione $\frac{1}{26z+5z^2+5}$ ha poli in $z = -5$ e $z = -1/5$ e solo $z = -1/5$ cade all'interno di γ .

2) [6 punti] Si consideri la funzione

$$f(z) = \frac{z^2}{\cos(\pi z) + 1}. \quad (49)$$

Si trovino tutte le singolarità isolate in \mathbb{C} e se ne indichi la natura.

R. Poniamo $g(z) := \cos(\pi z) + 1$. Abbiamo $g(z) = 0$ quando $z_k = 2k + 1$ con $k \in \mathbb{Z}$. Inoltre notiamo che $g'(z_k) = -\pi \sin(\pi z_k) = 0$ mentre $g''(z_k) = -\pi^2 \cos(\pi z_k) = \pi^2 \neq 0$. z^2 è ovviamente una funzione intera che non si annulla in z_k . Dalla relazione tra zeri e poli, concludiamo quindi che $z_k = 2k + 1$ sono tutti poli del secondo ordine.

3) (2+2+6 pt) Dato l'operatore $E^+ : l_2 \rightarrow l_2$, dove $E^+(x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_2, x_3, x_4, \dots)$, i) calcolare $\|E^+\|$; ii) calcolare l'hermitiano coniugato di E^+ ; iii) calcolare la soluzione $\underline{x} \in l_2$ dell'equazione $(2 - E^+)\underline{x} = (1, -1, 2, 0, 0, \dots)$.
R. $\|E^+\| = 1$, $(E^+)^\dagger = E^-$, $\underline{x} = (1/2, 0, 1, 0, 0, \dots)$.

4) (2+2 pt) i) Calcolare la trasformata di Fourier $\hat{f}(k)$ di $f(x) = H(L - |x|)$, dove $H(x)$ è la funzione gradino, e ii) calcolare il limite di $\hat{f}(k)$ per $L \rightarrow \infty$.

R. $\hat{f}(k) = 2 \frac{\sin(kL)}{k} \rightarrow 2\pi \delta(k)$, per $L \rightarrow \infty$.

5) (4 pt) Calcolare l'integrale $I = \int_{-\pi}^{\pi} \delta(e^{-x} \sin x) dx$.

R. $I = 1 + \cosh \pi$.

Non scrivere le soluzioni degli esercizi senza mostrare, in modo conciso, come arrivarci.

Scritto del 21/06/2022
canale A-D, P. M. Santini e A. Urbano

1) [10 punti] Si consideri l'integrale

$$I = \int_0^{\infty} \frac{x^{2/3}}{(x^2 + 4)} dx. \quad (50)$$

- o Si specifichi se l'integrale è convergente o va inteso nel senso del suo valore principale.
- o Ne si calcoli il valore usando il teorema dei residui (specificando il contorno di integrazione).

R. L'integrale è convergente. Consideriamo la funzione di variabile complessa $f(z) = z^{2/3}/(z^2 + 4)$ tagliando lungo il semiasse reale positivo. Consideriamo il contorno di integrazione pacman. Abbiamo poli semplici in $z_0 = 2i = 2e^{i\pi/2}$ e $z_1 = -2i = 2e^{i3\pi/2}$. L'integrale vale $\pi/2^{1/3}$.

2) [5 punti] Si consideri la funzione

$$f(z) = \frac{\sin z}{z^2 - z^3}. \quad (51)$$

Si discutano le singolarità in \mathbb{C} calcolandone (eventualmente) il residuo.

R. Abbiamo poli semplici in $z = 0$ e $z = 1$. I residui valgono, rispettivamente, 1 e $-\sin(1)$.

3) (3+5 pt) Dato l'operatore $E^- : l_2 \rightarrow l_2$, dove $E^-(x_1, x_2, x_3, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots)$ e il parametro complesso $\alpha \neq 0$, i) calcolare il $\text{Ker}(1 + \alpha E^-)$ in l_2 ; ii) individuare per quali valori di α esiste unica la soluzione $\underline{x} \in l_2$ dell'equazione $(1 + \alpha E^-)\underline{x} = \underline{e}^{(2)}$ e trovarla, dove $\underline{e}^{(2)}$ è il versore canonico $(0, 1, 0, \dots)$.

R. i) $\text{Ker}(1 + \alpha E^-) = \{0\}$; ii) se $|\alpha| < 1$ esiste unica la soluzione in l_2 , con $\underline{x} = (1 + \alpha E^-)^{-1} \underline{e}^{(2)} = (\sum_{n \geq 0} (-1)^n \alpha^n (E^-)^n) \underline{e}^{(2)} = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \alpha^n \underline{e}^{(2+n)}$, quindi

$x_1 = 0$, $x_n = (-\alpha)^{n-2}$, $n \geq 2$. Si noti che la soluzione ottenuta è soluzione $\forall \alpha \in \mathbb{C}$, ma appartiene a l_2 solo se $|\alpha| < 1$.

4) (3+2+2 pt) i) Trovare la serie di Fourier di $f(x) = e^{-x}$ in $[-\pi, \pi]$ (conviene usare la serie degli esponenziali); ii) calcolare la somma della serie numerica $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{(-1)^n}{1+in}$ valutando il risultato di i) in un punto opportuno; iii) calcolare la somma della serie di Fourier in $x = \pi$.

R. i) $e^{-x} \sim \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n e^{inx}$, $f_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-(1+in)x} dx = \frac{\sinh(\pi)}{\pi} \frac{(-1)^n}{1+in}$; ii) la serie converge puntualmente a e^{-x} in $(-\pi, \pi)$, quindi in $x = 0$: $1 = \frac{\sinh(\pi)}{\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{(-1)^n}{1+in}$,

da cui $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{(-1)^n}{1+in} = \frac{\pi}{\sinh(\pi)}$; iii) il prolungamento 2π -periodico di e^{-x} ha discontinuità semplice in π , e la serie converge al valor medio $\cosh(\pi)$.

5) (4 pt) Calcolare l'integrale $I = \int_0^2 \delta(x \cos(\pi x)) e^{-x} dx$.

R. $g(x) = x \cos(\pi x)$ ha zeri semplici in $[0,2]$ nei punti $0, 1/2, 3/2$; 0 è al bordo con peso dimezzato. $|g'(0)| = 1, |g'(1/2)| = \pi/2, |g'(3/2)| = 3\pi/2$. Quindi $I = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} e^{-1/2} + \frac{2}{3\pi} e^{-3/2}$.

Scritto del 05/07/2022
canale A-D, P. M. Santini e A. Urbano

1) [**10 punti**] Si consideri l'integrale

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^5 + 1} dx. \quad (52)$$

Si discuta la convergenza dell'integrale improprio chiarendo se l'integrale va inteso o meno nel senso del suo valore principale. Si calcoli il valore di I usando il teorema dei residui.

R. L'integrale va inteso nel senso del valore principale. Abbiamo

$$\text{PV} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^5 + 1} dx = 2\pi i \sum_{k=0,1} \text{Res}[f(z), z_k] + \pi i \text{Res}[f(z), z_2]. \quad (53)$$

Dove $z_0 = e^{i\pi/5}$, $z_1 = e^{i3\pi/5}$, $z_2 = -1$. Otteniamo

$$\text{PV} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^5 + 1} dx = \frac{2\pi}{5} \left[\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \sin\left(\frac{6\pi}{5}\right) \right] \quad (54)$$

2) [**5 punti**] Si consideri la funzione

$$u(x, y) = 3x^2y + 2x^2 - y^3 - 2y^2. \quad (55)$$

Si verifichi se la funzione data è armonica e, in caso affermativo, si costruisca una corrispondente armonica coniugata.

R. La funzione data è armonica. La coniugata è $v(x, y) = 3xy^2 + 4xy - x^3 + c$ con c costante arbitraria.

3) (**3+2+5 pt**) Dato l'operatore $A : H \rightarrow H$, definito da: $A\underline{x} = (\underline{e}_1, \underline{x})\underline{e}_1 + a(\underline{e}_2, \underline{x})\underline{e}_2$, dove H è uno spazio di Hilbert separabile, $\{\underline{e}_j\}_{j \in \mathbb{N}^+}$ è una base ortonormale di H , e a è un parametro complesso, i) determinare l'aggiunto (hermitiano coniugato) A^\dagger di A . ii) Per quali valori di a l'operatore A è autoaggiunto (hermitiano)? iii) Determinare lo spettro dell'operatore $B = 1 + A$ per $a = 2$ (e i relativi autovettori, se esistono).

R. i) $(\underline{y}, A\underline{x}) = \bar{y}_1 x_1 + a\bar{y}_2 x_2 = (A^\dagger \underline{y}, \underline{x})$, con $A^\dagger \underline{y} = (\underline{e}_1, \underline{y})\underline{e}_1 + \bar{a}(\underline{e}_2, \underline{y})\underline{e}_2$, dove $x_j = (\underline{e}_j, \underline{x})$, $y_j = (\underline{e}_j, \underline{y})$. ii) $a \in \mathbb{R}$. iii) $\underline{\psi} + \psi_1 \underline{e}_1 + 2\psi_2 \underline{e}_2 = \lambda \underline{\psi}$; facendo il prodotto scalare con \underline{e}_j si arriva alle equazioni $(\lambda - 2)\psi_1 = (\lambda - 3)\psi_2 = (\lambda - 1)\psi_j = 0$, $j \geq 3$. Quindi: $\lambda = 2$ con autovettore \underline{e}_1 ; $\lambda = 3$ con autovettore \underline{e}_2 ; $\lambda = 1$ con autovettore appartenente allo $\text{span}\{\underline{e}_j\}_{j \geq 3}$

4) (**4 pt**) Se la trasformata di Fourier $\hat{f}(k)$ di $f(x)$ appartiene allo spazio di

Schwartz: $\hat{f}(k) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, dire quali di queste funzioni: $f_1(x) = e^{-|x|}$, $f_2(x) = e^{-x^2}(x^2 + 1)^{-1}$, $f_3(x) = e^{-x^2}(x^2 - 1)^{-1}$ potrebbero essere $f(x)$.

R. $\hat{f}(k) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow f(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$; quindi, poichè $f_2 \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ mentre $f_1, f_3 \notin \mathcal{S}(\mathbb{R})$ (f_1 non è derivabile in 0 e f_3 è singolare in ± 1), la risposta è solo $f_2(x)$.

5) (4 pt) Data la successione di funzionali lineari definita da $\hat{F}_n(\varphi) = n^a \int_0^\infty e^{-n^2 x^2} \varphi(x) dx$, con $a > 0$, determinare a cosa converge debolmente.

R. $\hat{F}_n(\varphi) \sim n^{a-1} \varphi(0) \sqrt{\pi}/2$, $n \gg 1$. Quindi $0 < a < 1$: $\hat{F}_n \rightarrow 0$; $a = 1$: $\hat{F}_n \rightarrow \sqrt{\pi} \hat{\delta}_0$; $a > 1$: $\hat{F}_n \rightarrow \infty$.

Scritto del 09/09/2022
canale A-D, P. M. Santini e A. Urbano

1) **(10 pt)** Si valuti l'integrale

$$I(a) = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + a^2 - 2a \cos \theta}, \quad (56)$$

al variare di $a \in \mathbb{R}$.

R. $I(a) = 2\pi/(a^2 - 1)$ per $|a| > 1$ e $I(a) = 2\pi/(1 - a^2)$ per $|a| < 1$.

2) **(5 pt)** Sviluppare in serie di Laurent (con centro nell'origine del piano complesso) la funzione

$$f(z) = \frac{1}{z(1+z^2)}. \quad (57)$$

R. La funzione è analitica in \mathbb{C} ad eccezione delle singolarità in $z = 0$ e $z = \pm i$. Abbiamo quindi due possibili sviluppi di Laurent, uno riferito all'anello $0 < |z| < 1$ e l'altro riferito all'anello $1 < |z| < \infty$. Troviamo $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n-1}$ per $0 < |z| < 1$ e $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{-2n-3}$ per $1 < |z| < \infty$.

3) **(3+3+4 pt)** Dato l'operatore $A = d/dx$, definito sulla varietà, densa in $L^2[0, \pi]$, delle funzioni $f(x)$ tali che $f(x), f'(x) \in L^2[0, \pi]$, i) mostrare che A è un operatore illimitato in $L^2[0, \pi]$. Se, inoltre, $f(0) = f(\pi)$, ii) calcolare l'hermitiano coniugato A^\dagger di A in $L^2[0, \pi]$; iii) calcolare lo spettro di A in $L^2[0, \pi]$.

R. i) Contro-esempio: $f_n(x) = e^{inx}/n$; $\|f_n\|_2 = \sqrt{\pi}/n$, $\|Af_n\|_2 = \sqrt{\pi}$, quindi $\|Af_n\|_2/\|f_n\|_2 = n$ e l'operatore è illimitato. ii) $\int_0^\pi \bar{f}(x)g'(x)dx =$

$$[\bar{f}(x)g(x)]_0^\pi - \int_0^\pi \bar{f}'(x)g(x)dx = -\int_0^\pi \bar{f}'(x)g(x)dx. \quad \text{Quindi } A^\dagger = -A. \quad \text{iii)}$$

$\psi'(x) = \lambda\psi \Rightarrow \psi(x) = e^{\lambda x}$. $\psi(0) = \psi(\pi)$, quindi $\lambda_n = 2in$, $n \in \mathbb{Z}$, $\psi_n(x) = e^{2inx} \in L^2[0, \pi]$, spettro discreto.

4) **(4 pt)** Se la trasformata di Fourier $\hat{f}(k)$ di $f(x) = e^{-x^2}/\sqrt{\pi}$ è $\hat{f}(k) = e^{-k^2/4}$, calcolare la trasformata di Fourier di $f_1(x) = xe^{-2x^2}$.

R. $f_1(x) = \sqrt{\pi}xf(\sqrt{2}x) \Rightarrow \hat{f}_1(k) = \sqrt{\pi}i\frac{d}{dk} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-k^2/8} \right) = -i\frac{\sqrt{\pi}}{4\sqrt{2}}ke^{-k^2/8}$

5) **(4 pt)** Data la successione di funzionali lineari definita da $\hat{F}_n(\varphi) = n^a \int_0^\infty e^{-nx^2} \varphi(x)dx$, $n \in \mathbb{N}^+$, con $a > 0$, determinare a cosa converge debolmente. Può essere utile ricordare che $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

R. Scegliendo la funzione di prova in modo da poter portare il limite $n \rightarrow \infty$

sotto integrale si ottiene $\hat{F}_n(\varphi) \rightarrow \frac{\sqrt{\pi}}{2} n^{a-1/2} \varphi(0)$. Quindi: $\hat{F}_n \rightarrow 0$, $0 < a < 1/2$; $\hat{F}_n \rightarrow \infty$, $a > 1/2$; $\hat{F}_n \rightarrow \sqrt{\pi} \hat{\delta}_0$, $a = 1/2$.

Scritto straordinario del 07/11/2022
canale A-D, P. M. Santini e A. Urbano

1) 1) (**10 pt**) Si calcolino gli integrali

$$\oint_C \frac{8 - z^{12}}{z(4 - z)} dz, \quad \oint_C \frac{\sin(z)}{z} dz \quad (58)$$

dove C è la circonferenza centrata nell'origine, di raggio $R = 3$ ed orientata in senso orario.

Soluzione. Applichiamo il teorema dei residui. Dobbiamo considerare esclusivamente la singolarità presente in $z = 0$. Otteniamo $\oint_C \frac{8 - z^{12}}{z(4 - z)} dz = -4\pi i$ (dove il segno meno deriva dal fatto che il circuito di integrazione è orientato negativamente). Il secondo integrale è nullo essendo $z = 0$ una singolarità apparente.

2) (**5 pt**) Si trovino *tutte* le soluzioni dell'equazione

$$\tanh(z) = i \quad (59)$$

scrivendole nella forma cartesiana $z = x + iy$.

Soluzione. Scriviamo

$$z = \tanh^{-1}(i) = \frac{1}{2} \text{Ln} \left(\frac{1+i}{1-i} \right) = \frac{1}{2} \text{Ln}(i), \quad (60)$$

dove per il logaritmo complesso abbiamo

$$\text{Ln}(i) = \log 1 + i(\pi/2 + 2\pi n), \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (61)$$

Di conseguenza abbiamo

$$z_n = i\pi \left(\frac{1}{4} + n \right), \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (62)$$

3) (**3+3+4 pt**) Dato l'operatore quantità di moto $\hat{p} = -id/dx$, sullo spazio delle funzioni $f(x)$ tali che $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $f, f' \in L^2[a, b]$ e $f(a) = f(b)$, i) studiare la sua limitatezza o non limitatezza in $L^2[a, b]$; ii) calcolare il suo aggiunto (hermitiano coniugato) \hat{p}^\dagger in $L^2[a, b]$; iii) calcolare il suo spettro (indicando se sia discreto, continuo, o residuo), con le relative autofunzioni, se esistono, in $L^2[a, b]$.

Soluzione. Se i) $f_n(x) = \sin(nx)/n$, allora $\|\hat{p}f_n\|_2 = \sqrt{\pi}$, $\|f_n\|_2 = \sqrt{\pi}/n$. Quindi $\frac{\|\hat{p}f_n\|_2}{\|f_n\|_2} = n$ e \hat{p} è illimitato. ii) $\hat{p}^\dagger = \hat{p}$; iii) $\psi(x, \lambda) = e^{i\lambda x}$, con

$\psi(a, \lambda) = \psi(b, \lambda)$. Quindi $\exp(i\lambda(b-a)) = 1$ e $\lambda = \lambda_n = \frac{2\pi}{b-a}n$, $n \in \mathbb{Z}$ (spettro discreto), con $\psi = \psi_n(x) = \exp(i\frac{2\pi}{b-a}n)$.

4) (4 pt) Sviluppare in serie di Fourier la funzione $f(x) = e^x$ nell'intervallo $[-\pi, \pi]$ (si consiglia di usare lo sviluppo nella base $\{e^{inx}\}_{n \in \mathbb{Z}}$).

Soluzione.

$$e^x \sim \frac{\sinh \pi}{\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{(-1)^n}{1 - in} e^{inx} \quad (63)$$

5) (4 pt) Calcolare l'integrale $I = \int_{-\pi}^{\pi} \delta\left(\frac{\sin x}{x^2+1}\right) dx$.

Soluzione. $I = 2 + \pi^2$.

Scritto del 16/01/2023
canale A-D, P. M. Santini e A. Urbano

1) **(10 pt)** Considerando il caso $0 < a < b$, calcolare l'integrale

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)} dx, \quad (64)$$

applicando opportunamente il teorema dei residui.

R. Scriviamo

$$I = \text{Im} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x e^{ix}}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)} dx \right], \quad (65)$$

per cui

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x e^{ix}}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)} dx = 2\pi i \sum_{z_0=ia,ib} \text{Res} \left[\frac{z e^{iz}}{(z^2 + a^2)(z^2 + b^2)}, z = z_0 \right]. \quad (66)$$

Calcolando i residui e prendendo la parte immaginaria, troviamo $I = \pi(e^{-a} - e^{-b})/(b^2 - a^2)$.

2) **(5 pt)** Si consideri la funzione (con $a \in \mathbb{R}$)

$$f(z) = \frac{e^{az}}{1 + e^z}. \quad (67)$$

Individuare le singolarità della funzione in \mathbb{R} ed in \mathbb{C} specificandone la natura. Calcolare infine, per ogni singolarità, il corrispondente residuo nel caso $a = 1$.

R. Le singolarità della funzione in \mathbb{C} si trovano tutte sull'asse immaginario, per $z = i\pi(2k + 1)$. Si tratta di singolarità isolate e dalla relazione tra zeri e poli si deduce che si tratta di poli semplici. Se $a = 1$, tutti i poli hanno residuo unitario (come si verifica immediatamente usando di nuovo la relazione tra zeri e poli).

3) **(5+5 pt)** i) Costruire l'operatore di proiezione ortogonale in $L^2[-\pi, \pi]$ che proietta sul sottospazio $\text{span}\{\sin x, \cos x\}$. ii) Sia $\hat{A} : H \rightarrow H$ un operatore hermitiano sullo spazio di Hilbert H . Per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{C}$ l'operatore $\hat{B} = \exp(\alpha \hat{A})$ è hermitiano? E per quali valori \hat{B} è unitario?

R. i) Dalla formula generale $\hat{P}|f\rangle = \sum_k |e_k\rangle \langle e_k|f\rangle$ si ha che, se $f(x) \in L^2[-\pi, \pi]$, allora $\hat{P}f(x) = \frac{1}{\pi} \sin x \int_{-\pi}^{\pi} \sin y f(y) dy + \frac{1}{\pi} \cos x \int_{-\pi}^{\pi} \cos y f(y) dy$. ii)

$(\exp(\alpha \hat{A}))^\dagger = \exp(\bar{\alpha} \hat{A})$, $(\exp(\alpha \hat{A}))^{-1} = \exp(-\alpha \hat{A})$; quindi \hat{B} è hermitiano se $\alpha \in \mathbb{R}$, e unitario se $\alpha \in i\mathbb{R}$

4) (4 pt) Se $\hat{f}(k) = e^{-k^6}$ è la trasformata di Fourier di $f(x)$, trovare la trasformata di Fourier della funzione $f_1(x) = x^2 f(x)$.

R. $\hat{f}_1(k) = i^2 \frac{d^2}{dk^2} \hat{f}(k) = (30k^4 - 36k^{10})e^{-k^6}$

5) (4 pt) Calcolare l'integrale $I = \int_0^{\pi} \delta(x \cos(x)) e^{-x} dx$.

R. $g(x) = x \cos x$ ha zeri semplici in $[0, \pi]$ nell'estremo di integrazione 0 e in $\pi/2$, con $|g'(0)| = 1$, $|g'(\pi/2)| = \pi/2$. Quindi $I = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} e^{-\pi/2}$

Scritto dell'08/02/2023
canale A-D, P. M. Santini e A. Urbano

1) (10 pt) Si calcoli l'integrale

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos(3\theta)}{5 - 4 \cos \theta} d\theta. \quad (68)$$

[Suggerimento. Si ricordi che $e^{in\theta} = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$ per cui $\cos(n\theta) = \operatorname{Re}(e^{in\theta})$]

R. Scriviamo

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{\cos(3\theta)}{5 - 4 \cos \theta} d\theta &= \operatorname{Re} \left[\int_0^{2\pi} \frac{e^{3i\theta}}{5 - 4 \cos \theta} d\theta \right] = \operatorname{Re} \left[\oint \frac{z^3 dz}{iz[5 - 2(z + z^{-1})]} \right] \\ &= \operatorname{Re} \left[i \oint \frac{z^3 dz}{2z^2 - 5z + 2} \right] = \operatorname{Re} \left[i \oint \frac{z^3 dz}{(2z - 1)(z - 2)} \right]. \end{aligned}$$

dove la variabile di integrazione z corre sulla circonferenza unitaria. Applicando il teorema dei residui, includiamo solo il polo semplice in $z = 1/2$. Abbiamo

$$\operatorname{Res}_{z=1/2} \left[\frac{z^3}{2(z - 1/2)(z - 2)} \right] = -\frac{1}{24} \quad (69)$$

per cui l'integrale vale $\operatorname{Re}[2\pi i(-i/24)] = \pi/12$.

2) (5 pt) Si consideri la funzione

$$f(z) = \frac{(1 + z^{12})}{z^3(1 - 2z)(2 - z)}. \quad (70)$$

Si definiscano le regioni del piano complesso in cui $f(z)$ ammette uno sviluppo in serie di Laurent di centro $z_0 = 0$. Si calcoli il valore del residuo di $f(z)$ in $z = 0$.

R. La funzione ammette sviluppo in serie di Laurent di centro $z_0 = 0$ negli anelli $A_1 \equiv \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1/2\}$, $A_2 \equiv \{z \in \mathbb{C} : 1/2 < |z| < 2\}$ e $A_3 \equiv \{z \in \mathbb{C} : |z| > 2\}$. Calcoliamo il residuo richiesto usando la serie geometrica

$$\begin{aligned} \frac{(1 + z^{12})}{z^3(1 - 2z)(2 - z)} &= \frac{(1 + z^{12})}{z^3(1 - 2z)2(1 - z/2)} \\ &= \frac{(1 + z^{12})}{2z^3} (1 + 2z + 4z^2 + \dots) \left(1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{4} + \dots \right) \\ &= \frac{(1 + z^{12})}{2z^3} \left(1 + \frac{5z}{2} + \frac{21z^2}{4} + \dots \right) \quad (71) \end{aligned}$$

per cui il coefficiente del termine z^{-1} è $21/8$.

3) **(5+3 pt)** i) Costruire l'operatore di proiezione ortogonale in $L^2[-\pi, \pi]$ che proietta sul sottospazio $\text{span}\{e^{ix}, e^{2ix}\}$. ii) Dato lo spazio di Hilbert H , mostrare che un operatore unitario $\hat{U} : H \rightarrow H$ ha norma 1.

R. i) $\hat{P}f(x) = \frac{e^{ix}}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-iy} f(y) dy + \frac{e^{2ix}}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-2iy} f(y) dy$. ii) $\forall f \in H, \left(\|\hat{U}f\|/\|f\| \right)^2 =$

$(\hat{U}f, \hat{U}f)/(f, f) = (f, f)/(f, f) = 1$. Quindi $\|\hat{U}\| = 1$

4) **(4 +2 pt)** i) Sviluppare la funzione e^{iax} , $a \in \mathbb{R}$, $a \notin \mathbb{Z}$, nell'intervallo $[-\pi, \pi]$, e ii) usare tale serie per calcolare la somma $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{(-1)^n}{a-n}$.

R. i) $e^{iax} \sim \frac{\sin(a\pi)}{\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{(-1)^n}{a-n} e^{inx}$. ii) $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{(-1)^n}{a-n} = \frac{\pi}{\sin(a\pi)}$, per $x = 0$.

5) **(4 pt)** Calcolare il limite, per $n \rightarrow \infty$, della successione di funzionali lineari $\{\hat{F}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tali che $\hat{F}_n(\varphi) = n^a \int_0^{\infty} e^{-nx} \varphi(x) dx$, al variare del parametro $a > 0$.

R. $0 < a < 1 : \hat{F}_n \rightarrow \hat{0}$; $a = 1 : \hat{F}_n \rightarrow 2\hat{\delta}_0$; $a > 1 : \hat{F}_n \rightarrow \infty$.

Scritto del 02/05/2023
canale A-D, P. M. Santini e A. Urbano

1) **10 pt**) Utilizzando il teorema dei residui (disegnando e motivando il contorno di integrazione), calcolare l'integrale

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin(ax) + 3}{x^2 + 1} dx, \quad \text{con } a < 0. \quad (72)$$

Soluzione 1. Osserviamo che possiamo scrivere

$$I = \text{Im} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x e^{iax}}{x^2 + 1} dx \right] + 3 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2 + 1} dx. \quad (73)$$

Usando il teorema dei residui (chiudendo il contorno, per il primo integrale, nel semi-piano complesso inferiore poiché $a < 0$), scriviamo

$$I = \text{Im} \left[-2\pi i \text{Res}_{z=-i} \frac{z e^{iaz}}{z^2 + 1} \right] + 2\pi i \text{Res}_{z=i} \frac{3}{z^2 + 1} = \pi(3 - e^a). \quad (74)$$

2) **(5 pt)** Si consideri la funzione

$$f(z) = \frac{1}{z^3 \sin(z)}. \quad (75)$$

Si caratterizzi la singolarità in $z = 0$ e ne si calcoli eventualmente il residuo.

Soluzione 2. Utilizziamo lo sviluppo in serie di Laurent per scrivere

$$f(z) = \frac{1}{z^3 (z - z^3/6 + O(z^5))} = \frac{1}{z^4 (1 - z^2/6 + O(z^4))} \quad (76)$$

$$= \frac{1}{z^4} \left[1 + (z^2/6 + O(z^4)) + (z^2/6 + O(z^4))^2 + \dots \right] \quad (77)$$

$$= \frac{1}{z^4} [1 + z^2/6 + O(z^4)]. \quad (78)$$

Abbiamo quindi che $z = 0$ è un polo del quarto ordine con residuo nullo.

3) **(5+5 pt)** i) Costruire l'operatore di proiezione ortogonale in $L^2[-\pi, \pi]$ che proietta sul sottospazio $\text{span}\{\sin x, \sin(2x)\}$. ii) Trovare autovalori e autofunzioni di tale operatore. Suggestione: per cercare le autofunzioni, si usi una base nota.

Soluzione 3. i) $\hat{P}_S f(x) = c \sin x + d \sin(2x)$, $c = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin y f(y) dy$, $d =$

$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(2y) f(y) dy$. ii) Tutte gli elementi della base di Fourier sono autofunzioni, $\sin x$ e $\sin(2x)$ con autovalore 1, e tutte le altre con autovalore 0.

4) (4 pt) Se $\hat{f}(k) = e^{-k^4}$ è la trasformata di Fourier di $f(x)$, trovare la trasformata di Fourier della funzione $g(x) = xf'(x)$.

Soluzione 4. $\hat{g}(k) = i \frac{d}{dk} (ike^{-k^4}) = (4k^4 - 1)e^{-k^4}$

5) (4 pt) Calcolare l'integrale $I = \int_0^2 \delta\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \sin x e^{-x} dx$.

Soluzione 5. $g(x) = (x - \frac{\pi}{3}) \sin x$ ha zeri semplici in $[0, 2]$ nell'estremo di integrazione 0 e in $\pi/3$, con $g'(0) = -\pi/3$, $g'(\pi/3) = 1/\sqrt{2}$. Quindi $I = \frac{3}{2\pi} + \frac{2}{\sqrt{3}}e^{-\pi/3}$

Scritto del 20/06/2023
canale A-F, P. M. Santini e A. Urbano

1) [12 punti] Si calcoli l'integrale

$$I = \int_0^{\infty} \frac{x^{-1/2}}{(4x^2 + 1)(x + 1)} dx, \quad (79)$$

usando il teorema dei residui (disegnando e motivando esplicitamente il contorno di integrazione scelto).

Soluzione. Contorno pacman e funzione $f(z) = z^{-1/2}/[(4z^2 + 1)(z + 1)]$. Prendiamo il taglio lungo il semiasse reale positivo. Le singolarità di $f(z)$ sono poli semplici locati in $z_0 = +i/2 = e^{i\pi/2}/2$, $z_1 = -i/2 = e^{3i\pi/2}/2$ e $z_2 = -1 = e^{i\pi}$. La somma sui residui restituisce $\sum_{k=0}^2 \text{Res}[f(z), z_k] = -2i/5$. Sul contorno, i due cammini che chiudono la bocca del pacman restituiscono $2I$. Di conseguenza, abbiamo $I = 2\pi/5$.

2) [4 punti] Si consideri la funzione

$$f(z) = \frac{1}{z(8 - z^3)}. \quad (80)$$

Si scriva lo sviluppo in serie di Laurent nell'anello $A(0, 2, \infty)$.

Soluzione. Lo sviluppo richiesto è dato da

$$f(z) = -\frac{1}{z^4} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{z}\right)^{3k} = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{3k}}{z^{3k+4}}. \quad (81)$$

Il modo più immediato di ottenere questo sviluppo è quello di usare lo sviluppo della serie geometrica.

3) [6+4 pt] i) Sia \hat{P} un proiettore ortogonale sullo spazio di Hilbert H , e sia $|y\rangle \in H$. Determinare la soluzione $|x\rangle \in H$ dell'equazione lineare $(2 + \hat{P})|x\rangle = |y\rangle$. ii) Determinare gli autovalori dell'operatore

$\hat{A} = 2|e_1\rangle\langle e_1| - |e_2\rangle\langle e_2|$ con relativi autovettori, dove $\{|e_j\rangle\}_{j=1}^2$ è una base ortonormale di uno spazio euclideo di dimensione 2.

Soluzione. i) Per chi ha inteso che \hat{P} sia un proiettore ortogonale in H ,

$|x\rangle = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2}\hat{P}\right)^{-1} |y\rangle = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3}\hat{P}\right) |y\rangle$; per chi ha invece inteso che H

sia il sottospazio su cui proietta \hat{P} , allora $\hat{P}|x\rangle = |x\rangle$ e $|x\rangle = (1/3)|y\rangle$.

ii) L'equazione agli autovalori è $2\psi_1|e_1\rangle - \psi_2|e_2\rangle = \lambda|\psi\rangle$, con $\psi_j = \langle e_j|\psi\rangle$; applicando $\langle e_j|$, $j = 1, 2$, si ottengono le equazioni $(\lambda - 2)\psi_1 = 0$, $(\lambda + 1)\psi_2 = 0$. Quindi: $\lambda = 2$ con autovettore $|e_1\rangle$, e $\lambda = -1$ con autovettore $|e_2\rangle$

4) [4 pt] Sviluppare la funzione e^{2x} in serie di Fourier in $[-\pi, \pi]$.

R. $e^{2x} \sim \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n e^{inx}$, $f_n = \frac{\sinh(2\pi)}{\pi} \frac{(-1)^n}{2-in}$.

5) [4 pt] Data la funzione $f(x) = (x-1)H(-x) + H(x) \sin x$, calcolare $f'(x)$ e $f''(x)$.

Soluzione. $f'(x) = \delta(x) + H(-x) + H(x) \cos x$ e $f''(x) = \delta'(x) - H(x) \sin x$

Scritto del 04/07/2023
canale A-F, P. M. Santini e A. Urbano

1) [4+7 punti] Calcolare i seguenti integrali nel piano complesso. Le curve di integrazione sono orientate positivamente.

$$I_1 = \oint_{|z-1|=3/2} \frac{\cos(z\pi)}{z^2-1} dz, \quad I_2 = \oint_{|z|=2} \frac{1}{\cos(1/z)(z-1)} dz. \quad (82)$$

Soluzione. $I_1 = -\pi i$ (teorema dei residui) e $I_2 = 2\pi i$ (teorema del residuo all'infinito).

2) [4 punti] Si consideri la funzione

$$w = f(z) = (z-1)^{2/5}. \quad (83)$$

Si dimostri che si tratta di una funzione polidroma. Si trovino i punti di diramazione specificandone la natura.

Soluzione. Ad ogni valore di z corrispondono cinque valori distinti di w . $z=1$ è un punto di diramazione algebrico di ordine 4. Lo stesso vale per il punto all'infinito.

3) [4+6 pt] Dato l'operatore $E^+ : l_2 \rightarrow l_2$ tale che $E^+(x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_2, x_3, x_4, \dots)$, i) determinare il $\text{Ker}(2 + E^+)$ in l_2 ; ii) Trovare la soluzione $\underline{x} \in l_2$ dell'equazione $(2 + E^+)\underline{x} = \underline{e}_2$, dove \underline{e}_2 è il versore $(0, 1, 0, \dots) \in l_2$.

Soluzione. i) La soluzione dell'equazione $(2 + E^+)\underline{x} = \underline{0}$ è la successione $\{x_n\}$ tale che $x_n = (-2)^{n-1}x_1$ che non appartiene a l_2 . Quindi $\text{Ker}(2 + E^+) = \{\underline{0}\}$ in l_2 . ii) $(2 + E^+)\underline{x} = 2(1 + (1/2)E^+)\underline{x} = \underline{e}_2$. Quindi $\underline{x} = \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{2}E^+)^{-1}\underline{e}_2 =$

$$\frac{1}{2}(1 - \frac{1}{2}E^+)\underline{e}_2 = \frac{1}{2}\underline{e}_2 - \frac{1}{4}\underline{e}_1 = (-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 0, \dots)$$

4) [4 pt] Ricordando che la trasformata di Fourier di $\exp(-x^2/2)$ è $\sqrt{2\pi}\exp(-k^2/2)$, determinare la trasformata di Fourier di $g(x) = \int_{\mathbb{R}} \exp(-(x-y)^2)(y^2 + 1)^{-1} dy$.

Soluzione. La trasformata di Fourier di $\exp(-x^2)$ è $\sqrt{\pi}\exp(-k^2/4)$, quella di $(x^2 + 1)^{-1}$ è $\pi\exp(-|k|)$. Quindi il teorema di convoluzione implica che $\hat{g}(k) = \pi^{3/2}\exp(-|k| - k^2/4)$

5) [4 pt] A cosa converge debolmente la successione di funzionali lineari $\{\hat{F}_n\}$: $\hat{F}_n(\varphi) = n^a \int_0^\infty \frac{e^{-nt}}{t+1} \varphi(t) dt$ al variare di $a \geq 0$?

Soluzione. Se $0 \leq a < 1$, $\hat{F}_n \rightarrow 0$; se $a = 1$, $\hat{F}_n \rightarrow 2\hat{\delta}_0$; se $a > 1$, $\hat{F}_n \rightarrow \infty$

Scritto dell' 08/09/2023
canale A-F, P. M. Santini e A. Urbano

1) [9 punti] Usando opportunamente il teorema dei residui, calcolare l'integrale

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta}{\cosh \alpha - \cos \theta} d\theta, \quad (84)$$

dove $\alpha \in \mathbb{R}^+$.

Soluzione. Usando la sostituzione $z = e^{i\theta}$, includiamo solo i residui in $z = 0$ e $z = e^{-\alpha}$. Si ottiene $I = 2\pi(-1 + \cosh \alpha / \sinh \alpha)$.

2) [6 punti] Per ciascuna delle seguenti funzioni si scrivano i termini con potenza negativa dei corrispondenti sviluppi in serie di Laurent centrati in $z = 0$ (qualora esistano) specificandone la regione di convergenza. In ogni caso, si specifichi la natura della singolarità in $z = 0$.

$$f(z) = \frac{1}{z^3 \sinh z}, \quad g(z) = \frac{\cos z}{z^5}, \quad h(z) = \frac{1}{z^{12}(1 + e^{1/z})}. \quad (85)$$

Soluzione. $f(z)$ ha un polo di ordine 4 e lo sviluppo converge in $A(0, 0, \pi)$. Lo sviluppo cercato è $f(z) = \frac{1}{z^4} - \frac{1}{6z^2} + O(z^0)$. $g(z)$ ha un polo di ordine 5 e lo sviluppo converge in $A(0, 0, \infty)$. Lo sviluppo cercato è $g(z) = \frac{1}{z^5} - \frac{1}{2z^3} + \frac{1}{24z} + O(z)$. Infine, $h(z)$ ha un punto di accumulazione di singolarità in $z = 0$ e non abbiamo sviluppo di Laurent.

3) (3+3+4 pt) i) Se \hat{P} è un proiettore ortogonale sullo spazio di Hilbert H , determinare $\|\hat{P}\|$. Determinare inoltre le proiezioni ortogonali di e^x ii) sul sottospazio $\text{span}\{1, e^{ix}\}$ di $L^2[-\pi, \pi]$; iii) sul sottospazio $\text{span}\{1, x\}$ di $L^2[-1, 1]$. Suggerimento per il punto iii): si usi la base dei polinomi di Legendre degli appunti: $e_1 = c_1$, $e_2 = c_2x$, $e_3 = c_3(x^2 - 1/3), \dots$

Soluzione: i) $\|\hat{P}\| = 1$ (si veda gli appunti). ii) La base ortonormale del sottospazio è $e_n = \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}$, $n = 0, 1$, quindi $(|e_0 \rangle \langle e_0| + |e_1 \rangle \langle e_1|) e^x =$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^y dy + \frac{e^{ix}}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{y(1-i)} dy = \frac{\sinh \pi}{\pi} \left(1 - \frac{e^{ix}}{1-i}\right);$$

iii) La base ortonormale del sottospazio è $e_1 = 1/\sqrt{2}$, $e_2 = \sqrt{\frac{3}{2}}x$, quindi $(|e_1 \rangle \langle e_1| + |e_2 \rangle \langle e_2|) e^x =$

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 e^y dy + \frac{3}{2}x \int_{-1}^1 ye^y dy = \frac{\sinh 1}{2} + \frac{3}{e}x.$$

4) (4 pt) Sviluppare la funzione e^x in serie di Fourier in $[0, 1]$.

Soluzione. $e^x \sim (e - 1) \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{e^{2\pi in x}}{1 - 2\pi in}$.

5) (4 pt) Data la funzione $f(x) = (x - \alpha)H(-x) + \beta H(x) \sin x$, determinare le costanti α e β tali affinché $f''(x)$ sia una funzione continua in \mathbb{R} , e scriverla. Soluzione. $f'(x) = H(-x) + \alpha\delta(x) + \beta H(x) \cos x$; $f''(x) = \alpha\delta'(x) + (\beta - 1)\delta(x) - \beta H(x) \sin x$. Quindi $f''(x)$ è continua se e solo se $\alpha = 0, \beta = 1$, e $f''(x) = -H(x) \sin x$.

MODELLI E METODI MATEMATICI DELLA FISICA
canale A-F; P. M. Santini e A. Urbano
Scritto straordinario del 09/11/2023

1) [10 punti] Usando opportunamente il teorema dei residui, calcolare l'integrale

$$I = \text{PV} \int_0^{\infty} \frac{x^2}{(x^2-4)(x^2+4)} dx. \quad (86)$$

Si motivi in particolare la necessità di considerare il valore principale, e si giustifichi l'uso delle formule risolutive usate avendo cura di disegnare il cammino di integrazione.

Soluzione. Scriviamo $I = \frac{1}{2} \text{PV} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2-4)(x^2+4)} dx$. L'integrale converge per confronto asintotico per $x \rightarrow \pm\infty$, ma abbiamo singolarità sull'asse reale locate in $x = \pm 2$ che lo rendono convergente solo in termini del suo valore principale. Usando il teorema dei residui, scriviamo $I = \frac{1}{2} \left\{ 2\pi i \text{Res}[f(z), 2i] + \pi i \text{Res}[f(z), +2] + \pi i \text{Res}[f(z), -2] \right\} = \frac{\pi}{8}$ con $f(z) = z^2 / [(z^2-4)(z^2+4)]$.

2) [6 punti] Si consideri la funzione

$$f(z) = (z-3) \sin\left(\frac{1}{z+2}\right). \quad (87)$$

(i) Si determinino i primi tre termini dello sviluppo in serie di Laurent centrato in $z = -2$.

(ii) Qual'è la natura della singolarità in $z = -2$? Quale il suo residuo?

(iii) Qual'è il più grande anello di convergenza della serie di Laurent richiesta al punto (i)?

Soluzione. Lo sviluppo richiesto è $f(z) = 1 - \frac{5}{z+2} - \frac{1}{6(z+2)^2} + \dots$. La singolarità è isolata ed essenziale. Il residuo vale -5 . La convergenza si ha nell'anello $A(-2, 0, \infty)$ (essendo il seno una funzione intera, l'unica singolarità è quella ereditata dalla funzione razionale $1/(z+2)$).

3) (4+3+3 pt) i) Sia H uno spazio di Hilbert separabile, e $\{|e_j\rangle\}_{j \in \mathbb{N}^+}$ una base ortonormale in H . i) Determinare autovalori e autovettori in H dell'operatore $\hat{A} = c|e_1\rangle\langle e_1| + |e_3\rangle\langle e_3|$, dove c è un parametro complesso arbitrario. ii) Sotto quali condizioni \hat{A} è un operatore hermitiano? iii) Sotto quali condizioni \hat{A} è un proiettore ortogonale?

Soluzione: i) $\lambda = c$ con autovettore $|e_1\rangle$, $\lambda = 1$ con autovettore $|e_3\rangle$, e $\lambda = 0$ con autovettore nello span di $\{|e_j\rangle\}_{j \in \mathbb{N}^+, j \neq 1, 3}$. ii) $c \in \mathbb{R}$. iii) $c = 1, 0$.

4) (4 pt) Calcolare $I = \int_0^{\infty} \delta(x^3 - x) e^{-x} dx$.

Soluzione. $I = \frac{e+1}{2e}$.

5) (4 pt) Se $\hat{f}(k) = \pi e^{-|k|}$ è la trasformata di Fourier di $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$, calcolare la trasformata di Fourier di $f_1(x) = \frac{1}{x^2+a^2}$, $a \in \mathbb{R}$, e di $f_2(x) = \frac{x}{(x^2+1)^2}$.

Soluzione. i) $f_1(x) = \frac{1}{a^2} \frac{1}{(x/a)^2+1}$, quindi $\hat{f}_1(k) = \frac{\pi}{|a|} e^{-|ak|}$. ii) $f_2(x) = -\frac{1}{2} f'(x)$, quindi $\hat{f}_2(k) = -\frac{i\pi}{2} k e^{-|k|}$

MODELLI E METODI MATEMATICI DELLA FISICA
canale A-F; P. M. Santini e A. Urbano
Scritto del 15/01/2024

1) **[10 punti]** Usando opportunamente il teorema dei residui, calcolare l'integrale

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(ax)}{x(\pi^2 - a^2x^2)}, \quad \text{con } a > 0. \quad (88)$$

Cosa succederebbe se scegliessimo $a < 0$?

Soluzione. Introduciamo la funzione di variabile complessa $f(z) = e^{iaz}/[z(\pi^2 - a^2z^2)]$. Poiché $a > 0$, chiudiamo il contorno di integrazione nel semipiano superiore del piano complesso per poter usare il lemma di Jordan. Abbiamo tre singolarità che cadono sull'asse reale e devono essere indentate. Troviamo $\text{Res}[f(z), z = 0] = 1/\pi^2$ e $\text{Res}[f(z), z = \pm\pi/a] = 1/2\pi^2$ per cui $I = 2/\pi$. Se considerassimo il caso $a < 0$, il valore dell'integrale cambierebbe di segno, $I = -2/\pi$. Da un punto di vista del teorema dei residui, il cambio di segno avviene perché siamo costretti a chiudere il contorno di integrazione nel semipiano complesso inferiore per poter usare il lemma di Jordan.

2) **[5 punti]** Si consideri la funzione

$$f(z) = \frac{z}{z^2 + i}. \quad (89)$$

Si trovi lo sviluppo in serie di Taylor centrato in $z_0 = 0$ ed il corrispondente raggio di convergenza.

Soluzione. Osserviamo che la funzione data ha singolarità isolate per $z^2 + i = 0$ ovvero per $z = \pm e^{3\pi i/4} = \pm(1 - i)/\sqrt{2}$. Di conseguenza, il raggio di convergenza del suo sviluppo in serie di Taylor centrato nell'origine del piano complesso sarà $R = 1$, ovvero la distanza dalla circonferenza unitaria su cui giacciono le sue singolarità. Lo sviluppo richiesto è $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} i^{k-1} z^{2k+1}$.

3) **[5+5 pt]** i) Determinare il proiettore ortogonale su $L^2[-\pi, \pi]$ che proietta sul sottospazio $\text{span}\{1, e^{2ix}\}$. ii) Calcolare l'operatore $(2\hat{1} + \hat{P})^{-1}$, dove \hat{P} è un proiettore ortogonale.

Soluzione. i) $\hat{P}f(x) = \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(y)dy + e^{2ix} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-2iy} f(y)dy \right)$. ii) $(2 + \hat{P})^{-1} =$

$$\frac{1}{2}(\hat{1} + (1/2)\hat{P})^{-1} = \frac{1}{2} \left(\hat{1} + \hat{P} \sum_{k \geq 1} \left(-\frac{1}{2}\right)^k \right) = \frac{1}{2} \left(\hat{1} - \frac{1}{3}\hat{P} \right).$$

4) **[4 pt]** Usando il teorema di convoluzione, determinare la trasformata di Fourier di $g(x) = \int_{\mathbb{R}} \exp(-|x - y| - |y|)dy$.

Soluzione. La trasformata di Fourier di $\exp(-|x|)$ è $2/(1 + k^2)$, quindi

$$\hat{g}(k) = 4(1 + k^2)^{-2}$$

5) [4 pt] Calcolare l'integrale $I = \int_0^1 \delta(x^3 - 3x^2 + 2x)e^x dx$

Soluzione. $I = (1 + 2e)/4$

MODELLI E METODI MATEMATICI DELLA FISICA
canale A-F; P. M. Santini e A. Urbano
Scritto del 07/02/2024

1) [10 pt] Si consideri la curva semplice, chiusa e regolare a tratti γ tale per cui sia

$$\text{Int } \gamma = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < 1 \wedge 0 < \text{Arg}(z) < \pi/2\}. \quad (90)$$

Si consideri la funzione $f(z) = \frac{e^{\pi z}}{2z^2 - i}$. Si calcoli l'integrale $\oint_{\gamma} f(z) dz$. Quanto varrebbe l'integrale se scegliessimo di considerare $\text{Int } \gamma = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < 1 \wedge -\pi/2 < \text{Arg}(z) < \pi/2\}$?

Soluzione. Le singolarità risolvono l'equazione $2z^2 = i$ e corrispondono a $z_0 = e^{i\pi/4}/\sqrt{2} = (1+i)/2$ e $z_1 = e^{i5\pi/4}/\sqrt{2} = -(1+i)/2$. L'integrale si ottiene considerando $2\pi i$ -volte il residuo della funzione in z_0 che appartiene ad $\text{Int } \gamma$. Otteniamo $\oint_{\gamma} f(z) dz = \frac{\pi}{2}(i-1)e^{\pi/2}$. L'integrale rimane lo stesso anche nel secondo caso perché z_1 continua a non cadere in $\text{Int } \gamma$.

2) [6 pt] Si consideri la funzione $f(z) = \frac{1-\cos(z)}{\sin^2(z)}$. Se ne classifichino le singolarità isolate in \mathbb{C} (nel caso di poli, se presenti, se ne specifichi anche l'ordine).

Soluzione. Abbiamo che $\sin^2(z) = 0$ quando $z_k = k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$. Quando k è pari, ovvero per $z_k = 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$, le singolarità isolate sono, in realtà, eliminabili. Viceversa, per k dispari, ovvero per $z_k = (2k+1)\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$, le singolarità isolate sono dei poli doppi. Abbiamo infatti (usando, ad esempio, la regola di de l'Hopital) che $\lim_{z \rightarrow 2k\pi} \frac{1-\cos(z)}{\sin^2(z)} = \frac{1}{2}$, mentre il fatto che per $z_k = (2k+1)\pi$ si abbiano dei poli di ordine 2 si deduce utilizzando la relazione tra zeri e poli.

3) [4+6 pt] Dato l'operatore $E^+ : l_2 \rightarrow l_2$ tale che $E^+(x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_2, x_3, x_4, \dots)$, i) determinare il $\text{Ker}(a + E^+)$ in l_2 al variare di $a > 0$; ii) trovare la soluzione $\underline{x} \in l_2$ dell'equazione $(3 + E^+)\underline{x} = (1, 2, 3, 0, \dots)$.

Soluzione. i) La soluzione dell'equazione $(a + E^+)\underline{x} = \underline{0}$ è la successione $\{x_n\}$ tale che $x_n = (-a)^{n-1}$ che appartiene a l_2 se $0 < a < 1$, e non appartiene a l_2 per $a \geq 1$. Quindi $\text{Ker}(a + E^+) = \{\underline{0}\}$ in l_2 se $a \geq 1$. ii) $(3 + E^+)\underline{x} = (1, 2, 3, 0, \dots)$. Quindi $\underline{x} = \frac{1}{3}(1 + \frac{1}{3}E^+)^{-1}(1, 2, 3, 0, \dots) = \frac{1}{3}(1 - \frac{1}{3}E^+ + \frac{1}{9}(E^+)^2)(1, 2, 3, 0, \dots) = \frac{1}{3}((1, 2, 3, 0, \dots) - \frac{1}{3}(2, 3, 0, \dots) + \frac{1}{9}(3, 0, \dots)) = (2/9, 1/3, 1, 0, \dots)$

4) [4 pt] Sviluppare la funzione $\exp(ax)$, $a \in \mathbb{R}$ in serie di Fourier nell'intervallo $[0, L]$.

Soluzione. $x \sim \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{e^{aL} - 1}{aL - 2\pi i n} e^{i \frac{2\pi}{L} n x}$

5) [4 pt] Trovare una funzione $f(x)$ tale che $f''(x) = 3 \delta(x - 1)$.

Soluzione. Ad esempio: $f_1(x) = 3(xH(x - 1) + H(1 - x))$, o $f_2(x) = 3(x - 1)H(x - 1)$

MODELLI E METODI MATEMATICI DELLA FISICA

P. M. Santini e A. Urbano

Scritto straordinario del 09/05/2024

1) [10 punti] Si calcoli l'integrale

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 + x + 1}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} dx. \quad (91)$$

Soluzione. Usiamo il teorema dei residui. Chiudendo il contorno di integrazione nel semipiano complesso superiore, includiamo le singolarità in $z = i$ e $z = 2i$. Si noti che il termine lineare nel numeratore della funzione non contribuisce per parità. Il risultato finale è $I = \pi/2$

2) [5 punti] Si trovino tutti i valori di z per cui $\sin(z) = 3$.

Soluzione. Usando le funzioni trigonometriche inverse, si tratta di calcolare $\arcsin(3)$. Il risultato è $z_k = -i \log(3 \pm 2\sqrt{2}) + \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ con k generico intero

3) (4+4 pt) Dato l'operatore di proiezione ortogonale \hat{P} , i) Calcolare l'operatore $\hat{A} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\hat{P}\right)$; ii) calcolarne i possibili autovalori.

Soluzione. i) $\hat{A} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\hat{P}\right) = \hat{1} + \sum_{k \geq 1} (-1)^k \frac{(\pi\hat{P}/4)^{2k}}{(2k)!} = \hat{1} + (\cos(\pi/4) - 1)\hat{P} = \hat{1} + (1/\sqrt{2} - 1)\hat{P}$. ii) Poichè $\hat{P}^2 = \hat{P}$, segue che i possibili autovalori di \hat{P} sono 0 o 1; quindi i possibili autovalori di \hat{A} sono $\cos 0 = 1$ e $\cos(\pi/4) = 1/\sqrt{2}$.

4) (5 pt) Se $\hat{f}(k) = \frac{1}{1+k^4}$ è la trasformata di Fourier di $f(x)$, trovare la trasformata di Fourier della funzione $g(x) = xf'(x)$.

Soluzione 4. $\hat{g}(k) = i \frac{d}{dk} \left(\frac{ik}{1+k^4} \right) = \frac{3k^4 - 1}{(1+k^4)^2}$

5) (5 pt) Data la funzione $f(x) = |\sinh x|$, calcolare $f'(x)$ e $f''(x)$.

Soluzione 5. $f'(x) = \operatorname{sgn}(x) \cosh x$, $f''(x) = 2\delta(x) + |\sinh x|$

MODELLI E METODI MATEMATICI DELLA FISICA

P. M. Santini e A. Urbano

Scritto del 18/06/2024

1) [10 punti] Si consideri l'integrale

$$I_1 = \int_0^{\infty} \frac{1}{x^p(2+x)} dx, \quad p \in \mathbb{R}. \quad (92)$$

Dire per quali valori di p l'integrale è convergente. In corrispondenza di questi valori, calcolarlo usando opportunamente il teorema dei residui.

Soluzione. L'integrale converge per $0 < p < 1$. Usando il contorno pac-man, si trova $I_1 = 2^{-p}\pi/\sin(p\pi)$.

2) [6 punti] Si consideri la funzione

$$f(z) = \frac{2}{z^2 + 2iz}. \quad (93)$$

Si scriva lo sviluppo in serie di Laurent nell'anello $A(-2i, 0, 1)$. Si tratta del più grande anello di convergenza possibile (sempre rimanendo centrati in $z_0 = -2i$)? Si valuti infine l'integrale

$$I_2 = \oint_{\gamma} \frac{2}{(z+2i)(z^2+2iz)} dz, \quad (94)$$

usando sia il teorema dei residui (sfruttando il risultato del punto precedente) sia una delle formule integrali di Cauchy. La curva chiusa γ è la circonferenza definita dall'equazione $|z+2i|=1$ ed è orientata positivamente.

Soluzione. Lo sviluppo di Laurent nell'anello suggerito è $f(z) = i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z+2i)^{k-1}}{(2i)^k}$ e resta in realtà valido in tutto l'anello $A(-2i, 0, 2)$, ovvero finché non si incontra la singolarità in 0. Usando il teorema dei residui o la formula integrale di Cauchy (per la derivata prima), si ottiene $I_2 = \pi i$.

3) [5+2+3 pt] Sia $\{|e_j\rangle\}_{j \geq 1}$ una base ortonormale dello spazio di Hilbert H , e sia $\hat{L} = \sum_{j=1}^3 c_j |e_j\rangle\langle e_j|$, $c_j \in \mathbb{C}$, $c_j \neq 0$ un operatore lineare su H . i)

Determinare lo spettro di \hat{L} . Determinare le condizioni per cui \hat{L} ii) sia un operatore hermitiano: $\hat{L} = \hat{L}^\dagger$; iii) soddisfi alla condizione $\hat{L}\hat{L}^\dagger = \hat{L}^\dagger\hat{L}$.

Soluzione. i) Operatore di rango finito, quindi solo spettro discreto. Applicando $\langle e_k|$, $k \geq 1$ a $\hat{L}|\psi\rangle = \lambda|\psi\rangle$ si ottiene il sistema lin. omogeneo $(c_k - \lambda)\psi_k = 0$, $k = 1, 2, 3$ e $\lambda\psi_k = 0$, $k \geq 4$, con $\psi_k = \langle e_k|\psi\rangle$. Per $\lambda = c_k$, $k = 1, 2, 3$, ψ_k è arbitrario e $\psi_j = 0$, $j \neq k$. Per $\lambda = 0$,

$\psi_k = 0$, $j = 1, 2, 3$ e ψ_k è arbitrario per $k \geq 4$. Quindi c_j sono autovalori con autovettori $|e_j \rangle$, $j = 1, 2, 3$; 0 è autovalore con autovettori $|e_j \rangle$, $j \geq 4$.
 ii) $c_j \in \mathbb{R}$; iii) la condizione è sempre soddisfatta $\forall c_j \in \mathbb{C}$.

4) [5 pt] Se $\hat{f}(k) = e^{-k^4}$ è la trasformata di Fourier di $f(x)$, e $g(x) = xf'(x)$, determinare la trasformata di Fourier di $h(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)dy$.

Soluzione. $\hat{h}(k) = \hat{f}(k)\hat{g}(k) = e^{-k^4}i(ke^{-k^4})' = (4k^4 - 1)e^{-2k^4}$

5) [4 pt] Calcolare l'integrale $I = \int_0^3 \delta(x \cos x) \cos(2x)dx$

Soluzione. $I = \int_0^{\pi} [\delta(x) + \frac{2}{\pi}\delta(x - \pi/2)] \cos(2x)dx = \frac{\pi-4}{2\pi}$

MODELLI E METODI MATEMATICI DELLA FISICA

P. M. Santini e A. Urbano

Scritto del 03/07/2024

1) [10 punti] Si valuti l'integrale

$$I = \text{PV} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x e^{-ix}}{x^4 - 1} dx. \quad (95)$$

Si commenti riguardo alla presenza del valore principale. L'esercizio è considerato incompleto in assenza di un disegno che mostri il contorno di integrazione.

Soluzione. Il contorno di integrazione va chiuso nel semipiano complesso inferiore, e le due singolarità sull'asse reale (che forzano ad interpretare l'integrale nel senso del suo valore principale) devono essere indentate. Il risultato è $I = \frac{\pi i}{4} (\frac{2}{e} - e^{-i} - e^i)$.

2) [6 punti] Si consideri la funzione

$$w = f(z) = z^{3/4}(z - 3)^{1/4}. \quad (96)$$

Dire se si tratta di una funzione polidroma e, nel caso di risposta affermativa, specificare quanti valori distinti di w corrispondono allo stesso z . Identificare i punti di diramazione specificandone l'ordine. Si includa nell'analisi il punto all'infinito.

Soluzione. Si tratta di una funzione polidroma che associa ad uno stesso valore di z 4 distinti valori di w . Sia $z = 0$ che $z = 3$ sono punti di diramazione algebrica di ordine 3. Il punto all'infinito non è un punto di diramazione.

3) (4+5 pt) i) Determinare il Ker dell'operatore $(2 - E^+)$ in l_2 , dove $E^+ : l_2 \rightarrow l_2$ è definito da $E^+(x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_2, x_3, x_4, \dots)$. ii) Risolvere l'equazione $(2 - E^+)\underline{x} = (3, 2, 1, 0, \dots)$ in l_2 .

Soluzione. i) La soluzione dell'equazione $(2 - E^+)\underline{x} = \underline{0}$ è $\underline{x} = \{x_n\}$, $x_n = 2^{n-1}$, $\notin l_2$, quindi il Ker è banale. ii) Poichè $\|E^+\| = 1$, l'operatore $2 - E^+$ è invertibile, con inverso $(2 - E^+)^{-1} = \frac{1}{2} \sum_{n \geq 0} \frac{E^{+n}}{2^n}$, e quindi

$$\underline{x} = \frac{1}{2} \sum_{n \geq 0} \frac{E^{+n}}{2^n} (3, 2, 1, 0, \dots) = (\frac{17}{8}, \frac{5}{4}, \frac{1}{2}, 0, \dots)$$

4) (3+3 pt) Dire per quali delle seguenti funzioni $f_1(x) = \frac{\sin(x)+1}{\cos(2x)+2}$, $f_2(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(2x)+1}$, $f_3(x) = \frac{1}{\sqrt{|x|}}$, $x \in [-\pi, \pi]$, i coefficienti di Fourier i) esistono; ii) vanno a zero per $n \rightarrow \infty$ più rapidamente di ogni potenza.

Soluzione. i) I coeff. di Fourier esistono per $f_1, f_3 \in L^1[-\pi, \pi]$; non esistono

per $f_2 \notin L^1[-\pi, \pi]$ (ha poli semplici in $\pm\pi/2$). ii) Solo per $f_1 \in C^\infty[-\pi, \pi]$, e periodica con tutte le sue derivate; $f_2 \notin L^1[-\pi, \pi]$; le derivate di f_3 non appartengono a $L^1[-\pi, \pi]$.

5) (4 pt) Se

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & x > 0, \\ x, & x < 0, \end{cases} \quad (97)$$

calcolare $f'(x)$ e $f''(x)$.

Soluzione. $f'(x) = H(x) \cos x + H(-x)$, $f''(x) = -H(x) \sin x$.

MODELLI E METODI MATEMATICI DELLA FISICA

P. M. Santini e A. Urbano

Scritto del 10/09/2024

1) [10 punti] Usando opportunamente il teorema dei residui, si calcoli l'integrale

$$I = \int_0^{\infty} \frac{x^2}{x^4 + 1} dx. \quad (98)$$

Soluzione. Si estenda per parità l'integrale su tutto \mathbb{R} . Chiudendo, ad esempio, il contorno di integrazione nel semipiano complesso superiore e calcolando i due residui in $z = e^{i\pi/4}$ e $z = e^{3i\pi/4}$, si ottiene $I = \pi/2\sqrt{2}$.

2) [6 punti] Si consideri la funzione

$$f(z) = \frac{e^z}{z(z^2 + 1)}. \quad (99)$$

Si consideri lo sviluppo in serie di Laurent di $f(z)$ convergente per $|z| = 1/2$. Si indichi qual è il più grande anello di convergenza di questo sviluppo e si trovino tutte le sue potenze negative.

Soluzione. Lo sviluppo indicato converge al più nell'anello $A(0, 0, 1)$ a causa delle singolarità in $z = \pm i$. Usando $1/(1+z^2) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^{2k}$ e la serie di Taylor di e^z , si ottiene subito che $f(z) = \frac{1}{z} + O(z^0)$. Questo risultato è del tutto atteso, essendo $z = 0$ un polo semplice per la funzione data.

3) [4+5 pt] Sia H uno spazio di Hilbert e \hat{P} un proiettore ortogonale in tale spazio. Calcolare le seguenti funzioni di \hat{P} : i) $\exp(c\hat{P})$, ii) $\log(\hat{1} + c\hat{P})$, per scelte opportune del parametro $c \in \mathbb{C}$, dove per la funzione polidroma \log qui si intende il suo ramo tale che $\log(1) = 0$ (può essere utile ricordare che $\log(1+z) = -\sum_{n \geq 1} \frac{(-z)^n}{n} + 2\pi ik$, $k \in \mathbb{Z}$).

Soluzione. i) $\exp(c\hat{P}) = \hat{1} + (e^c - 1)\hat{P}$, $c \in \mathbb{C}$, ii) $\log(\hat{1} + c\hat{P}) = \log(1 + c)\hat{P}$, $|c| < 1$.

4) [5 pt] Se $\hat{f}(k)$ è la trasformata di Fourier di $f(x)$, e $g(x) = xf(x+1)$, determinare la trasformata di Fourier di $g(x)$ e di $h(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)dy$ in funzione di $\hat{f}(k)$.

Soluzione. $\hat{g}(k) = e^{ik}(i\hat{f}'(k) - \hat{f}(k))$, $\hat{h}(k) = \hat{f}(k)\hat{g}(k) = e^{ik}(\frac{i}{2}\frac{d}{dk} - 1)\hat{f}^2(k)$

5) [4 pt] La funzione $f(x) = \log(1+x)$ per $x > 0$, e $f(x) = 2x$ per $-1 < x < 0$ (dove per la funzione polidroma \log anche qui si intende il suo ramo tale che $\log(1) = 0$), determinare $f'(x)$ e $f''(x)$ per $x > -1$.

Soluzione. $f'(x) = 2H(-x) + \frac{H(x)}{1+x}$, $f''(x) = -\delta(x) - \frac{H(x)}{(1+x)^2}$