AA 2018-19; canale A-F; A. Maselli e P. M. Santini
Scritto del 18/06/2019

1) Data la funzione $f(z) = \frac{z^{1/3}}{\sinh z}$, individuare le sue singolarità in $\overline{\mathbb{C}}$ e la loro natura, calcolando inoltre, dove è possibile, i corrispondenti residui (scegliendo un'opportuna determinazione della radice).
R. $z_n = i\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$ sono poli semplici, con residuo $(-1)^n \sqrt[3]{\pi|n|} \exp(i\pi/6)$, se $n > 0$, e $(-1)^n \sqrt[3]{\pi|n|} i$, se $n < 0$. $f(z) \sim z^{-2/3}$, se $z \sim 0$; quindi 0 è punto di diramazione; ∞ è sia punto di diramazione che punto d'accumulazione di poli semplici.

2) Utilizzando il teorema dei residui, calcolare l'integrale $I = \int\limits_0^\infty \frac{\log x}{x^2+4} dx$.

R. $I = \frac{\pi}{4} \log 2$; lo si calcola in due possibili modi: i) integrando $\frac{\log^2 z}{z^2+4}$ sul contorno pac-man, oppure $\frac{\log z}{z^2+4}$ su "mezzo" contorno pac-man, sfruttando la parità di $(x^2+4)^{-1}$

3) Data la serie di Taylor

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{\frac{n}{2}} n!}{n^n} (z - z_0)^n,$$

determinare il suo raggio di convergenza R e studiarne la convergenza (puntuale, assoluta, uniforme) nel piano complesso (inclusa la circonferenza di centro z_0 e raggio R). Sugg. può essere utile far uso della formula di Stirling: $n! = \sqrt{2\pi n}\; n^n e^{-n}(1 + O(n^{-1})),\ n \gg 1$.
R. $R = e/\sqrt{3}$; per $z - z_0 = Re^{in\theta}$, $\frac{3^{\frac{n}{2}} n!}{n^n}(z - z_0)^n = \sqrt{2\pi n} e^{in\theta}(1 + O(n^{-1}))$. Quindi: conv. assoluta per $|z - z_0| < R$, uniforme per $|z - z_0| \leq \rho < R$, e divergenza per $|z - z_0| \geq R$.

4) i) Sia $f(x) = \lfloor x^2 \rfloor$, dove $\lfloor y \rfloor$ è il più grande intero $\leq y$; calcolare $f'(x)$ per $x \geq 0$. ii) Calcolare $I = \int\limits_0^\pi e^x \delta(x \cos x) dx$.

R. i) $f(x) = \sum_{n \geq 1} H(x - \sqrt{n})$, quindi $f'(x) = \sum_{n \geq 1} \delta(x - \sqrt{n})$. ii) $x \cos x$ ha zeri semplici in 0 e in $\pi/2 + n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$, ma solo $0, \pi/2$ contribuiscono (0 dà un contributo dimezzato, stando al bordo). Quindi: $I = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} e^{\pi/2}$

5) Sia $\hat{f}(k) = (\mathcal{F}f)(k) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ikx} f(x) dx$ la trasformata di Fourier di $f(x)$, $\mathcal{F}:\ L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$. i) Calcolare $\|\mathcal{F}\|$. ii) Mostrare (con un controesempio) che, se $f \in L^1(\mathbb{R})$, l'implicazione $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ è falsa. iii) Calcolare la trasformata di Fourier $\hat{R}(k)$ della funzione

$$R(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-(x-y)^2}}{y^2+1} dy. \tag{1}$$

R. i) Dalla formula di Plancherel: $\|\mathcal{F}f\|/\|f\| = \sqrt{2\pi}$, $\forall f \in L_2(\mathbb{R})$, segue che $\|\mathcal{F}\| = \sqrt{2\pi}$. ii) Se $f(x) = H(1-x^2) \in L_1(\mathbb{R})$, $\hat{f}(k) = \frac{2\sin k}{k} \notin L_1(\mathbb{R})$. iii) Se $R(x) = \int_{\mathbb{R}} g(x-y)f(y)dy$, con $g(x) = e^{-x^2}$ e $f(x) = (x^2+1)^{-1}$, dal thm. di convoluzione segue che: $\hat{R}(k) = \pi^{3/2}e^{-k^2/4-|k|}$ ($\hat{g}(k) = \sqrt{\pi}\exp(-k^2/4)$ e $\hat{f}(k) = \pi e^{-|k|}$).

6) Dato l'operatore di innalzamento (o traslazione sinistra) $T : l_2 \to l_2$: $T(x_1, x_2, x_3, \dots) := (x_2, x_3, x_4, \dots)$, $\quad x = (x_1, x_2, x_3, \dots) \in l_2$, dove l_2 è lo spazio delle successioni al quadrato sommabili, i) calcolare $\|T\|$, ii) trovare l'hermitiano coniugato $T^\dagger$ di T, e iii) trovare una soluzione particolare dell'equazione lineare

$$(1-\alpha T)x = (1,0,2,0,0,\dots), \quad x \in l_2, \quad \alpha \in \mathbb{C}. \tag{2}$$

R. i) $\|T\| = 1$; ii) $(T^\dagger y, x) = (y, Tx)$, $\forall\ x, y \in l_2$, quindi $T^\dagger(x_1, x_2, x_3, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots)$. iii) $x = (1-\alpha T)^{-1}(1,0,2,0,0,\dots) = (1+\alpha T+\alpha^2T^2)(1,0,2,0,0,\dots) = (1+2\alpha^2, 2\alpha, 2, 0, \dots)$; soluzione particolare $\forall \alpha \in \mathbb{C}$.

AA 2018-19; canale A-F; A. Maselli e P. M. Santini
Scritto del 02/07/2019

1) [5] Utilizzando il teorema dei residui, calcolare il seguente integrale [descrivere in modo esplicito il cammino di integrazione] $\int_0^\infty \frac{dx}{x^{1/3}(4+x)}$.
R. $2^{1/3}\pi/\sqrt{3}$.
2) [6] Calcolare il seguente integrale di Fourier, utilizzando il metodo dei residui, $\forall k \in \mathbb{R}$

$$I(k) = \int_{\mathbb{R}} \frac{x\ e^{ikx}}{(x^2+1)^2} dx\ . \tag{3}$$

R. $I(k) = i\pi k e^{-|k|}/2$
3) [6] Data la funzione $f(z) = \frac{z+\pi}{\sin z}$: (i) determinarne le singolarità in $\bar{\mathbb{C}}$ e la loro natura, calcolandone i residui corrispondenti, (ii) calcolare il valore dell'integrale $I = \oint_\gamma f(z)dz$, dove γ e' la circonferenza centrata in 0 e di raggio $3\pi/2$, percorsa in senso antiorario.
R. (i) $z_n = n\pi, n \in \mathbb{Z}$, $n \neq -1$ poli semplici; $-\pi$ singolarità apparente; ∞ punto di accumulazione poli semplici; $Res(f, z_n) = (-1)^n(n+1)\pi$, $n \neq -1$; (ii) $I = -2\pi^2 i$.
4) ([**3**]+[**3**]) i) Data la successione di funzionali lineari $F^{(n)}(\varphi) = \int\limits_0^\infty n^a e^{-nx}\varphi(x)dx$, determinarne il limite, per $n \to \infty$, al variare di $a \geq 0$. ii) Calcolare $I = \int\limits_{-1}^{1} \delta(e^{-x}\sin(\pi x))dx$.
R. i) $0 \leq a < 1$: $F^{(n)} \to 0$; $a = 1$: $F^{(n)} \to 2\hat{\delta}_0$; $a > 1$: $F^{(n)} \to \infty$. ii) $I = \frac{(e+1)^2}{2\pi e} = \frac{1+\cosh 1}{\pi}$
5) ([**2**]+[**2**]+[**3**]) i) Sviluppare la funzione $f(x) = x$ in serie di Fourier nell'intervallo $[-\pi, \pi]$; ii) dire dove tale serie converge puntualmente, assolutamente e uniformemente, in tale intervallo, individuandone gli eventuali punti di discontinuità e trovando il valore della somma in tali punti; confrontando infine i grafici di $f(x)$ e della somma $S(x)$ della serie su tutto $\mathbb{R}$. iii) Usare questi risultati per calcolare le somme notevoli $\sum\limits_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}$ e $\sum\limits_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{2n+1}$.
R. i) $x \sim S(x) \equiv 2\sum\limits_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin(nx)$. ii) $S(x)$ conv. puntualmente per $x \in (-\pi, \pi)$, unif. in ogni chiuso contenuto in $(-\pi, \pi)$; non conv. assolutamente. $S(x)$ discontinua in $\pm\pi$, con $S(\pm\pi) = 0$. iii) Parseval: $\sum\limits_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} = \pi/4$; $x = \pi/2$: $\sum\limits_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{2n+1} = \pi^2/6$

6)([**2**]+[**2**]+[**3**]) i) Mostrare che l'operatore d/dx non è limitato in $L^\infty[a,b]$. ii) Mostrare che l'operatore $\hat{p} = -id/dx$ è hermitiano in $L^2[a,b]$, con condizioni periodiche al bordo. iii) Calcolare lo spettro di $\hat{p}$ in $L^2[a,b]$, con condizioni periodiche al bordo (con le relative autofunzioni, se esistono), chiarendo se lo spettro sia discreto, continuo o residuo.

R. Ad es., per $f_n(x) = \frac{\sin(2\pi nx/(b-a))}{n}$, $\|f_n(x)\|_\infty = 1/n$, $\|f_n'(x)\|_\infty = 1$. Quindi $\frac{\|f_n'\|}{\|f_n\|} = n \not< cost$. ii) $(f, \hat{p}g) = \int_a^b \bar{f}(-ig')dx = -i[\bar{f}g]_a^b + (\hat{p}f, g) = (\hat{p}f, g)$, poichè $[\bar{f}g]_a^b = 0$. iii) $\hat{p}\psi = \lambda\psi$, $\psi \in \{L^2[a,b], \psi(a) = \psi(b)\}$. $\Rightarrow \sigma_p(\hat{p}) = \{\frac{2\pi}{b-a}n\}$, $n \in \mathbb{N}^+$, con $\psi_n(x) = \exp(i\frac{2\pi}{b-a}nx)$. $\sigma_r = \sigma_c = \emptyset$.

AA 2018-19; canale A-F; A. Maselli e P. M. Santini
Scritto del 12/09/2019

1) ([6]) Data la funzione $f(z)=\frac{z-i\pi/2}{\cosh z}$, i) individuare le sue singolarità in $\overline{\mathbb{C}}$ e la loro natura, calcolando inoltre, dove è possibile, i corrispondenti residui. ii) Calcolare l'integrale $I=\oint_C f(z)dz$ lungo la circonferenza di raggio π, centrata nell'origine, e percorsa in senso antiorario.
R. i) $z_n=i\pi(n+1/2),\ n\neq 0$ sono poli semplici; $z_0=i\pi/2$ sing. apparente. $\mathrm{Res}(z_n)=(-1)^n\pi n$. ∞ punto d'acc. di poli semplici. ii) $I=2\pi^2 i$
2) ([**6**]) Utilizzando il teorema dei residui, calcolare il seguente integrale (disegnare il cammino di integrazione scelto)

$$I=\int_0^\infty \frac{dx}{x^{1/4}(x+4)^2}dx,$$

R. $I=\pi/16$
3) ([**5**]) Usando il teorema dei residui, calcolare il seguente integrale (disegnare il cammino di integrazione scelto)

$$g(k,\tau)=\int_{\mathbb{R}}(x-\tau)^{-n}e^{ikx}dx,$$

dove $k\in\mathbb{R}$, n è un intero positivo, e la parte immaginaria del parametro τ è positiva.
R. $g(k,\tau)=H(k)\frac{2\pi i^n k^{n-1}}{(n-1)!}e^{ik\tau}$
4) ([**3**]+[**2**]+[**2**]) i) Data la funzione gradino $H(x)$ ($H(x)=1$ se $x>0$, $H(x)=0$ se $x<0$), i) svilupparla in serie di Fourier nell'intervallo $[-\pi,\pi]$. ii) Studiare le proprietà di convergenza (puntuale, uniforme, assoluta) della serie in tale intervallo, individuando il valore della somma $S(x)$ della serie negli eventuali punti di dicontinuità; disegnare infine i grafici di $H(x)$ e della somma $S(x)$ in $\mathbb{R}$. iii) Calcolare la somma notevole: $S=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$.
5) ([**2**]+[**2**]+[**2**]) Se $\hat{f}(k)=\exp(-k^4)$ è la trasformata di Fourier di $f(x)$ ($\hat{f}(k)=\int_{\mathbb{R}}\exp(-ikx)f(x)dx$), calcolare le trasformate di Fourier di: i) $g(x)=f'(x)$, ii) $h(x)=xf(x)$, e iii) dell'integrale di convoluzione $R(x)=\int_{\mathbb{R}}\frac{f(y)}{(x-y)^2+1}dy$.
R. $\hat{g}(k)=ik\exp(-k^4),\ \hat{h}(k)=-4ik^3\exp(-k^4),\ \hat{R}(k)=\pi\exp(-(|k|+k^4))$
6)([**3**]+[**3**]) i) Data la successione di funzionali lineari $F^{(n)}(\varphi)=\int_0^\infty n^a\exp(-nx^2)\varphi(x)dx$, determinarne il limite, per $n\to\infty$, al variare di $a\geq 0$. ii) Se $f(x)=(x^2-1)H(x)$, esprimere $f'(x)$, $f''(x)$ attraverso distribuzioni notevoli, e calcolare $I=\int_{\mathbb{R}}xe^{-x^2}f''(x)dx$.

R. i) $F^{(n)} \to 0$, se $0 \leq a < 1/2$; $F^{(n)} \to \sqrt{\pi}\hat{\delta}_0$, se $a = 1/2$; $F^{(n)} \to \infty$, se $a > 1/2$. ii) $f'(x) = 2xH(x) - \delta(x)$; $f''(x) = 2H(x) - \delta'(x)$, $I = 2$

AA 2018-19; canale A-F; A. Maselli e P. M. Santini
Scritto del 27/11/2019

1) ([**5**]) Utilizzando il teorema dei residui, calcolare il seguente integrale [descrivere in modo esplicito il cammino di integrazione]

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 4x}{x^2+1} dx \ . \tag{4}$$

R. πe^{-4}

2) ([**6**]) Calcolare l'integrale [descrivere in modo esplicito il cammino di integrazione utilizzato]

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\ln x}{x^3+1} dx \ . \tag{5}$$

R. $= -2\pi^2/27$

3) ([**5**]) Studiare il dominio di convergenza della seguente serie:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^{2k} z^{2k}}{2k} \tag{6}$$

R. $R = 1/2$. Conv. assoluta in $|z| < 1/2$, uniforme in ogni compatto di $|z| \leq 1/2$ che non contiene $z = \pm i/2$. Divergenza per $z = \pm i/2$ e per $|z| > 1/2$.

4) ([**3**]+[**3**]) i) Calcolare $(H(x)\sin x)''$ attraverso note distribuzioni ($H(x)$ è la funzione gradino: $H(x) = 1$ per $x > 0$, e $H(x) = 0$ per $x < 0$). ii) Calcolare l'integrale $I = \int\limits_0^{\pi} \delta\left((x-\pi/2)\sin x\right) \exp x \ dx$.

R. i) $(H(x)\sin x)'' = \delta(x) - H(x)\sin x$, ii) $I = 1/\pi + e^{\pi/2} + e^{\pi}/\pi$

5) ([**2**]+[**2**]+[**2**]) Se la trasformata di Fourier di $f(x) = (x^2+1)^{-1}$ è $\hat{f}(k) = \pi e^{-|k|}$, calcolare le trasformate di Fourier delle seguenti funzioni: i) $f_1(x) = (4x^2+1)^{-1}$, ii) $f_2(x) = \frac{x}{(x^2+1)^2}$, iii) $f_3(x) = \frac{x}{x^2+1}$ (NON facendo uso del teorema dei residui!).
R. $\hat{f}_1(k) = (\pi/2)e^{-|k|/2}$, $\hat{f}_2(k) = -\frac{1}{2}(ik)\hat{f}(k) = -\frac{i\pi k}{2}e^{-|k|}$, $\hat{f}_3(k) = i\hat{f}'(k) = -i\pi \ \mathrm{sign}(k)e^{-|k|}$

6) ([**2**]+[**3**]+[**2**]) i) Sviluppare la funzione $f(x) = e^x$ in serie di Fourier nell'intervallo $[-\pi, \pi]$ (suggerimento: conviene usare la base degli esponenziali $\{e^{inx}\}$). ii) Studiare la convergenza puntuale, assoluta e uniforme della serie in $[-\pi, \pi]$, individuare gli eventuali punti di discontinuità della somma

$S(x)$ della serie ed il valore della somma in tali punti; disegnare i grafici di $f(x)$ e $S(x)$ **su tutto** $\mathbb{R}$. iii) Usare la relazione di Parseval per calcolare la somma notevole $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$.

R. i) $e^x \sim \frac{\sinh(\pi)}{\pi} \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \frac{(-1)^n}{1-in} e^{inx}$, ii) $S(x)$ non converge assolutamente; converge unif. a e^x in ogni compatto contenuto in $(-\pi,\pi)$; converge puntualmente a e^x in $(-\pi,\pi)$; converge a $\frac{e^{\pi}+e^{-\pi}}{2}$ in $\pm\pi$ (punti di discontinuità). iii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} = \frac{1}{2}\left(\pi\coth(\pi) - 1\right)$

Scritto del 20/01/2020; canale A-F; A. Maselli e P. M. Santini

1) [**5**] Usare il teorema dei residui per calcolare la seguente trasformata di Fourier (disegnare il cammino di integrazione utilizzato)

$$I(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ikx}}{x^2+9} dx, \quad \forall k \in \mathbb{R}. \tag{7}$$

R. $I(k) = (\pi/3)\exp(-3|k|)$

2) [**7**] Usare il teorema dei residui per calcolare il seguente integrale (disegnare il cammino di integrazione utilizzato)

$$I = \int_0^{\infty} \frac{1}{x^2+3x+2} dx \ . \tag{8}$$

R. $I = \log 2$, attraverso l'integrazione della funzione $(\log z)/(z^2+3z+2)^{-1}$ sul contorno pacman.

3) ([**2**]+[**4**]) i) Calcolare il raggio di convergenza della serie seguente, e ii) le sue proprietà di convergenza in tutto $\mathbb{C}$ al variare del parametro $p \geq 0$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n^p \ n!}(z-z_0)^n \tag{9}$$

(potrebbe essere utile usare la formula di Stirling: $n! = n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}\ (1 + O(n^{-1})),\ n \gg 1)$.
R. i) $R = e^{-1}$. ii) Se $0 \leq p \leq 1/2$, conv. assoluta in $|z-z_0| < R$, uniforme in ogni compatto di $|z-z_0| \leq R$ che non contiene $z = z_0 + R$. Divergenza per $z = z_0 + R$ e per $|z-z_0| > R$. Se $p > 1/2$, conv. totale per $|z-z_0| \leq R$. Divergenza per $|z| > R$.

4) ([**3**]+[**3**]) i) Data la funzione $f(x) = e^{|x|},\ x \in \mathbb{R}$, calcolare $f'(x)$ e $f''(x)$ usando note distribuzioni. ii) Calcolare $I = \int\limits_0^{3/2} \delta\left(e^x \cos(\pi\ x)\right) dx$.

R. i) $f'(x) = sign(x)e^{|x|},\ f''(x) = e^{|x|} + 2\delta(x)$. ii) $I = (\pi\sqrt{e})^{-1}(1+(2e)^{-1})$

5) ([**3**]+[**3**]) Sia $\hat{f}(k) = (\mathcal{F}f)(k) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ikx} f(x) dx$ la trasformata di Fourier di $f(x)$, $\mathcal{F}:\ L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$. i) Mostrare (con un controesempio) che, se $f \in L^1(\mathbb{R})$, l'implicazione $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ è falsa. ii) Calcolare la trasformata di Fourier $\hat{R}(k)$ della funzione

$$R(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-(x-y)^2}}{y^2+9} dy \tag{10}$$

Sugg. può essere utile ricordare i) che la trasformata di Fourier di $g(x) = \exp(-x^2)$ è $\hat{g}(k) = \sqrt{\pi}\exp(-k^2/4)$, e ii) il risultato dell'esercizio 1).
R. i) Se $f(x) = H(1-x^2) \in L^1(\mathbb{R})$, allora $\hat{f}(k) = 2\sin(k)/k \notin L^1(\mathbb{R})$. ii) Usando il teorema di convoluzione: $\hat{R}(k) = (\pi^{3/2}/3)\exp(-k^2/4 - 3|k|)$

6)([**2.5**]+[**4.5**] pt) Dato l'operatore di innalzamento (o traslazione sinistra) $T : l_2 \to l_2$:

$$T(x_1, x_2, x_3, \dots) := (x_2, x_3, x_4, \dots), \quad x = (x_1, x_2, x_3, \dots) \in l_2, \tag{11}$$

dove l_2 è lo spazio delle successioni al quadrato sommabili, i) trovare l'hermitiano coniugato $T^\dagger$ di T, e ii) lo spettro di T, specificando se sia spettro discreto, continuo o residuo.
R. i) $T^\dagger(x_1, x_2, x_3, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots)$. ii) $\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T)$, con $\sigma_p(T) = \{|\lambda| < 1\}$ e autovettori $\underline{x}_\lambda = (1, \lambda, \lambda^2, \dots) \in l_2$, e $\sigma_c(T) = \{|\lambda| = 1\}$, con $\underline{x}_\lambda = (1, \lambda, \lambda^2, \dots) \in l_\infty$

Scritto del 18/02/2020, canale A-F, A. Maselli e P. M. Santini,

1) (5 pt) Calcolare il seguente integrale trigonometrico tramite il metodo dei residui:

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{1-2a\cos x+a^2}dx \ , \quad (0<a<1) \ . \tag{12}$$

R. $2\pi/(1-a^2)$

2) (6 pt) Calcolare l'integrale a valore principale usando il metodo dei residui

$$P.V. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(2\pi x)}{x^2-1}dx \ . \tag{13}$$

R. 0

3) Determinare lo sviluppo in serie di Laurent delle seguenti funzioni nel dominio specificato

$$\begin{array}{ll} f_1(z)=\frac{z+2}{z^2-4z+3} & 2<|z-1|<\infty \ , \\ f_2(z)=\frac{2}{z^2-1} & 1<|z+2|<3 \ . \end{array} \tag{14}$$

R. $f_1(z)=\frac{1}{z-1}+5\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2^{n-2}}{(z-1)^n}$, $f_2(z)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(z+2)^n}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+2)^n}{3^{n+1}}$

4) ([**3**]+[**3**]) i) Data la successione di funzionali lineari $\{F^{(n)}\}$ definita da $F^{(n)}(\varphi)=n^a\int\limits_0^{\infty}x^2e^{-nx^2}\varphi(x)dx$, determinarne il limite, per $n\to\infty$, al variare di $a\geq 0$ (può essere utile ricordare che $\int\limits_0^{\infty}x^2\exp(-x^2)dx=\sqrt{\pi}/4$). ii) Calcolare l'integrale $I=\int\limits_0^{\infty}\delta(e^x\sin(\pi x))dx$.

R. i) $F^{(n)}\to 0$ se $0\leq a<3/2$;$F^{(n)}\to(\sqrt{\pi}/2)\hat{\delta}_0$ se $a=3/2$; $F^{(n)}\to\infty$ se $a>3/2$. ii) $I=\frac{e+1}{2\pi(e-1)}$

5) ([**2**]+[**2**]+[**2**]) i) Sviluppare la funzione $H(x)$ in serie di Fourier nell'intervallo $[-\pi,\pi]$, dove H è la funzione gradino ($H(x)=1,\ x>0;\ H(x)=0,\ x<0$). ii) Dire se la somma $S(x)$ di tale serie converge puntualmente, assolutamente e uniformemente a $H(x)$, in tale intervallo, trovando il valore della somma negli eventuali punti di discontinuità. Disegnare infine i grafici di $H(x)$ e della somma $S(x)$ della serie su tutto $\mathbb{R}$. iii) Calcolare la somma notevole $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$.

6)([**2**]+[**3**]+[**2**]) Dato l'operatore $\hat{p}=-id/dx$, i) mostrare che non è limitato in in $C[a,b]$ rispetto alla norma $\|\cdot\|_{\infty}$. ii) Mostrare che è hermitiano sia in $L^2[a,b]$, con condizioni periodiche al bordo, che in $L^2(\mathbb{R})$. iii) Calcolarne lo spettro in $L^2[a,b]$, con condizioni periodiche al bordo (e le relative

autofunzioni, se esistono), chiarendo se sia discreto, continuo o residuo.
R. i) ad esempio, se $f_n(x) = \sin(nx)/n$, $\|f_n\|_\infty = 1/n$, $\|\hat{p}f_n\|_\infty = 1$. Quindi $\|\hat{p}f_n\|_\infty / \|f_n\|_\infty = n$ non limitato.

AA 2019-20. Scritto telematico del 16/06/2020
canale A-D, A. Maselli e P. M. Santini, versione 1

1) (**10 pt**) Calcolare il seguente integrale tramite il metodo dei residui:

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^2+3}dx \ . \tag{15}$$

R. $e^{-\sqrt{3}}\pi/(2\sqrt{3})$
2) (**4 pt**) Scrivere lo sviluppo in serie di potenze della funzione $f(z) = \frac{1}{z-z^2}$, centrato in $z_0 = 1$, per $|z-1| > 1$.
R. $\sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{(z-1)^{n+2}}$
3) (**10 pt**) i) Sviluppare la funzione $f(x) = e^{iax}$, con a reale non intero, in serie di Fourier nell'intervallo $[-\pi,\pi]$ (si suggerisce di usare lo sviluppo in esponenziali); ii) dire dove tale serie converge puntualmente, assolutamente e uniformemente in tale intervallo, individuandone gli eventuali punti di discontinuità e trovando il valore della somma in tali punti. iii) Usare lo sviluppo trovato per calcolare la somma notevole $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \frac{(-1)^n}{n-a}$, calcolando la serie ottenuta in un valore di x opportuno.
R. i) $e^{iax} \simeq \frac{\sin(a\pi)}{\pi} \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \frac{(-1)^n}{a-n} e^{inx}$; ii) la somma $S(x)$ della serie converge puntualmente a e^{iax} in $(-\pi,\pi)$, unif. in ogni compatto contenuto in $(-\pi,\pi)$; la serie non converge assolutamente. Il prolungamento periodico è discontinuo in $\pm\pi$, e $S(\pm\pi) = \cos(a\pi)$. iii) In $x = 0$ la convergenza è puntuale e si ottiene $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \frac{(-1)^n}{n-a} = -\frac{\pi}{\sin(a\pi)}$.

4) (**4 pt**) Calcolare l'integrale $I = \int\limits_{1/2}^{\infty} \delta\left(\cos(\pi x)\right) e^{-x} dx$.

R. $\delta\left(\cos(\pi x)\right) = \frac{1}{\pi} \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \delta(x-n-1/2)$, quindi $I = \frac{1}{\pi\sqrt{e}}\left(\frac{1}{2} + \sum\limits_{k\geq 1} e^{-k}\right) = \frac{1}{2\pi\sqrt{e}}\frac{e+1}{e-1}$.

5) (**4 pt**) Dato l'operatore $\hat{L} = a|e^{(1)} >< e^{(1)}| + b|e^{(2)} >< e^{(2)}| : l_2 \to l_2$, dove $\{\underline{e}^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ è la base canonica in l_2, trovarne lo spettro in l_2.
R. Solo spettro discreto $\sigma_p = \{0, a, b\}$. i) $a \neq b$: all'autovalore a corrisponde l'autovettore $\underline{e}^{(1)}$; all'autovalore b l'autovettore $\underline{e}^{(2)}$, e all'autovalore 0 corrispondono gli autovettori $\underline{e}^{(j)}$, $j \geq 2$ (e una qualunque comb. lin.). ii) $a = b$: all'autovalore a corrisponde sia l'autovettore $e^{(1)}$ che $\underline{e}^{(2)}$ (e una qualunque comb. lin. dei due). Come sopra per l'autovalore 0.

AA 2019-20. Scritto telematico del 16/06/2020
canale A-D, A. Maselli e P. M. Santini, versione 2

1) (**10 pt**) Calcolare con il teorema dei residui l'integrale:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^{1/4}(x^2+1)} \ . \tag{16}$$

R. $\sec(\pi/8)\pi/2$
2) (**4 pt**) Scrivere lo sviluppo in serie di Laurent di $f(z) = \frac{1}{z-2}$ centrato in $z_0 = 1$, per $|z-1| > 1$ e $|z-1| < 1$. Si suggerisce di disegnare preventivamente le singolarità ed il centro dello sviluppo.
$-\sum_{n=0}^\infty (z-1)^n$ per $|z-1| < 1$ e $\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(z-1)^{n+1}}$ per $|z-1| > 1$
3) (**10 pt**) Se $\hat{f}(k) = \sqrt{2\pi}e^{-k^2/2}$ è la trasformata di Fourier di $f(x) = e^{-x^2/2}$ ($\hat{f}(k) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ikx} f(x)dx$), calcolare le trasformate di Fourier delle funzioni $f_1(x) = e^{-x^2}$, $f_2(x) = xe^{-x^2/2}$, e dell'integrale di convoluzione $f_3(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-\frac{(x-y)^2}{2}}}{y^2+1} dy$.
R. $\hat{f}_1(k) = \sqrt{\pi}e^{-k^2/4}$; $\hat{f}_2(k) = -i\sqrt{2\pi}ke^{-k^2/2}$; $\hat{f}_3(k) = \pi\sqrt{2\pi}e^{-k^2/2-|k|}$
4) (**4 pt**) Se $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{a^n}$, $a > 1$, calcolare $\|f\|_2$.
R. $\|f\|_2^2 = \pi \sum\limits_{n\geq 1} a^{-2n} = \frac{\pi}{a^2-1}$. Quindi $\|f\|_2 = \sqrt{\frac{\pi}{a^2-1}}$
5) (**4 pt**) Calcolare il $\mathrm{Ker}(2\hat{E}^+ - \hat{1})$, dove $\hat{E}^+ : l_2 \to l_2$ è definito da $\hat{E}^+(x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_2, x_3, x_4, \dots)$.
R. $(2x_2, 2x_3, 2x_4, \dots) = (x_1, x_2, x_3, \dots)$. Quindi $x_{n+1} = \frac{x_n}{2} = \frac{x_{n-1}}{2^2} = \frac{x_{n-2}}{2^3} = \dots = \frac{x_1}{2^n}$, e $\mathrm{Ker}(2\hat{E}^+ - \hat{1})$=span$\{(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \dots)\}$.

AA 2019-20. Scritto telematico del 16/06/2020
canale A-D, A. Maselli e P. M. Santini, versione 3

1) (**10 pt**) Calcolare con il teorema dei residui il seguente integrale trigonometrico:

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\cos\theta + 3} \ . \tag{17}$$

R. $\pi/\sqrt{2}$
2) (**4 pt**) Trovare il raggio R di convergenza della serie $\sum_{k=1}^\infty \frac{2^{\sqrt{k}}}{k}(z-z_0)^k$, e chiarire dove converge assolutamente e uniformemente (senza studiare il comportamento al bordo).
R. Raggio di convergenza $R = 1$. Per Hadamard la serie diverge per $|z-z_0| >$

1, converge assolutamente per $|z-z_0|<1$ e uniformemente per $|z-z_0| \leq \rho < 1$

3) (**10 pt**) Dato $\hat{E}^- : l_2 \to l_2$ definito da $\hat{E}^-(x_1, x_2, x_3, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots)$, i) Calcolare il suo aggiunto (hermitiano coniugato). ii) Determinare per quali valori di $a \in \mathbb{C}$ esiste unica la solutione $\underline{x} \in l_2$ dell'equazione $(\hat{1} - a\hat{E}^-)\underline{x} = \underline{e}^{(1)}$ e calcolarla, dove $\underline{e}^{(1)} = (1, 0, 0, \dots) \in l_2$.

R. 3) ii) $\|\hat{E}^-\| = 1$, quindi se $|a| < 1$ esite limitato l'operatore $(\hat{1} - a\hat{E}^-)^{-1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a^n \hat{E}^{-n}$. Poichè inoltre $\hat{E}^{-n}\underline{e}^{(1)} = \underline{e}^{(n+1)}$, si ha $\underline{x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a^n \hat{E}^{-n}\underline{e}^{(1)} = (1, a, a^2, a^3, \dots) \in l_2$, if $|a| < 1$.

4) (**4 pt**) Data la successione di funzionali $F^{(n)}(\varphi) = n^a \int\limits_0^{\infty} x^3 e^{-nx^2}\varphi(x)dx$, calcolarne il limite per $n \to \infty$, al variare di $a \geq 0$. Può essere utile sapere che $\int\limits_0^{\infty} x^3 e^{-x^2} dx = 1/2$.

R. Se $F^{(n)}(\varphi) = n^{a-2} \int\limits_0^{\infty} y^3 e^{-y^2}\varphi(\frac{y}{\sqrt{n}})dy$, con $y = \sqrt{n}x$. Nell'ipotesi in cui sia possibile fare il limite sotto integrale si ottiene $F^{(n)}(\varphi) \sim n^{a-2}\varphi(0)/2$: Quindi: se $0 \leq a < 2$, $F^{(n)} \to 0$. Se $a > 2$, $F^{(n)} \to \infty$. Se $a = 2$, $F^{(n)} \to \hat{\delta}_0$ (si ricordi che $\int\limits_0^{\infty} \delta(x)\varphi(x)dx = \varphi(0)/2$).

5) (**4 pt**) Data la matrice $A = i\theta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\theta \in \mathbb{R}$, calcolare e^A.

R. $e^A = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$, con $A^{2k} = (-1)^k\theta^{2k}I,\ A^{2k+1} = (-1)^k\theta^{2k}A$. Quindi $e^A = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{A^{2k}}{(2k)!} + \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{A^{2k+1}}{(2k+1)!} = I\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\theta^{2k}}{(2k)!} + A\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\theta^{2k}}{(2k+1)!} = \cos\theta I + \frac{\sin\theta}{\theta}A = \begin{pmatrix} \cos\theta & i\sin\theta \\ i\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

AA 2019-20. Scritto telematico del 30/06/2020
canale A-D, A. Maselli e P. M. Santini, versione 1

1) (**10 pt**) Calcolare l'integrale

$$I = \int_0^\infty \frac{x^{-1/2}}{x^3+1}dx$$

utilizzando il metodo dei residui.
R. $2\pi/3$
2) (**4 pt**) Determinare tutti i valori di a) $\log(\sqrt{3}+i)$; b) $(2i)^{1/3}$.
R. a) $\log(2)+i(\frac{\pi}{6}+2k\pi),\ k\in\mathbb{Z}$, b) $2^{1/3}e^{i(\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3})},\ k=0,1,2$
3) (**10 pt**) Dato l'operatore $P = |e^{(2)} >< e^{(2)}|$, dove $e^{(2)}$ è il versore canonico $(0,1,0,\dots)$ di l_2, i) calcolare autovalori e autovettori di P in l_2. ii) Ricordando la relazione tra lo spettro discreto di un operatore A e della funzione $F(A)$ di tale operatore, calcolare autovalori e autovettori di $U(P)=\exp(iaP),\ a\in\mathbb{R}$ (non è necessario calcolare esplicitamente $U(P)$). iii) Verificare che $U^+ = U^{-1}$.
R. i) P è il proiettore ortogonale su $e^{(2)}$, quindi ha: autovalore 1 con autovettore $e^{(2)}$, e autovalore 0 con autovettori $\{e^{(j)}\}_{j\neq 2}$ (una qualunque comb. lin.). ii) $U=\exp(iaP)$ ha quindi autovalore $\exp(ia)$ con autovettore $e^{(2)}$, e autovalore $\exp(ia\cdot 0)=1$ con autovettori $\{e^{(j)}\}_{j\neq 2}$ (una qualunque comb. lin.). iii) dalle note del corso: $\hat{1}=\exp((ia-ia)P)=\exp(iaP)\exp(-iaP)=\exp(-iaP)\exp(iaP)$; quindi $U^{-1}=\exp(-iaP)$; inoltre $U^\dagger=(\sum\limits_0^\infty \frac{(iaP)^n}{n!})^\dagger = \sum\limits_0^\infty \frac{(-iaP)^n}{n!}=\exp(-iaP)$, poichè $P^\dagger = P$.

4) (**4 pt**) Sviluppare in serie di Fourier la funzione $\sinh x$ nell'intervallo $[-\pi,\pi]$.
R. $\sinh x \simeq \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} f_n e^{inx}$, con $f_n = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{e^x-e^{-x}}{2}e^{-inx}dx = \dots = \frac{\sinh\pi}{\pi}\frac{(-1)^n in}{1+n^2}$.

5) (**6 pt**) Data la funzione $f(x)=H(x)g(x)$, determinare $g(x)$ tale che i) $f(x)$ sia continua e $f''(x)=2\delta(x)$; ii) $f''(x)=\delta'(x)$.
R. i) $f(x)$ continua $\Leftrightarrow\ g(0)=0$; quindi $f'(x)=\delta(x)g(0)+H(x)g'(x)=H(x)g'(x),\ f''(x)=\delta(x)g'(0)+H(x)g''(x)=2\delta(x).\ \Rightarrow\ g(x)=2x$. ii) $f'(x)=\delta(x)g(0)+H(x)g'(x),\ f''(x)=\delta'(x)g(0)+\delta(x)g'(0)+H(x)g''(x)=\delta'(x),\Rightarrow\ g(x)=1$.

AA 2019-20. Scritto telematico del 30/06/2020
canale A-D, A. Maselli e P. M. Santini, versione 2

1) (**10 pt**) Calcolare utilizzando il metodo dei residui il seguente integrale

$$I = \int_0^\infty \frac{x^{1/2}}{x^3+8} dx$$

R. $\pi/(6\sqrt{2})$
2) (**4 pt**) Determinare tutti i valori di a) $\sqrt{3}\log(1-i)$; b) $(-2)^{1/4}$.
R. a) $\sqrt{3}\log(\sqrt{2}) + i\sqrt{3}(\frac{7\pi}{4}+2k\pi),\ k\in\mathbb{Z}$, b) $2^{1/4}e^{i(\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2})},\ k=0,1,2,3$
3) (**10 pt**) Dato l'operatore $P = |e^{(1)} >< e^{(1)}|$, dove $e^{(1)}$ è il versore canonico $(1,0,0,\dots)$ di l_2, i) calcolare autovalori e autovettori di P in l_2. ii) Ricordando la relazione tra lo spettro discreto di un operatore A e della funzione $F(A)$ di tale operatore, calcolare autovalori e autovettori di $U(P) = (1-iaP)(1+iaP)^{-1},\ -1<a<1$ (non è necessario calcolare esplicitamente $U(P)$). iii) Verificare che $U^+ = U^{-1}$. Si ricordi che $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, con A e B operatori invertibili, e che $F_1(A)F_2(A) = F_2(A)F_1(A)$, dove F_1 e F_2 sono due funzioni dell'operatore A.
R. i) P è il proiettore ortogonale su $e^{(1)}$, quindi ha: autovalore 1 con autovettore $e^{(1)}$, e autovalore 0 con autovettori $\{e^{(j)}\}_{j\neq 1}$ (una qualunque comb. lin.). ii) $U = (1-iaP)(1+iaP)^{-1}$ ha quindi autovalore $(1-ia)/(1+ia)$ con autovettore $e^{(1)}$, e autovalore $(1-ia\cdot 0)/(1+ia\cdot 0) = 1$ con autovettori $\{e^{(j)}\}_{j\neq 1}$ (una qualunque comb. lin.). iii) Ricordando che $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$, si ha che: $U^{-1} = (1+iaP)(1-iaP)^{-1}$ e $U^\dagger = \left((1+iaP)^{-1}\right)^\dagger (1-iaP)^\dagger = \left((1+iaP)^\dagger\right)^{-1}(1+iaP) = (1-iaP)^{-1}(1+iaP)$, avendo usato $P = P^\dagger$. Infine due funzioni diverse dello stesso operatore commutano, quindi $U^{-1} = U^\dagger$.
4) (**4 pt**) Sviluppare in serie di Fourier la funzione $\cosh x$ nell'intervallo $[-\pi,\pi]$.
R. $\cosh x = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} f_n e^{inx}$, con $f_n = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{e^x+e^{-x}}{2}e^{-inx}dx = \cdots = \frac{\sinh\pi}{\pi}\frac{(-1)^n}{1+n^2}$.
5) (**6 pt**) Data la funzione $f(x) = aH(x)x^n$, con $a\in\mathbb{R}$ e $n\in\mathbb{N}^+$, determinare a e n tali che i) $f''(x) = H(x)$; ii) $f''(x) = 2\delta(x)$.
R. $f'(x) = a\delta(x)x^n + anH(x)x^{n-1} = anH(x)x^{n-1}$, poichè $n\in\mathbb{N}^+$, e $f''(x) = an\delta(x)x^{n-1} + an(n-1)H(x)x^{n-2}$. Quindi i) $f''(x) = H(x)$ implica $n=2$ e $a=1/2$; ii) $f''(x) = 2\delta(x)$ implica $n=1$ e $a=2$.

AA 2019-20. Scritto del 10/09/2020
canale A-D, A. Maselli e P. M. Santini

1) (**10 pt**) Calcolare il seguente integrale con il metodo dei residui:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3 \sin x}{x^4+1} dx \ .$$

$(R.)$ $\pi \cos(1/\sqrt{2}) e^{-1/\sqrt{2}}$

2) (**4 pt**) Srivere lo sviluppo in serie di potenze centrato in $z_0 = 1$ della funzione $f(z) = \frac{1}{z-z^2}$, per $|z-1| > 1$.
$(R.)$ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(z-1)^{n+2}}$

3) (**10 pt**) Dati gli operatori $\hat{D} = d/dx$ e $\hat{P} = |e^{(1)} >< e^{(1)}|$, dove $\underline{e}^{(1)} = (1,0,0,\dots) \in l_2$, A) calcolare lo spettro di $\hat{D}$ i) nello spazio delle funzioni periodiche di $L^2[a,b]$, esibendo le relative autofunzioni, e ii) in $L^2(\mathbb{R})$. B) Risolvere l'equazione $(\hat{1} - \alpha\hat{P})\underline{x} = \underline{e}^{(1)} + 2\underline{e}^{(2)}$ in l_2, con $\underline{e}^{(2)} = (0,1,0,\dots) \in l_2$, e determinare i valori del parametro α tali che la soluzione esista.
R. A) i) $\sigma_p = \{\lambda_n = \frac{2\pi i}{b-a} n, \ n \in \mathbb{Z}\}$, $\psi_n(x) = e^{\lambda_n x}$; ii) Non c'è spettro discreto (non esiste $\lambda \in \mathbb{C}$ tale che $e^{\lambda x} \in L^2(\mathbb{R})$). Non c'è spettro residuo (se $\lambda \in \sigma_r$, $\bar{\lambda} \in \sigma_p(\hat{D}^\dagger)$; un assurdo, poichè $\hat{D}^\dagger = -\hat{D}$ e non c'è spettro discreto). Per $\lambda \in i\mathbb{R}$, $e^{\lambda x} \in L_\infty(\mathbb{R})$ e il risolvente è illimitato (la dimostrazione è come negli appunti per l'operatore quantità di moto); quindi $\sigma_c = i\mathbb{R}$. B) $\underline{x} = (\hat{1} - \alpha\hat{P})^{-1}\left(\underline{e}^{(1)} + 2\underline{e}^{(2)}\right) = \left(1 + \frac{\alpha}{1-\alpha}\hat{P}\right)\left(\underline{e}^{(1)} + 2\underline{e}^{(2)}\right) = \frac{1}{1-\alpha}\underline{e}^{(1)} + 2\underline{e}^{(2)}$, con $\alpha \neq 1$ (per invertire l'operatore si assume $|\alpha| < 1$, essendo $\hat{P}$ proiettore ortogonale con $\|\hat{P}\| = 1$, ma poi si osserva che la soluzione ottenuta è tale per ogni $\alpha \neq 1$). Si poteva arrivare al risultato piu' facilmente risolvendo l'equazione in modo diretto.

4) (**4 pt**) Se $\hat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ikx} f(x) dx$ è la trasformata di Fourier di $f(x) \in L^2(\mathbb{R})$, calcolare la trasformata di Fourier dell'integrale $F(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-|x-y|} H(1-y^2) dy$, dove $H(\xi)$ è la funzione gradino ($H(\xi) = 1$, $\xi > 0$, e $H(\xi) = 0$, $\xi < 0$).
R. Usando il teorema del prodotto di convoluzione: $\hat{F}(k) = TF(e^{-|x|}) TF(H(1-x^2)) = \frac{2}{1+k^2} \frac{2\sin k}{k} = \frac{4 \sin k}{k(1+k^2)}$

5) (**4 pt**) Calcolare l'integrale $I = \int\limits_0^{2\pi} \delta\left(e^x \sin x\right) dx$.
R. $I = \frac{1}{2} + e^{-\pi} + \frac{e^{-2\pi}}{2} = \frac{1}{2}(1 + e^{-\pi})^2$

AA 2019-20. Scritto del 16/11/2020
canale A-D, A. Maselli e P. M. Santini

1) (**10 pt**) Calcolare il seguente integrale con il metodo dei residui:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(3x)}{(x^2+1)^2} dx \ .$$

R. $2\pi e^{-3}$

2) (**4 pt**) Determinare tutti i valori di a) $(3i)^{1/2}$, b) $log(2+2i)$
R. a) $\sqrt{3}e^{i\pi(1/4+k)}, \ k=0,1$; b) $\log(2\sqrt{2})+i\pi(1/4+2k), \ k \in \mathbb{Z}$.

3) (**10 pt**) Dati gli operatori d^2/dx^2 e $E^+ : l_2 \to l_2$, dove $E^+(x_1,x_2,x_3,\dots) = (x_2,x_3,x_4,\dots)$, 1) calcolare lo spettro di d^2/dx^2 nello spazio delle funzioni $f(x) \in L^2[0,1]$ tali che $f(0)=f(1)$ e $f'(0)=f'(1)$. 2) Determinare i valori del parametro $a \in \mathbb{C}$ per cui la soluzione $\underline{x} \in l_2$ dell'equazione $(1-aE^+)\underline{x} = (1,2,3,0,0,\dots)$ esiste unica, e calcolare tale soluzione.
R. 1) $d^2/dx^2 f = \lambda f \Rightarrow f = ae^{\sqrt{\lambda}x} + be^{-\sqrt{\lambda}x}, \ \lambda \in \mathbb{C}$. $f(0)=f(1)$ e $f'(0)=f'(1)$ implicano che $e^{\pm\sqrt{\lambda}}=1, \Rightarrow \sqrt{\lambda_n} = 2\pi i n, \ n \in \mathbb{Z}$. Quindi gli autovalori sono $\{\lambda_n = -4\pi^2 n^2\}$ e le autofunzioni $f_n^{\pm} = e^{\pm 2\pi i n x}$. 2) Se $|a|<1$, esiste unica la soluzione $\underline{x} = (1-aE^+)^{-1}\underline{y} = \sum\limits_{j=0}^{\infty} a^j (E^+)^j \underline{y} = (1+2a+3a^2, 2+3a, 3, 0, \dots) \in l_2$. È soluzione $\forall a \in \mathbb{C}$, ma per $|a|>1$ non è unica, perchè anche l'equazione omogenea ha soluzione non banale $\underline{h} = (1, 1/a, 1/a^2, \dots) \in l_2, \ \Rightarrow \ \underline{x} = (1+2a+3a^2, 2+3a, 3, 0, \dots) + c\ \underline{h}$

4) (**4 pt**) Dire quali delle seguenti funzioni $f_1(x) = \frac{\sin(2x)}{2+\cos x}$, $f_2(x) = \frac{\sin(\pi x)}{2+\cos x}$, $f_3(x) = \frac{\sin(2x)}{1+2\cos x}$ hanno uno sviluppo in serie di Fourier $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n e^{inx}$ in $[-\pi,\pi]$ i cui coefficienti f_n vanno a zero, per $n \to \infty$, più rapidamente di ogni potenza, e perchè.
R. solo $f_1(x)$, perchè è periodica in $[-\pi,\pi]$ con tutte le sue infinite derivate; $f_2(x)$ non è periodica in $[-\pi,\pi]$ e $f_3(x)$ non appartiene a $L_1(\mathbb{R})$.

5) (**4 pt**) Calcolare l'integrale $I = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \delta\left(e^{-x}\cos x\right) dx$.

R. zeri dell'argomento della δ: $x_n = \pi/2+\pi n, \ n \in \mathbb{Z}$; $I = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \sum\limits_{n=-1}^{0} e^{n\pi+\pi/2}\delta(x-x_n)dx = \frac{1}{2}(e^{\pi/2}+e^{-\pi/2}) = \cosh(\pi/2)$

AA 2019-20. Scritto del 25/01/2021
canale A-D, P. M. Santini

1) (**10 pt**) Dato l'integrale:

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt[p]{x}}{(x+2)^2}dx, \tag{18}$$

i) determinare per quali valori di $p > 0$ l'integrale è ben definito;
ii) calcolare l'integrale per $p = 2$ usando il teorema dei residui.
R. i) $p > 1$, ii) $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$

2) (**4 pt**) Scrivere lo sviluppo in serie di potenze di $f(z) = \frac{1}{z-i}$ centrato in $z_0 = 0$, per $|z| < 1$ e $|z| > 1$. Si suggerisce di disegnare preventivamente le singolarità ed il centro dello sviluppo.
R. $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n i^{n+1} z^n$, $|z| < 1$. $\quad f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} i^n z^{-(n+1)}$, $|z| > 1$.

3) (**10 pt**) Dato l'operatore $\hat{E}^+ : l_2 \to l_2$ definito da $\hat{E}^+(x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_2, x_3, x_4, \dots)$, i) calcolarne l'aggiunto (hermitiano coniugato); ii) determinare per quali valori del parametro $a \in \mathbb{C}$ il $\mathrm{Ker}(a\hat{E}^+ - 1)$ in l_2 è non banale, e costruirlo; iii) dire per quali valori del parametro $a \in \mathbb{C}$ esiste unica la soluzione dell'equazione $(a\hat{E}^+ - 1)\underline{x} = (1, 1, 1, 0, \dots)$ in l_2, e trovarla.
R. i) $\left(\hat{E}^+\right)^\dagger = \hat{E}^-$. ii) Se $|a| > 1$, $\mathrm{Ker}(a\hat{E}^+ - 1) = \{(1, 1/a, 1/a^2, \dots, 1/a^{n-1}, \dots)\}$ $\in l_2$; se $|a| \le 1$ il Ker è banale. iii) Se $|a| < 1$, esiste unica la solutione $\underline{x} = -(1 - a\hat{E}^+)^{-1}(1, 1, 1, 0, \dots) = -\left(1 + a\hat{E}^+ + a^2(\hat{E}^+)^2 + a^3(\hat{E}^+)^3\right)(1, 1, 1, 0, \dots) = -(1 + a + a^2, 1 + a, 1, 0, \dots)$; tale soluzione è unica anche per $|a| = 1$; non è unica per $|a| > 1$, perchè ad essa si aggiunge un qualunque elemento del $\mathrm{Ker}(a\hat{E}^+ - 1)$.

4) (**4 pt**) Se $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{2^n}$, calcolare $\|f\|_2$.
R. $\|f\|_2{}^2 = 2\pi + \pi \sum\limits_{n=1}^{\infty} 4^{-n} = 7\pi/3$

5) (**4 pt**) Se $\mathcal{F}(f)(k) = \sqrt{2\pi}e^{-k^2/2}$ è la trasformata di Fourier di $f(x) = e^{-x^2/2}$ ($\mathcal{F}(f)(k) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ikx} f(x)dx$), calcolare la trasformata di Fourier di $g(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-\frac{(x-y)^2}{2}}}{y^2+1}dy$.
R. $\mathcal{F}(g) = \mathcal{F}\left(\exp(-x^2/2)\right)\mathcal{F}\left((x^2+1)^{-1}\right) = \pi\sqrt{2\pi}e^{-k^2/2-|k|}$

AA 2019-20. Scritto del 22/02/2021
canale A-D, P. M. Santini

1) (**10 pt**) Usare il teorema dei residui per calcolare l'integrale di Fourier:

$$I(k)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ikx}}{(x+i)(x^2+1)}dx \tag{19}$$

al variare del parametro $k\in\mathbb{R}$.
R. $I(k)=-i\frac{\pi}{2}e^{-k},\ k\geq 0.\ I(k)=i\pi(k-1/2)e^{k},\ k<0.$

2) (**6 pt**) i) Studiare le singolarità di $f(z)=\frac{\cos z}{z^2-\frac{\pi z}{2}}$ in $\mathbb{C}$ e nel punto ∞. ii) Calcolare l'integrale $I=\oint_\gamma f(z)dz$, dove γ è la circonferenza centrata nell'origine e di raggio 2, percorsa in senso anti-orario.
R. i) 0 polo semplice; $\pi/2$ singolarità apparente; ∞ sing. essenziale. ii) $I=2\pi i Res\,(f(z),0)=-4i$.

3) (**6 pt**) Data la funzione $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{(x^2-4)^a}$, determinare per quali valori del parametro $a\in\mathbb{R}$: i) $f(x)\in L^1(\mathbb{R}^+)$, ii) $f(x)\in L^2(\mathbb{R}^+)$.
R. i) $f\in L^1(\mathbb{R}^+)\ \Leftrightarrow\ 3/4<a<1$ ($a>3/4$ per conv. all'∞ e $a<1$ per conv. in $x=2$). ii) $f\notin L^2(\mathbb{R}^+)$ $\forall a\in\mathbb{R}$ ($a>1/2$ per conv. all'∞ e $a<1/2$ per conv. in $x=2$).

4) (**7 pt**) i) Costruire lo sviluppo in serie di Fourier di $f(x)=\sin(\pi x)$ in $[-\pi,\pi]$ (sugg. usare l'identità $\sin(ax)\sin(bx)=[\cos((a-b)x))-\cos((a+b)x)]/2$, oppure scrivere $\sin(\pi x)$ attraverso esponenziali). ii) Dire se tale serie converge assolutamente, e dove converge uniformemente. iii) Determinare gli eventuali punti di discontinuità della sua somma $S(x)$ in $\mathbb{R}$, ed il valore della somma in tali punti.
R. i) $\sin(\pi x)\sim\frac{2\sin(\pi^2)}{\pi}\sum\limits_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n+1}n}{n^2-\pi^2}\sin(nx)$. ii) No conv. ass.; conv. unif. in ogni chiuso contenuto in $(-\pi,\pi)$. iii) Discontinuità in $x_n=(2n+1)\pi,\ n\in\mathbb{Z}$, con $S(x_n)=0$.

5) (**4 pt**) Calcolare l'integrale $I=\int\limits_0^{2\pi}\delta(x\cos x)e^{-x}dx$.
R. $I=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\left(e^{-\pi/2}+\frac{e^{-3\pi/2}}{3}\right)$

AA 2020-21. Scritto straordinario del 05/05/2021
canale A-D, P. M. Santini e A. Urbano

1) [**10**] Calcolare il valore del seguente integrale

$$\mathcal{I} = \mathrm{PV} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x(x^2+4x+5)} dx$$

con il metodo dei residui. Si discuta esplicitamente e si motivi il cammino di integrazione scelto.

R. 1) La funzione di variabile complessa $f(z) = e^{iz}/z(z^2+4z+5)$ ha singolarità in $z = 0$ (a causa della quale l'integrale è da intendersi nel senso del suo valore principale di Cauchy) e in $z^2+4z+5 = (z+2)^2+1 = 0$, cioè $z = -2 \pm i$. Un possibile cammino di integrazione è dato da $\mathcal{C} = \gamma_R(\theta) + \lambda_2(x) + \gamma_r(\theta) + \lambda_1(x)$ percorso positivamente, dove quindi $\lambda_1(x) = x$ $(r \leqslant x \leqslant R)$, $\gamma_R(\theta) = Re^{i\theta}$ $(0 \leqslant \theta \leqslant \pi)$, $\lambda_2(x) = -x$ $(R \geqslant x \geqslant r)$, $\gamma_r(\theta) = re^{i\theta}$ $(\pi \geqslant \theta \geqslant 0)$ e dove r e R sono scelti, rispettivamente, sufficientemente piccolo e sufficientemente grande affinché sia $z = -2+i \in \mathrm{Int}(\mathcal{C})$. Si noti che con questa scelta di contorno $z = 0 \notin \mathrm{Int}(\mathcal{C})$. Il teorema dei residui permette quindi di calcolare $\oint_{\mathcal{C}} f(z)dz = 2\pi i \,\mathrm{Res}_{z=-2+i} f(z)$ da cui otteniamo $\mathcal{I} = \pi[i - (2+i)e^{-1-2i}]/5$. Si noti che nel limite $r \to 0$ e $R \to \infty$ l'integrale su $\lambda_1 + \lambda_2$ ricostruisce $\mathcal{I}$ mentre l'integrale su γ_R vale zero per il lemma di Jordan e l'integrale su γ_r è dato da $\lim_{r\to 0} \int_{\gamma_r} f(z)dz = -\pi i \,\mathrm{Res}_{z=0} f(z)$.

2) [**4**] Si consideri la funzione

$$f(z) = (z^2-1)^{1/2}\,. \tag{20}$$

Si identifichi il punto (o i punti) di diramazione e si discuta la natura della singolarità all'infinito (se eventualmente presente). Si illustri una possibile scelta di tagli che renda la funzione monodroma.

R. La funzione $f(z) = (z^2-1)^{1/2} = (z+1)^{1/2}(z-1)^{1/2}$ ha due punti di diramazione in $z_0 = 1$ e $z_1 = -1$. Entrambi i punti di diramazione sono di ordine 1 (punti di diramazione semplici). Il punto all'infinito non è un punto di diramazione. Un ramo monodromo della funzione si ottiene, ad esempio, tagliando il piano complesso sull'asse reale tra -1 e $+1$. Nel punto all'infinito $f(z)$ ha un polo semplice. Osserviamo infatti che la funzione $f(1/z) = (1-z^2)^{1/2}/z$ ammette lo sviluppo in serie di Laurent in un anello attorno all'origine (ovvero per $0 < |z| < 1$) dato da $f(1/z) = (1/z)\sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n}(-1)^n z^{2n} = 1/z - z/2 - z^3/8 + \ldots$.

3) [**10**] Definita la trasformata di Fourier $\hat{f}(k) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ikx} f(x)dx$ della funzione $f(x) \in L^1(\mathbb{R})$, i) mostrare che $\hat{f}(k)$ è uniformemente limitata e $\hat{f}(k) \to$

0 per $k \to \pm\infty$. ii) Calcolare la trasformata di Fourier dell'integrale $g(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-\frac{(x-y)^2}{2}}}{y^2+1} dy$, ricordando che la trasformata di Fourier di $e^{-x^2/2}$ è $\sqrt{2\pi}e^{-k^2/2}$.

R. ii) Per il teorema di convoluzione, la TF di $g(x)$ è il prodotto delle TF di $e^{-x^2/2}$ e di $\frac{1}{y^2+1}$; quindi $\hat{g}(k) = \pi\sqrt{2\pi}e^{-\left(k^2/2+|k|\right)}$

4) [**4**] Se $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{3^n}$, calcolare $\|f\|_2$.

R. Relazione di Parseval: $\|f\|_2 = \pi \sum\limits_{n\geq 1} 9^{-n} = \pi/8$.

5) [**4**] Calcolare l'integrale $I = \int\limits_0^{2\pi} \delta(\sin x)e^{-x}dx$.

R. Tre zeri semplici $0, \pi, 2\pi$ nell'intervallo $[0, 2\pi]$, con $0, 2\pi$ estremi di integrazione. Quindi $I = 1/2 + e^{-\pi} + e^{-2\pi}/2$.

AA 2020-21. Scritto del 22/06/2021
canale A-D, P. M. Santini e A. Urbano

1) [**10 pt**] Si valuti il seguente integrale

$$\mathrm{PV}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(-\pi x/2)}{(x^2+1)(x-1)}\,dx \tag{21}$$

applicando il teorema dei residui.
R.

$$\mathrm{PV}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(-\pi x/2)}{(x^2+1)(x-1)}\,dx = \mathrm{Im}\,\mathrm{PV}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i\pi x/2}}{(x^2+1)(x-1)}\,dx\,.$$

Consideriamo la funzione di variabile complessa $f(z) = e^{-i\pi z/2}/(z^3 - z^2 + z - 1)$ ed applichiamo il teorema dei residui $\mathcal{C} = \gamma_R \cup \lambda_1 \cup \gamma_r \cup \lambda_2$ scegliendo il contorno come segue $\oint_{\mathcal{C}} f(z)dz = 2\pi i\,\mathrm{Res}[f(z), -i]$, con: $\gamma_R(\theta) = Re^{i\theta}$, $\pi \leqslant \theta \leqslant 2\pi$; $\lambda_1(x) = x$, $R \geqslant x \geqslant 1 + r$; $\gamma_r(\theta) = 1 + re^{i\theta}$, $0 \geqslant \theta \geqslant -\pi$; $\lambda_2(x) = x$, $1 + r \geqslant x \geqslant -R$. Il calcolo del residuo dà $\mathrm{Res}[f(z), -i] = \frac{e^{-\pi/2}}{4i}(1 - i)$, mentre decomponendo su $\mathcal{C}$ e prendendo i limiti $R \to \infty$ e $r \to 0$ otteniamo

$$\begin{array}{ll}
\lim_{\substack{R\to\infty \\ r\to 0}}\left[\int_{\lambda_1} f(z)dz + \int_{\lambda_2} f(z)dz\right] & = -\mathrm{PV}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i\pi x/2}}{x^3-x^2+x-1}\,dx\,, \\
\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R} f(z)dz & = 0\,, \\
\lim_{r\to 0}\int_{\gamma_r} f(z)dz & = -\pi i \mathrm{Res}[f(z), 1] = -\frac{\pi}{2}\,,
\end{array} \tag{22}$$

dove l'integrale nella seconda equazione si annulla per il lemma di Jordan mentre l'integrale nella terza è stato valutato con il lemma delle singolarità indentate. In definitiva, quindi, si ottiene

$$\mathrm{PV}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(-\pi x/2)}{x^3-x^2+x-1}\,dx = \frac{\pi}{2}e^{-\pi/2} \tag{23}$$

Equivalentemente, notando che $\sin(-\pi x/2) = -\sin(\pi x/2)$, si sarebbe potuto chiudere il percorso nel semipiano complesso superiore.
2) [**5 pt**] Si consideri la funzione

$$f(z) = \frac{z}{e^z - 1} \tag{24}$$

nel piano complesso esteso $\mathbb{C}^*$. Si identifichino, specificandone la natura, le singolarità di $f(z)$ e si valutino, ove possibile, i corrispondenti residui.
R. Poiché $e^z - 1 = 0$ per $z_k = 2\pi i k$ con $k \in \mathbb{Z}$, abbiamo singolarità in $z = z_k$. La singolarità $z_0 = 0$ è una singolarità apparente dato che $\lim_{z\to 0} f(z) = 1$. Le singolarità $z_k = 2\pi i k$ con $k \neq 0$ sono poli semplici (sono zeri semplici

di $e^z - 1$) ed il residuo vale $\text{Res}[f(z), z_k] = z_k$. Consideriamo il punto all'infinito. Ponendo $w = 1/z$, abbiamo $f(w) = 1/[w(e^{1/w} - 1)]$ che ha singolarità in $w = 0$ (ovvero $z = \infty$) ma anche per $1/w = 2\pi ik$ con $k \in \mathbb{Z}$, cioè in $w_k = -i/2\pi k$ (ovvero $1/z_k$). Le singolarità $\{w_k\}$ chiaramente si accumulano in $w = 0$. Questo significa che $z = \infty$ non è una singolarità isolata ma un punto di accumulazione di poli semplici.

3) [**10 pt**] Dato $\hat{P} = \underline{e}^{(1)} \cdot \underline{e}^{(1)\dagger} = |e^{(1)}><e^{(1)}|$, dove $\{\underline{e}^{(n)}\}_{n\geq 1}$ è la base canonica in l_2, i) trovare la soluzione $|x>\in l_2$ dell'equazione

$$(\hat{1} - \frac{1}{2}\hat{P})|x>= 2|e^{(1)}> +|e^{(2)}> . \tag{25}$$

ii) Trovare lo spettro dell'operatore $\hat{A} = \hat{1} - \frac{1}{2}\hat{P}$.

R. i) Poichè $\|\hat{P}/2\| = 1/2$, $\underline{x} = (\hat{1} - \frac{1}{2}\hat{P})^{-1}\left(2\underline{e}^{(1)} + \underline{e}^{(2)}\right) = \left(\hat{1} + \hat{P}\right)\left(2\underline{e}^{(1)} + \underline{e}^{(2)}\right) = 4\underline{e}^{(1)} + \underline{e}^{(2)}$. ii) Applicando $< e^{(j)}|$ all'equazione agli autovalori $(\hat{1} - \frac{1}{2}\hat{P})|\psi >= \lambda|\psi >$ si ottiene: $\psi_1/2 = \lambda\psi_1,\ \psi_j = \lambda\psi_j,\ j \geq 2$, con $\psi_j =< e^{(j)}|\psi >,\ j \geq 1$. Quindi si ha l'autovalore $1/2$ con autovettore $|e^{(1)} >$, e l'autovalore 1 con autovettori $|e^{(j)} >,\ j \geq 2$. Il risolvente $(\hat{A} - \lambda\hat{1})^{-1}$ esiste limitato $\forall\lambda \neq 1, 1/2$, e vale $\frac{1}{1-\lambda}(\hat{1} + \frac{1}{1-2\lambda}\hat{P})$; quindi non c'è spettro continuo e residuo (la non esistenza di spettro residuo segue anche dal fatto che $\hat{A}$ è hermitiano).

4) [**4 pt**] Calcolare l'integrale

$$I = \int_0^{3\pi/2} \delta\left(cosh(x)\sin(x)\right) dx. \tag{26}$$

R. $I = 1/2 + 1/\cosh(\pi)$

5) [**4 pt**] Se la trasformata di Fourier di $f(x) = e^{-x^2}$ è $\hat{f}(k) = e^{-\frac{k^2}{4}}$, calcolare le trasformate di Fourier delle funzioni $f_1(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}}$ e $f_2(x) = x^2e^{-x^2}$.

R. $f_1(x) = xf(x/\sqrt{2}) \Rightarrow \hat{f}_1(k) = i\frac{d}{dk}\left(\sqrt{2}\hat{f}(\sqrt{2}k)\right) = -i\sqrt{2}ke^{-\frac{k^2}{2}}$. $\hat{f}_2(k) = i^2\frac{d^2}{dk^2}\hat{f}(k) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{k^2}{2}\right)e^{-\frac{k^2}{4}}$

AA 2020-21. Scritto del 06/07/2021
canale A-D, P. M. Santini e A. Urbano

1) [**10 pt**] Calcolare l'integrale

$$\mathcal{I} = \int_0^\infty \frac{x^{3/2}}{1+x^3}\,dx \tag{27}$$

usando opportunamente il teorema dei residui.
Soluzione 1. Consideriamo la funzione complessa $f(z) = \frac{z^{3/2}}{1+z^3}$ e scegliamo il ramo monodromo $z^{3/2} = |z|^{3/2}e^{3i\theta/2}$ con $0 < \theta < 2\pi$ tagliando il piano complesso lungo il semiasse reale positivo. Possiamo quindi calcolare l'integrale sfruttando il taglio ed usando il contorno pacman $\mathcal{C} = \lambda_1 \cup \gamma_R \cup \lambda_2 \cup \gamma_r$ definito dalle parametrizzazioni $\lambda_1(x) = xe^{i\epsilon}$ $(r \leqslant x \leqslant R)$, $\gamma_R(\theta) = Re^{i\theta}$ $(\epsilon \leqslant \theta \leqslant 2\pi-\epsilon)$, $\lambda_2(x) = xe^{i(2\pi-\epsilon)}$ $(R \geqslant x \geqslant r)$, $\gamma_r(\theta) = re^{i\theta}$ $(2\pi-\epsilon \geqslant \theta \geqslant \epsilon)$, con $\epsilon > 0$. Dal teorema dei residui sappiamo che $\oint_{\mathcal{C}} f(z)dz = 2\pi i\sum_{k=0}^{2}\mathrm{Res}[f(z), z_k]$, dove z_k sono le tre radici che verificano l'equazione $1 + z_k^3 = 0$ ovvero $z_0 = e^{i\pi/3}$, $z_1 = -1$ e $z_2 = e^{5i\pi/3}$. Il calcolo dei residui fornisce $\sum_{k=0}^{2}\mathrm{Res}[f(z), z_k] = -2i/3$ mentre su $\mathcal{C}$ i contributi su λ_1 e λ_2 riproducono $2\mathcal{I}$ (i contributi su γ_R e γ_r vanno a zero nei limiti $R \to \infty$ ee $r \to 0$). In definitiva troviamo $\mathcal{I} = 2\pi/3$.

2) [**5 pt**] Si consideri la funzione

$$f(z) = \left(\frac{1}{z} - \frac{a}{z^2}\right)e^z\,, \qquad \text{con} \;\; a \in \mathbb{R}\,. \tag{28}$$

Si determini la parte principale dello sviluppo in serie di Laurent di $f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n z^n$ in $\mathbb{C}\setminus\{0\}$. Si determini per quali valori di a la funzione $f(z)$ *non* ha una primitiva in $\mathbb{C}\setminus\{0\}$.
Soluzione 2. Usiamo lo sviluppo di Taylor dell'esponenziale complesso e^z per scrivere $f(z) = \left(\frac{1}{z} - \frac{a}{z^2}\right)\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!} = \left(\frac{1}{z} - \frac{a}{z^2}\right)(1 + z + \dots) = \frac{1}{z} - \frac{a}{z^2} - \frac{a}{z} + \dots = -\frac{a}{z^2} + \frac{1-a}{z} + \dots$ Consideriamo ora una generica curva $\mathcal{C}$ chiusa, semplice e regolare tale che $0 \in \mathrm{Int}\,\mathcal{C}$. Abbiamo $\oint_{\mathcal{C}} f(z)dz = 2\pi i(1-a)$. Poiché una condizione *necessaria* per l'esistenza della primitiva è che questo integrale si annulli, concludiamo che per $a \neq 1$ la funzione per certo non ammette primitiva in $\mathbb{C}\setminus\{0\}$.

3) [**12 pt**] a) Se $\hat{A}$ è un operatore hermitiano, determinare per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{C}$ l'operatore $e^{\alpha\hat{A}}$ i) è hermitiano; ii) è unitario (basta soddisfare alla proprietà $\hat{U}^\dagger = \hat{U}^{-1}$). b) Se $\hat{P}$ è un proiettore ortogonale,

mostrare che i) $e^{\hat{P}} = \hat{1} + (e-1)\hat{P}$; ii) $\|e^{\hat{P}}\| = e$.

Soluzione 3. a) $\left(e^{\alpha\hat{A}}\right)^{\dagger} = \sum\limits_{k\geq 0} \frac{(\bar{\alpha}\hat{A})^k}{k!} = e^{\bar{\alpha}\hat{A}}$, $\left(e^{\alpha\hat{A}}\right)^{-1} = e^{-\alpha\hat{A}}$; quindi i) $\alpha \in \mathbb{R}$; ii) $\alpha \in i\mathbb{R}$. b) i) $e^{\hat{P}} = \sum\limits_{k\geq 0} \frac{\hat{P}^k}{k!} = \hat{1} + \hat{P} \sum\limits_{k\geq 1} \frac{1}{k!} = \hat{1} + (e-1)\hat{P}$. ii) $\|e^{\hat{P}}\| \leq 1 + (e-1)\|\hat{P}\| = e$; si ottiene l'uguaglianza per $\underline{x} \in \mathcal{R}(\hat{P})$.

4) [**4 pt**] Date le funzioni $f(x) = \sum\limits_{n\geq 0} \left(\frac{i}{2}\right)^n e^{inx}$ e $g(x) = \sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{3^n} e^{inx}$, calcolare il prodotto scalare (f,g) nell'intervallo $[-\pi,\pi]$. Si consiglia di usare il noto isomorfismo euclideo tra ...

Soluzione 4. Si usa l'isomorfismo euclideo tra $L^2[-\pi,\pi]$ e l_2: $(f,g) = 2\pi \sum\limits_{k\geq 1} \left(\frac{-i}{6}\right)^k = \frac{2\pi}{6i-1}$.

5) [**4 pt**] Sia $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ la successione di funzionali lineari definita da

$$F_n(\varphi) = n^a \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{nx^2+1} dx, \quad a > 0. \tag{29}$$

Determinare a cosa converge debolmente tale successione al variare del parametro $a > 0$.

Soluzione 5. $F_n(\varphi) = n^{a-1/2} \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(y/\sqrt{n})}{y^2+1} dy \sim n^{a-1/2}\pi\varphi(0)$, $n \gg 1$. Quindi $F_n \to 0$ se $0 < a < 1/2$; $F_n \to \pi\hat{\delta}_0$ se $a = 1/2$; $F_n \to \infty$, se $a > 1/2$.

AA 2020-21. Scritto del 09/09/2021
canale A-D, P. M. Santini e A. Urbano

1) [**10 pt**] Usando opportunamente il teorema dei residui, calcolare l'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{e^x+1} dx \,, \qquad \text{per } \; a \in (0,1)\,. \tag{30}$$

[*suggerimento: si consideri il contorno rettangolare nel piano complesso di vertici* $-R$, R, $R+2\pi i$, $-R+2\pi i$.]

R1. Il contorno $\mathcal{C} = \lambda_1 \cup \lambda_1 \cup \lambda_3 \cup \lambda_4$ è definito dalle ovvie parametrizzazioni $\lambda_1(x) = x$ $(-R \leqslant x \leqslant R)$, $\lambda_2(y) = R + iy$ $(0 \leqslant y \leqslant 2\pi)$, $\lambda_3(x) = x + 2\pi i$ $(R \geqslant x \geqslant -R)$, $\lambda_4(y) = -R+iy$ $(2\pi \geqslant y \geqslant 0)$. L'equazione di variabile complessa $e^z + 1 = 0$ ammette solo $z_0 = i\pi$ come soluzione contenuta all'interno di $\mathcal{C}$. Nel limite $R \to \infty$ il teorema dei residui ci permette di scrivere

$$\begin{aligned} &\lim_{R\to\infty} \oint_{\mathcal{C}} \tfrac{e^{az}}{e^z+1} dz = (1-e^{2\pi i a}) \int_{-\infty}^{+\infty} \tfrac{e^{ax}}{e^x+1} dx = 2\pi i \,\mathrm{Res}[f(z), z_0] \\ &= -2\pi i e^{i\pi a} \quad \longrightarrow \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \tfrac{e^{ax}}{e^x+1} dx = \tfrac{\pi}{\sin(\pi a)}\,. \end{aligned} \tag{31}$$

2) [**5 pt**] Si consideri la funzione

$$f(z) = 2 - z^2 - 2\cos z\,. \tag{32}$$

Si trovi la serie di Maclaurin di $f(z)$ e se ne specifichi il raggio di convergenza. Si determini l'ordine dello zero di $f(z)$ per $z = 0$. Si consideri infine la funzione $g(z) = f(1/z)$. Si determini la serie di Laurent di $g(z)$ per $|z| > 0$ e si specifichi il tipo di singolarità in $z = 0$.
R2. Abbiamo $f(z) = 2\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!} z^{2n}$. Il raggio di convergenza è $R = \infty$. Lo zero è di ordine 4. Abbiamo $g(z) = 2\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!} \frac{1}{z^{2n}}$ per $|z| > 0$. La singolarità in $z = 0$ è essenziale.

3) [**10 pt**] Dato $\hat{E}^- : l_2 \to l_2$ tale che $\hat{E}^-(x_1, x_2, x_3, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots)$, $\underline{x} = (x_1, x_2, x_3, \dots) \in l_2$, i) determinare il Ker e l'immagine di $\hat{E}^-$; ii) determinare il Ker di $\hat{A} \equiv \hat{1} - \frac{1}{2}\hat{E}^-$; iii) trovare la soluzione $\underline{x} \in l_2$ dell'equazione $\hat{A}\underline{x} = \underline{e}^{(1)}$, dove $\underline{e}^{(1)} = (1, 0, 0, \dots) \in l_2$.
R3. i) $\mathrm{Ker}(\hat{E}^-) = \{\underline{0}\}$, $\mathcal{R}(\hat{E}^-) = \{\underline{x} \in l_2; x_1 = 0\}$; ii) $\mathrm{Ker}\hat{A} = \{\underline{0}\}$; iii) $\|\hat{E}^-/2\| = 1/2$, quindi esiste unica la soluzione $\underline{x} = \sum\limits_{k\geq 0} (\hat{E}^-/2)^k \underline{e}^{(1)} = \sum\limits_{k\geq 0} \underline{e}^{(k+1)}/2^k = (1, 1/2, 1/2^2, \dots, 1/2^{k-1}, \dots) \in l_2$.

4) [**4 pt**] Calcolare l'integrale

$$I = \int_0^\infty \delta\left(x(x^2-3x+2)\right) e^{-x} dx. \tag{33}$$

R4. $I = 1/4 + e^{-1} + e^{-2}/2$

5) [**4 pt**] Se la funzione $f(x)$ ammette il seguente sviluppo di Fourier in $[-\pi, \pi]$

$$f(x) = 1 + \sum_{n\geq 1} \left(\frac{\sin(nx)}{n} + (-1)^n \frac{\cos(nx)}{n} \right), \tag{34}$$

calcolare $\|f\|_2$ (nel calcolo, potrebbe essere utile conoscere le somme delle seguenti serie $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$).

R5. Parseval: $\|f\|_2 = \sqrt{2\pi + \pi \sum\limits_{n\geq 1} (1/n^2 + 1/n^2)} = \sqrt{2\pi + \pi^3/3}$

AA 2020-21. Scritto straordinario del 15/11/2021
canale A-D, P. M. Santini e A. Urbano

1) [**10 punti**] Usando opportunamente il teorema dei residui, si calcoli

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1+a^2-2a\cos\theta}\,, \qquad \text{per } a>1 \tag{35}$$

R. Usiamo il cambiamento di variabili $z = e^{i\theta}$ per cui $\cos\theta = (z+1/z)/2$. Lintegrale diventa $\oint_\gamma \frac{idz}{(z-a)(az-1)}$ dove γ è la circonferenza unitaria; la funzione integranda presenta singolarità in $z = a$ e $z = 1/a$. Quando $a > 1$, solo il residuo in $z = 1/a$ cade all'interno della circonferenza unitaria. Il residuo che ci interessa è dato da $\mathrm{Res}\left[\frac{i}{(z-a)(az-1)}, z = 1/a\right] = \frac{-i}{a^2-1}$ e, di conseguenza, troviamo che $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1+a^2-2a\cos\theta} = \frac{2\pi}{a^2-1}$.
2) [**5 punti**] Calcolare tutti i valori di

$$\mathrm{Ln}[(1+i)^{\pi i}] \tag{36}$$

dove Ln è il logaritmo complesso.
R. Per prima cosa riscriviamo $(1+i)^{\pi i} = e^{i\pi \mathrm{Ln}(1+i)} = e^{-\pi^2/4+2p\pi^2+i\pi\log\sqrt{2}} = e^{-\pi^2/4+2p\pi^2}e^{i\pi\log\sqrt{2}}$, con $p\in\mathbb{Z}$. Dopo di che, calcoliamo il logaritmo complesso $\mathrm{Ln}[(1+i)^{\pi i}] = \pi^2\left(2p-\frac{1}{4}\right) + i\pi\left(\log\sqrt{2}+2q\right)$, con $p, q \in \mathbb{Z}$.
3) [**3**+**3**+**4**] Dato l'operatore $\hat{A} = |\underline{e}^{(1)}><\underline{e}^{(1)}|+2|\underline{e}^{(2)}><\underline{e}^{(2)}|$, $\hat{A} : l_2 \to l_2$, dove $\{\underline{e}^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ è la base canonica in l_2, a) determinare il $Ker(\hat{A})$, b) l'immagine $\mathcal{R}(\hat{A})$, e c) lo spettro di $\hat{A}$ in l_2.
R. a) $Ker(\hat{A}) = span\{\underline{e}^{(n)}\}_{n\geq 3}$; b) $\mathcal{R}(\hat{A}) = span\{\underline{e}^{(1)}, \underline{e}^{(2)}\}$; c) lo spettro è discreto e vale $\{0, 1, 2\}$. L'autovettore corrispondente a 0 è un qualunque elemento del $Ker(\hat{A})$; l'autovettore corrispondente a 1 è $\underline{e}^{(1)}$ e l'autovettore corrispondente a 2 è $\underline{e}^{(2)}$.
4) [**4**] Se $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} e^{-n}\cos(nx)$, calcolare $\|f\|_2$.
R. $c_n = e^{-n}, n \geq 0$. Dalla relazione di Parseval: $\|f\|_2^2 = 2\pi|c_0|^2 + \pi\sum\limits_{n\geq 1}|c_n|^2 = \pi\frac{2e^2-1}{e^2-1}$
5) [**4**] Se $f(x) = \begin{cases} e^x - 1, & x < 0, \\ ax, & x > 0 \end{cases}$, con a parametro reale, determinare a affinché $f''(x)$ non contenga la δ di Dirac.
R. $f(x) = axH(x) + (e^x-1)H(-x)$, allora $f'(x) = aH(x) + ax\delta(x) - (e^x - 1)\delta(x) + H(-x)e^x = aH(x) + H(-x)e^x$, e $f''(x) = (a-1)\delta(x) + e^xH(-x)$. Quindi $a = 1$

Scritto del 17/01/2022
canale A-D, P. M. Santini e A. Urbano

1) [10 punti] Usando opportunamente il teorema dei residui, si calcoli

$$\mathrm{PV}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x(x^3+1)}\,. \tag{37}$$

R. Scriviamo

$$\mathrm{PV}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x(x^3+1)}=2\pi i\,\mathrm{Res}\big[f(z),\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\big]+\pi i\,\mathrm{Res}\big[f(z),0\big]+\pi i\,\mathrm{Res}\big[f(z),-1\big] \tag{38}$$

$$=2\pi i(-1/3)+\pi i+\pi i(-1/3)=0\,. \tag{39}$$

con $f(z)=1/z(z^3+1)$. Si noti che sono state indentate le singolarità che cadono sullasse reale in z=0 e z=-1, mentre, chiudendo il contorno di integrazione nel semipiano complesso superiore, lunica singolarità interna si trova in $z=e^{i\pi/3}$.

2) [5 punti] Si trovi lo sviluppo in serie di Laurent $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_nz^n$ della seguente funzione

$$f(z)=\frac{1}{z^2(1-z)} \tag{40}$$

in ciascuno dei domini di $\mathbb{C}$ in cui tale espansione può essere definita.
R. Distinguiamo $0<|z|<1$ e $|z|>1$. Se $0<|z|<1$ scriviamo

$$f(z)=\frac{1}{z^2(1-z)}=\frac{1}{z^2}\sum_{n=0}^{+\infty}z^n=\sum_{n=-2}^{+\infty}z^n \tag{41}$$

Viceversa, se $|z|>1$ scriviamo

$$f(z)=\frac{1}{z^2(1-z)}=-\frac{1}{z^3}\frac{1}{1-1/z}=-\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{1}{z^n}\,. \tag{42}$$

3) (**10 pt**) Dato l'operatore $\hat{A}=|e^{(1)}><e^{(1)}|+3|e^{(2)}><e^{(2)}|$, dove $e^{(j)}$ è il versore canonico di l_2 con tutte le componenti nulle tranne la j-esima, che vale 1, i) calcolare Ker e immagine di $\hat{A}$; ii) calcolare lo spettro di $\hat{A}$ in l_2 (non dimenticare il calcolo degli autovettori, se esistono). iii) Ricordando la

relazione tra lo spettro discreto di un operatore $\hat{A}$ e della funzione $F(\hat{A})$ di tale operatore, calcolare autovalori e autovettori di $F(\hat{A}) = \exp(2i\hat{A})$ (non è necessario calcolare esplicitamente $F(\hat{A})$).

R. i) Ker$\hat{A}$=span$\{e^{(j)}, j > 2\}$, $\mathcal{R}(\hat{A})$ =span$\{e^{(1)}, e^{(2)}\}$. ii) Essendo un operatore di rango finito (l'immagine a dimensione finita), ha solo spettro discreto, con autovalori $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1$ e $\lambda_3 = 3$, e autovettori rispettivamente nel Ker$\hat{A}$, $e^{(1)}$ e $e^{(2)}$. iii) L'operatore $\exp(2i\hat{A})$ ha autovalori $\exp(2i\lambda_j)$, $j = 1, 2, 3$, e gli stessi autovettori di $\hat{A}$.

4) (**4 pt**) i) Sviluppare in serie di Fourier la funzione e^{2x} nell'intervallo $[-\pi, \pi]$. ii) La somma di tale serie converge? Converge assolutamente?

R. $e^{2x} \sim \frac{\sinh(2\pi)}{\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{(-1)^n e^{inx}}{2-in} = \frac{\sinh(2\pi)}{\pi} \left(\frac{1}{2} + \sum_{n\geq 1} (-1)^n \left(\frac{4\cos(nx)+2n\sin(nx)}{n^2+4} \right) \right)$.

La somma converge in $(-\pi, \pi)$, ma non converge assolutamente.

5) (**4 pt**) Costruire una soluzione $g(x)$ dell'equazione $g''(x) = 2\delta(x)$, dove $\delta(x)$ è la funzione δ di Dirac.

R. La soluzione generale è $g(x) = 2xH(x) + ax + b$, con a e b costanti arbitrarie. Soluzioni particolari rilevanti sono $g_1(x) = 2xH(x)$ $(a = b = 0)$ e $g_2(x) = |x|$ $(a = -1, b = 0)$.

Scritto del 09/02/2022
canale A-D, P. M. Santini e A. Urbano

1) [**11 punti**] Usando il teorema dei residui, si calcolino i seguenti integrali

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\cos x}{x^2+1}dx\,, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin x}{x^2+1}dx\,. \tag{43}$$

R. Usando il teorema dei residui scriviamo

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{ix}}{x^2+1} = 2\pi i\,\mathrm{Res}\big[\frac{ze^{iz}}{z^2+1}, i\big] = \frac{\pi i}{e}\,, \tag{44}$$

per cui, separando parte reale e parte immaginaria, troviamo $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\cos x}{x^2+1} = 0$ e $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin x}{x^2+1} = \pi/e$.

2) [**4 punti**] Assumendo $p \in \mathbb{N}$, si calcoli il raggio di convergenza R della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^p (z-3i)^n\,, \tag{45}$$

e se ne specifichi il tipo di convergenza (escludendo il comportamento sul bordo).
R. Possiamo calcolare R come

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n^p}{(n+1)^p} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1+1/n}\right)^p = 1\,. \tag{46}$$

La serie diverge per $|z-3i| > 1$, converge assolutamente per $|z-3i| < 1$ ed uniformemente in $|z-3i| \le \rho$ con $\rho < 1$.

3) (**10 pt**) A) Dato l'operatore derivata $\hat{D} = \frac{d}{dx}$, i) calcolarne l'aggiunto (hermitiano coniugato) nello spazio delle funzioni periodiche di $L^2[a,b]$, ii) trovarne lo spettro in tale spazio, esibendo le relative autofunzioni. B) Dato l'operatore $\hat{A} = |e^{(1)} >< e^{(1)}| + 2|e^{(2)} >< e^{(2)}|$, dove $\{\underline{e}^{(j)}\}_{j\in\mathbb{N}^+}$ è la base canonica di l_2 ($\underline{e}^{(j)}$ è il versore che ha componente 1 nel sito j e 0 in tutti gli altri), risolvere l'equazione $(\hat{1}+\hat{A})\underline{x} = \underline{e}^{(1)} + 3\underline{e}^{(3)}$ in l_2.
R. A) i) $\hat{D}^\dagger = -\hat{D}$; ii) $\sigma_p = \{\lambda_n = \frac{2\pi n}{b-a} i, \}$, $n \in \mathbb{Z}$, $\psi_n(x) = e^{\lambda_n x}$. B) $\underline{x} = \underline{e}^{(1)}/2 + 3\underline{e}^{(3)}$.

4) (**4 pt**) Se $\hat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ikx} f(x) dx$ è la trasformata di Fourier di $f(x) \in L^2(\mathbb{R})$, calcolare la trasformata di Fourier di $F(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{H(1-y^2)}{(x-y)^2+1} dy$, dove $H(\xi)$ è la funzione gradino ($H(\xi) = 1,\ \xi > 0$, e $H(\xi) = 0,\ \xi < 0$). (si suggerisce l'uso del teorema di convoluzione)
R. $TF(H(1-x^2)) = 2\sin k/k$, $TF\left((1+x^2)^{-1}\right) = \pi e^{-|k|}$; quindi $TF(F(x)) = 2\pi \frac{\sin k}{k} e^{-|k|}$.

5) (**4 pt**) Calcolare l'integrale $I = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \delta\left(e^x \cos x\right) dx$.

R. $I = 2\cosh\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

Scritto del 09/05/2022
canale A-D, P. M. Santini e A. Urbano

1) [**9 punti**] Usando il teorema dei residui, calcolare l'integrale

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{13 + 5\cos t}\,, \tag{47}$$

specificando il contorno di integrazione sul piano complesso.
R.

$$I = (-2i)\oint_\gamma \frac{dz}{26z + 5z^2 + 5} = 4\pi \mathrm{Res}_{z=-1/5}\left[\frac{1}{26z + 5z^2 + 5}\right] = \frac{\pi}{6}\,. \tag{48}$$

γ è la circonferenza unitaria del piano complesso percorsa in senso antiorario; la funzione $\frac{1}{26z+5z^2+5}$ ha poli in $z = -5$ e $z = -1/5$ e solo $z = -1/5$ cade all'interno di γ.

2) [**6 punti**] Si consideri la funzione

$$f(z) = \frac{z^2}{\cos(\pi z) + 1}\,. \tag{49}$$

Si trovino tutte le singolarità isolate in $\mathbb{C}$ e se ne indichi la natura.
R. Poniamo $g(z) \coloneqq \cos(\pi z) + 1$. Abbiamo $g(z) = 0$ quando $z_k = 2k + 1$ con $k \in \mathbb{Z}$. Inoltre notiamo che $g'(z_k) = -\pi \sin(\pi z_k) = 0$ mentre $g''(z_k) = -\pi^2 \cos(\pi z_k) = \pi^2 \neq 0$. z^2 è ovviamente una funzione intera che non si annulla in z_k. Dalla relazione tra zeri e poli, concludiamo quindi che $z_k = 2k+1$ sono tutti poli del secondo ordine.

3) (**2+2+6 pt**) Dato l'operatore $E^+ : l_2 \to l_2$, dove $E^+(x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_2, x_3, x_4, \dots)$, i) calcolare $\|E^+\|$; ii) calcolare l'hermitiano coniugato di E^+; iii) calcolare la soluzione $\underline{x} \in l_2$ dell'equazione $(2-E^+)\underline{x} = (1, -1, 2, 0, 0, \dots)$.
R. $\|E^+\| = 1$, $(E^+)^\dagger = E^-$, $\underline{x} = (1/2, 0, 1, 0, 0, \dots)$.

4) (**2+2 pt**) i) Calcolare la trasformata di Fourier $\hat{f}(k)$ di $f(x) = H(L-|x|)$, dove $H(x)$ è la funzione gradino, e ii) calcolare il limite di $\hat{f}(k)$ per $L \to \infty$.
R. $\hat{f}(k) = 2\frac{\sin(kL)}{k} \to 2\pi\delta(k)$, per $L \to \infty$.

5) (**4 pt**) Calcolare l'integrale $I = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \delta\left(e^{-x} \sin x\right) dx$.

R. $I = 1 + \cosh \pi$.

Non scrivere le soluzioni degli esercizi senza mostrare, in modo conciso, come arrivarci.

Scritto del 21/06/2022
canale A-D, P. M. Santini e A. Urbano

1) [**10 punti**] Si consideri l'integrale

$$I = \int_0^\infty \frac{x^{2/3}}{(x^2+4)} dx \,. \tag{50}$$

- Si specifichi se l'integrale è convergente o va inteso nel senso del suo valore principale.
- Ne si calcoli il valore usando il teorema dei residui (specificando il contorno di integrazione).

R. L'integrale è convergente. Consideriamo la funzione di variabile complessa $f(z) = z^{2/3}/(z^2+4)$ tagliando lungo il semiasse reale positivo. Consideriamo il contorno di integrazione pacman. Abbiamo poli semplici in $z_0 = 2i = 2e^{i\pi/2}$ e $z_1 = -2i = 2e^{i3\pi/2}$. L'integrale vale $\pi/2^{1/3}$.
2) [**5 punti**] Si consideri la funzione

$$f(z) = \frac{\sin z}{z^2 - z^3} \,. \tag{51}$$

Si discutano le singolarità in $\mathbb{C}$ calcolandone (eventualmente) il residuo.
R. Abbiamo poli semplici in $z = 0$ e $z = 1$. I residui valgono, rispettivamente, 1 e $-sin(1)$.
3) (**3+5 pt**) Dato l'operatore $E^- : l_2 \to l_2$, dove $E^-(x_1, x_2, x_3, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots)$ e il parametro complesso $\alpha \neq 0$, i) calcolare il $\mathrm{Ker}(1+\alpha E^-)$ in l_2; ii) individuare per quali valori di α esiste unica la soluzione $\underline{x} \in l_2$ dell'equazione $(1+\alpha E^-)\underline{x} = \underline{e}^{(2)}$ e trovarla, dove $\underline{e}^{(2)}$ è il versore canonico $(0, 1, 0, \dots)$.
R. i) $\mathrm{Ker}(1+\alpha E^-)= \{\underline{0}\}$; ii) se $|\alpha| < 1$ esiste unica la soluzione in l_2, con $\underline{x} = (1+\alpha E^-)^{-1}\underline{e}^{(2)} = (\sum\limits_{n\geq 0}(-1)^n\alpha^n(E^-)^n)\underline{e}^{(2)} = \sum\limits_{n\geq 0}(-1)^n\alpha^n\underline{e}^{(2+n)}$, quindi $x_1 = 0,\ x_n = (-\alpha)^{n-2}, n \geq 2$. Si noti che la soluzione ottenuta è soluzione $\forall\alpha \in \mathbb{C}$, ma appartiene a l_2 solo se $|\alpha| < 1$.
4) (**3+2+2 pt**) i) Trovare la serie di Fourier di $f(x) = e^{-x}$ in $[-\pi, \pi]$ (conviene usare la serie degli esponenziali); ii) calcolare la somma della serie numerica $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \frac{(-1)^n}{1+in}$ valutando il risultato di i) in un punto opportuno; iii) calcolare la somma della serie di Fourier in $x = \pi$.
R. i) $e^{-x} \sim \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} f_n e^{inx}$, $f_n = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{-(1+in)x}dx = \frac{\sinh(\pi)}{\pi}\frac{(-1)^n}{1+in}$; ii) la serie converge puntualmente a e^{-x} in $(-\pi, \pi)$, quindi in $x = 0$: $1 = \frac{\sinh(\pi)}{\pi}\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}}\frac{(-1)^n}{1+in}$,

da cui $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \frac{(-1)^n}{1+in} = \frac{\pi}{\sinh(\pi)}$; iii) il prolungamento 2π-periodico di e^{-x} ha discontinuità semplice in π, e la serie converge al valor medio $\cosh(\pi)$.

5) (**4 pt**) Calcolare l'integrale $I = \int\limits_0^2 \delta(x\cos(\pi x))e^{-x}dx$.

R. $g(x) = x\cos(\pi x)$ ha zeri semplici in [0,2] nei punti $0, 1/2, 3/2$; 0 è al bordo con peso dimezzato. $|g'(0)| = 1, |g'(1/2)| = \pi/2, |g'(3/2)| = 3\pi/2$. Quindi $I = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}e^{-1/2} + \frac{2}{3\pi}e^{-3/2}$.

Scritto del 05/07/2022
canale A-D, P. M. Santini e A. Urbano

1) [**10 punti**] Si consideri l'integrale

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^5+1} dx \,. \tag{52}$$

Si discuta la convergenza dell'integrale improprio chiarendo se l'integrale va inteso o meno nel senso del suo valore principale. Si calcoli il valore di I usando il teorema dei residui.
R. L'integrale va inteso nel senso del valore principale. Abbiamo

$$\mathrm{PV}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^5+1} dx = 2\pi i \sum_{k=0,1} \mathrm{Res}[f(z), z_k] + \pi i \mathrm{Res}[f(z), z_2] \,. \tag{53}$$

Dove $z_0 = e^{i\pi/5}$, $z_1 = e^{i3\pi/5}$, $z_2 = -1$. Otteniamo

$$\mathrm{PV}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^5+1} dx = \frac{2\pi}{5}\left[\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \sin\left(\frac{6\pi}{5}\right)\right] \tag{54}$$

2) [**5 punti**] Si consideri la funzione

$$u(x,y) = 3x^2y + 2x^2 - y^3 - 2y^2 \,. \tag{55}$$

Si verifichi se la funzione data è armonica e, in caso affermativo, si costruisca una corrispondente armonica coniugata.
R. La funzione data è armonica. La coniugata è $v(x,y) = 3xy^2 + 4xy - x^3 + c$ con c costante arbitraria.
3) (**3+2+5 pt**) Dato l'operatore $A : H \to H$, definito da: $A\underline{x} = (\underline{e_1}, \underline{x})\underline{e_1} + a(\underline{e_2}, \underline{x})\underline{e_2}$, dove H è uno spazio di Hilbert separabile, $\{\underline{e_j}\}_{j\in\mathbb{N}^+}$ è una base ortonormale di H, e a è un parametro complesso, i) determinare l'aggiunto (hermitiano coniugato) $A^\dagger$ di A. ii) Per quali valori di a l'operatore A è auto-aggiunto (hermitiano)? iii) Determinare lo spettro dell'operatore $B = 1 + A$ per $a = 2$ (e i relativi autovettori, se esistono).
R. i) $(\underline{y}, A\underline{x}) = \overline{y}_1 x_1 + a\overline{y}_2 x_2 = (A^\dagger \underline{y}, \underline{x})$, con $A^\dagger \underline{y} = (\underline{e_1}, \underline{y})\underline{e_1} + \bar{a}(\underline{e_2}, \underline{y})\underline{e_2}$, dove $x_j = (\underline{e_j}, \underline{x}), y_j = (\underline{e_j}, \underline{y})$. ii) $a \in \mathbb{R}$. iii) $\underline{\psi} + \psi_1\underline{e_1} + 2\psi_2\underline{e_2} = \lambda\underline{\psi}$; facendo il prodotto scalare con $\underline{e_j}$ si arriva alle equazioni $(\lambda - 2)\psi_1 = (\lambda - 3)\psi_2 = (\lambda - 1)\psi_j = 0,\ j \geq 3$. Quindi: $\lambda = 2$ con autovettore $\underline{e_1}$; $\lambda = 3$ con autovettore $\underline{e_2}$; $\lambda = 1$ con autovettore appartenente allo span$\{\underline{e_j}\}_{j\geq 3}$
4) (**4 pt**) Se la trasformata di Fourier $\hat{f}(k)$ di $f(x)$ appartiene allo spazio di

Schwartz: $\hat{f}(k) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, dire quali di queste funzioni: $f_1(x) = e^{-|x|}$, $f_2(x) = e^{-x^2}(x^2+1)^{-1}$, $f_3(x) = e^{-x^2}(x^2-1)^{-1}$ potrebbero essere $f(x)$.
R. $\hat{f}(k) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow f(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$; quindi, poichè $f_2 \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ mentre $f_1, f_3 \notin \mathcal{S}(\mathbb{R})$ (f_1 non è derivabile in 0 e f_3 è singolare in ± 1), la risposta è solo $f_2(x)$.
5) (**4 pt**) Data la successione di funzionali lineari definita da $\hat{F}_n(\varphi) = n^a \int\limits_0^\infty e^{-n^2x^2}\varphi(x)dx$, con $a > 0$, determinare a cosa converge debolmente.
R. $\hat{F}_n(\varphi) \sim n^{a-1}\varphi(0)\sqrt{\pi}/2$, $n \gg 1$. Quindi $0 < a < 1$: $\hat{F}_n \to 0$; $a = 1$: $\hat{F}_n \to \sqrt{\pi}\hat{\delta}_0$; $a > 1$: $\hat{F}_n \to \infty$.

Scritto del 09/09/2022
canale A-D, P. M. Santini e A. Urbano

1) (**10 pt**) Si valuti l'integrale

$$I(a) = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + a^2 - 2a\cos\theta}\,, \tag{56}$$

al variare di $a \in \mathbb{R}$.
R. $I(a) = 2\pi/(a^2 - 1)$ per $|a| > 1$ e $I(a) = 2\pi/(1 - a^2)$ per $|a| < 1$.
2) (**5 pt**) Sviluppare in serie di Laurent (con centro nell'origine del piano complesso) la funzione

$$f(z) = \frac{1}{z(1 + z^2)}\,. \tag{57}$$

R. La funzione è analitica in $\mathbb{C}$ ad eccezione delle singolarità in $z = 0$ e $z = \pm i$. Abbiamo quindi due possibili sviluppi di Laurent, uno riferito all'anello $0 < |z| < 1$ e l'altro riferito all'anello $1 < |z| < \infty$. Troviamo $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n-1}$ per $0 < |z| < 1$ e $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{-2n-3}$ per $1 < |z| < \infty$.
3) (**3+3+4 pt**) Dato l'operatore $A = d/dx$, definito sulla varietà, densa in $L^2[0, \pi]$, delle funzioni $f(x)$ tali che $f(x), f'(x) \in L^2[0, \pi]$, i) mostrare che A è un operatore illimitato in $L^2[0, \pi]$. Se, inoltre, $f(0) = f(\pi)$, ii) calcolare l'hermitiano coniugato $A^\dagger$ di A in $L^2[0, \pi]$; iii) calcolare lo spettro di A in $L^2[0, \pi]$.
R. i) Contro-esempio: $f_n(x) = e^{inx}/n$; $\|f_n\|_2 = \sqrt{\pi}/n$, $\|Af_n\|_2 = \sqrt{\pi}$, quindi $\|Af_n\|_2/\|f_n\|_2 = n$ e l'operatore è illimitato. ii) $\int\limits_0^\pi \overline{f}(x) g'(x) dx = [\overline{f}(x)g(x)]_0^\pi - \int\limits_0^\pi \overline{f}'(x) g(x) dx = -\int\limits_0^\pi \overline{f}'(x) g(x) dx$. Quindi $A^\dagger = -A$. iii) $\psi'(x) = \lambda\psi \;\Rightarrow\; \psi(x) = e^{\lambda x}$. $\psi(0) = \psi(\pi)$, quindi $\lambda_n = 2in$, $n \in \mathbb{Z}$, $\psi_n(x) = e^{2inx} \in L^2[0, \pi]$, spettro discreto.
4) (**4 pt**) Se la trasformata di Fourier $\hat{f}(k)$ di $f(x) = e^{-x^2}/\sqrt{\pi}$ è $\hat{f}(k) = e^{-k^2/4}$, calcolare la trasformata di Fourier di $f_1(x) = xe^{-2x^2}$.
R. $f_1(x) = \sqrt{\pi} x f(\sqrt{2}x) \;\Rightarrow\; \hat{f}_1(k) = \sqrt{\pi} i \frac{d}{dk}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-k^2/8}\right) = -i\frac{\sqrt{\pi}}{4\sqrt{2}} k e^{-k^2/8}$
5) (**4 pt**) Data la successione di funzionali lineari definita da $\hat{F}_n(\varphi) = n^a \int\limits_0^\infty e^{-nx^2} \varphi(x) dx$, $n \in \mathbb{N}^+$, con $a > 0$, determinare a cosa converge debolmente. Può essere utile ricordare che $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.
R. Scegliendo la funzione di prova in modo da poter portare il limite $n \to \infty$

sotto integrale si ottiene $\hat{F}_n(\varphi) \to \frac{\sqrt{\pi}}{2} n^{a-1/2}\varphi(0)$. Quindi: $\hat{F}_n \to 0,\ 0 < a < 1/2;\ \hat{F}_n \to \infty,\ a > 1/2;\ \hat{F}_n \to \sqrt{\pi}\hat{\delta}_0,\ a = 1/2$.

Scritto straordinario del 07/11/2022
canale A-D, P. M. Santini e A. Urbano

1) 1) (**10 pt**) Si calcolino gli integrali

$$\oint_C \frac{8-z^{12}}{z(4-z)}dz\,, \qquad \oint_C \frac{\sin(z)}{z}dz \tag{58}$$

dove C è la circonferenza centrata nell'origine, di raggio $R = 3$ ed orientata in senso orario.
Soluzione. Applichiamo il teorema dei residui. Dobbiamo considerare esclusivamente la singolarità presente in $z = 0$. Otteniamo $\oint_C \frac{8-z^{12}}{z(4-z)}dz = -4\pi i$ (dove il segno meno deriva dal fatto che il circuito di integrazione è orientato negativamente). Il secondo integrale è nullo essendo $z = 0$ una singolarità apparente.

2) (**5 pt**) Si trovino *tutte* le soluzioni dell'equazione

$$\tanh(z) = i \tag{59}$$

scrivendole nella forma cartesiana $z = x + iy$.
Soluzione. Scriviamo

$$z = \tanh^{-1}(i) = \frac{1}{2}\mathrm{Ln}\left(\frac{1+i}{1-i}\right) = \frac{1}{2}\mathrm{Ln}(i)\,, \tag{60}$$

dove per il logaritmo complesso abbiamo

$$\mathrm{Ln}(i) = \log 1 + i(\pi/2 + 2\pi n)\,, \qquad n \in \mathbb{Z}\,. \tag{61}$$

Di conseguenza abbiamo

$$z_n = i\pi\left(\frac{1}{4} + n\right)\,, \quad n \in \mathbb{Z}\,. \tag{62}$$

3) (**3+3+4 pt**) Dato l'operatore quantità di moto $\hat{p} = -id/dx$, sullo spazio delle funzioni $f(x)$ tali che $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $f, f' \in L^2[a,b]$ e $f(a) = f(b)$, i) studiare la sua limitatezza o non limitatezza in $L^2[a,b]$; ii) calcolare il suo aggiunto (hermitiano coniugato) $\hat{p}^\dagger$ in $L^2[a,b]$; iii) calcolare il suo spettro (indicando se sia discreto, continuo, o residuo), con le relative autofunzioni, se esistono, in $L^2[a,b]$.
Soluzione. Se i) $f_n(x) = \sin(nx)/n$, allora $\|\hat{p}f_n\|_2 = \sqrt{\pi}$, $\|f_n\|_2 = \sqrt{\pi}/n$. Quindi $\frac{\|\hat{p}f_n\|_2}{\|f_n\|_2} = n$ e $\hat{p}$ è illimitato. ii) $\hat{p}^\dagger = \hat{p}$; iii) $\psi(x,\lambda) = e^{i\lambda x}$, con

$\psi(a,\lambda) = \psi(b,\lambda)$. Quindi $\exp(i\lambda(b-a)) = 1$ e $\lambda = \lambda_n = \frac{2\pi}{b-a}n$, $n \in \mathbb{Z}$ (spettro discreto), con $\psi = \psi_n(x) = \exp(i\frac{2\pi}{b-a}n)$.

4) (**4 pt**) Sviluppare in serie di Fourier la funzione $f(x) = e^x$ nell'intervallo $[-\pi,\pi]$ (si consiglia di usare lo sviluppo nella base $\{e^{inx}\}_{n\in\mathbb{Z}}$).

Soluzione.

$$e^x \sim \frac{\sinh\pi}{\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{(-1)^n}{1-in}e^{inx} \tag{63}$$

5) (**4 pt**) Calcolare l'integrale $I = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \delta\left(\frac{\sin x}{x^2+1}\right) dx$.

Soluzione. $I = 2+\pi^2$.

Scritto del 16/01/2023
canale A-D, P. M. Santini e A. Urbano

1) (**10 pt**) Considerando il caso $0 < a < b$, calcolare l'integrale

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)}\, dx\,, \tag{64}$$

applicando opportunamente il teorema dei residui.
R. Scriviamo

$$I = \mathrm{Im}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x e^{ix}}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)}\, dx\right], \tag{65}$$

per cui

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x e^{ix}}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)}\, dx = 2\pi i \sum_{z_0 = ia, ib} \mathrm{Res}\left[\frac{z e^{iz}}{(z^2 + a^2)(z^2 + b^2)}, z = z_0\right]. \tag{66}$$

Calcolando i residui e prendendo la parte immaginaria, troviamo $I = \pi(e^{-a} - e^{-b})/(b^2 - a^2)$.
2) (**5 pt**) Si consideri la funzione (con $a \in \mathbb{R}$)

$$f(z) = \frac{e^{az}}{1 + e^z}\,. \tag{67}$$

Individuare le singolarità della funzione in $\mathbb{R}$ ed in $\mathbb{C}$ specificandone la natura. Calcolare infine, per ogni singolarità, il corrispondente residuo nel caso $a = 1$.
R. Le singolarità della funzione in $\mathbb{C}$ si trovano tutte sull'asse immaginario, per $z = i\pi(2k+1)$. Si tratta di singolarità isolate e dalla relazione tra zeri e poli si deduce che si tratta di poli semplici. Se $a = 1$, tutti i poli hanno residuo unitario (come si verifica immediatamente usando di nuovo la relazione tra zeri e poli).
3) (**5+5 pt**) i) Costruire l'operatore di proiezione ortogonale in $L^2[-\pi, \pi]$ che proietta sul sottospazio span$\{\sin x, \cos x\}$. ii) Sia $\hat{A} : H \to H$ un operatore hermitiano sullo spazio di Hilbert H. Per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{C}$ l'operatore $\hat{B} = \exp(\alpha \hat{A})$ è hermitiano? E per quali valori $\hat{B}$ è unitario?
R. i) Dalla formula generale $\hat{P}|f> = \sum_k |e_k >< e_k|f>$ si ha che, se $f(x) \in L^2[-\pi, \pi]$, allora $\hat{P}f(x) = \frac{1}{\pi} \sin x \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin y f(y) dy + \frac{1}{\pi} \cos x \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos y f(y) dy$. ii) $\Big(\exp(\alpha \hat{A})\Big)^{\dagger} = \exp(\bar{\alpha} \hat{A})$, $\Big(\exp(\alpha \hat{A})\Big)^{-1} = \exp(-\alpha \hat{A})$; quindi $\hat{B}$ è hermitiano se $\alpha \in \mathbb{R}$, e unitario se $\alpha \in i\mathbb{R}$

4) (**4 pt**) Se $\hat{f}(k) = e^{-k^6}$ è la trasformata di Fourier di $f(x)$, trovare la trasformata di Fourier della funzione $f_1(x) = x^2 f(x)$.
R. $\hat{f}_1(k) = i^2 \frac{d^2}{dk^2} \hat{f}(k) = (30k^4 - 36k^{10})e^{-k^6}$

5) (**4 pt**) Calcolare l'integrale $I = \int\limits_0^{\pi} \delta(x\cos(x))e^{-x}dx$.
R. $g(x) = x\cos x$ ha zeri semplici in $[0, \pi]$ nell'estremo di integrazione 0 e in $\pi/2$, con $|g'(0)| = 1,\ |g'(\pi/2)| = \pi/2$. Quindi $I = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}e^{-\pi/2}$

Scritto dell'08/02/2023
canale A-D, P. M. Santini e A. Urbano

1) (**10 pt**) Si calcoli l'integrale

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos(3\theta)}{5 - 4\cos\theta} d\theta\,. \tag{68}$$

[*Suggerimento. Si ricordi che* $e^{in\theta} = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$ *per cui* $\cos(n\theta) = Re(e^{in\theta})$]

R. Scriviamo

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \frac{\cos(3\theta)}{5 - 4\cos\theta} d\theta &= \mathrm{Re}\left[\int_0^{2\pi} \frac{e^{3i\theta}}{5 - 4\cos\theta} d\theta\right] = \mathrm{Re}\left[\oint \frac{z^3 dz}{iz[5 - 2(z + z^{-1})]}\right] \\
&= \mathrm{Re}\left[i\oint \frac{z^3 dz}{2z^2 - 5z + 2}\right] = \mathrm{Re}\left[i\oint \frac{z^3 dz}{(2z-1)(z-2)}\right].
\end{aligned}$$

dove la variabile di integrazione z corre sulla circonferenza unitaria. Applicando il teorema dei residui, includiamo solo il polo semplice in $z = 1/2$. Abbiamo

$$\mathrm{Res}_{z=1/2}\left[\frac{z^3}{2(z - 1/2)(z - 2)}\right] = -\frac{1}{24} \tag{69}$$

per cui lintegrale vale $\mathrm{Re}[2\pi i(-i/24)] = \pi/12$.

2) (**5 pt**) Si consideri la funzione

$$f(z) = \frac{(1 + z^{12})}{z^3(1 - 2z)(2 - z)}\,. \tag{70}$$

Si definiscano le regioni del piano complesso in cui $f(z)$ ammette uno sviluppo in serie di Laurent di centro $z_0 = 0$. Si calcoli il valore del residuo di $f(z)$ in $z = 0$.

R. La funzione ammette sviluppo in serie di Laurent di centro $z_0 = 0$ negli anelli $A_1 \equiv \{z \in \mathbb{C} \, : \, 0 < |z| < 1/2\}$, $A_2 \equiv \{z \in \mathbb{C} \, : \, 1/2 < |z| < 2\}$ e $A_3 \equiv \{z \in \mathbb{C} \, : \, |z| > 2\}$. Calcoliamo il residuo richiesto usando la serie geometrica

$$\begin{aligned}
\frac{(1 + z^{12})}{z^3(1 - 2z)(2 - z)} &= \frac{(1 + z^{12})}{z^3(1 - 2z)2(1 - z/2)} \\
&= \frac{(1 + z^{12})}{2z^3}(1 + 2z + 4z^2 + \dots)\left(1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{4} + \dots\right) \\
&= \frac{(1 + z^{12})}{2z^3}\left(1 + \frac{5z}{2} + \frac{21z^2}{4} + \dots\right)
\end{aligned} \tag{71}$$

per cui il coefficiente del termine z^{-1} è 21/8.

3) (**5+3 pt**) i) Costruire l'operatore di proiezione ortogonale in $L^2[-\pi,\pi]$ che proietta sul sottospazio span$\{e^{ix}, e^{2ix}\}$. ii) Dato lo spazio di Hilbert H, mostrare che un operatore unitario $\hat{U} : H \to H$ ha norma 1.

R. i) $\hat{P}f(x) = \frac{e^{ix}}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{-iy} f(y)dy + \frac{e^{2ix}}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{-2iy} f(y)dy$. ii) $\forall f \in H$, $\left(\|\hat{U}f\|/\|f\|\right)^2 = (\hat{U}f, \hat{U}f)/(f,f) = (f,f)/(f,f) = 1$. Quindi $\|\hat{U}\| = 1$

4) (**4 +2 pt**) i) Sviluppare la funzione e^{iax}, $a \in \mathbb{R}$, $a \notin \mathbb{Z}$, nell'intervallo $[-\pi,\pi]$, e ii) usare tale serie per calcolare la somma $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \frac{(-1)^n}{a-n}$.

R. i) $e^{iax} \sim \frac{\sin(a\pi)}{\pi} \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \frac{(-1)^n}{a-n} e^{inx}$. ii) $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \frac{(-1)^n}{a-n} = \frac{\pi}{\sin(a\pi)}$, per $x = 0$.

5) (**4 pt**) Calcolare il limite, per $n \to \infty$, della successione di funzionali lineari $\{\hat{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tali che $\hat{F}_n(\varphi) = n^a \int\limits_0^{\infty} e^{-nx}\varphi(x)dx$, al variare del parametro $a > 0$.

R. $0 < a < 1 :\ \hat{F}_n \to \hat{0}$; $a = 1 :\ \hat{F}_n \to 2\hat{\delta}_0$; $a > 1 :\ \hat{F}_n \to \infty$.

Scritto del 02/05/2023
canale A-D, P. M. Santini e A. Urbano

1) **10 pt**) Utilizzando il teorema dei residui (disegnando e motivando il contorno di integrazione), calcolare l'integrale

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin(ax)+3}{x^2+1}dx\,, \qquad \text{con } a<0\,. \tag{72}$$

Soluzione 1. Osserviamo che possiamo scrivere

$$I = \mathrm{Im}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{iax}}{x^2+1}dx\right] + 3\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+1}dx\,. \tag{73}$$

Usando il teorema dei residui (chiudendo il contorno, per il primo integrale, nel semi-piano complesso inferiore poiché $a<0$), scriviamo

$$I = \mathrm{Im}\left[-2\pi i \mathrm{Res}_{z=-i}\frac{ze^{iaz}}{z^2+1}\right] + 2\pi i \mathrm{Res}_{z=i}\frac{3}{z^2+1} = \pi(3-e^a)\,. \tag{74}$$

2) (**5 pt**) Si consideri la funzione

$$f(z) = \frac{1}{z^3\sin(z)}\,. \tag{75}$$

Si caratterizzi la singolarità in $z=0$ e ne si calcoli eventualmente il residuo.
Soluzione 2. Utilizziamo lo sviluppo in serie di Laurent per scrivere

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z^3\left(z - z^3/6 + O(z^5)\right)} = \frac{1}{z^4\left(1 - z^2/6 + O(z^4)\right)} && (76)\\ &= \frac{1}{z^4}\left[1 + \left(z^2/6 + O(z^4)\right) + \left(z^2/6 + O(z^4)\right)^2 + \ldots\right] && (77)\\ &= \frac{1}{z^4}\left[1 + z^2/6 + O(z^4)\right]\,. && (78)\end{aligned}$$

Abbiamo quindi che $z=0$ è un polo del quarto ordine con residuo nullo.

3) (**5+5 pt**) i) Costruire l'operatore di proiezione ortogonale in $L^2[-\pi,\pi]$ che proietta sul sottospazio span$\{\sin x, \sin(2x)\}$. ii) Trovare autovalori e autofunzioni di tale operatore. Suggerimento: per cercare le autofunzioni, si usi una base nota.

Soluzione 3. i) $\hat{P}_S f(x) = c\sin x + d\sin(2x)$, $c = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin y f(y)dy$, $d =$

$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin(2y)f(y)dy$. *ii) Tutte gli elementi della base di Fourier sono autofunzioni,* $\sin x$ *e* $\sin(2x)$ *con autovalore* 1*, e tutte le altre con autovalore* 0*.*

4) (**4 pt**) Se $\hat{f}(k) = e^{-k^4}$ è la trasformata di Fourier di $f(x)$, trovare la trasformata di Fourier della funzione $g(x) = xf'(x)$.
Soluzione 4. $\hat{g}(k) = i\frac{d}{dk}\left(ike^{-k^4}\right) = (4k^4 - 1)e^{-k^4}$

5) (**4 pt**) Calcolare l'integrale $I = \int\limits_0^2 \delta\left(\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\sin x\right) e^{-x}dx$.

Soluzione 5. $g(x) = \left(x - \frac{\pi}{3}\right)\sin x$ *ha zeri semplici in* $[0, 2]$ *nell'estremo di integrazione* 0 *e in* $\pi/3$*, con* $g'(0) = -\pi/3$*,* $g'(\pi/4) = 1/\sqrt{2}$*. Quindi* $I = \frac{3}{2\pi} + \frac{2}{\sqrt{3}}e^{-\pi/3}$

Scritto del 20/06/2023
canale A-F, P. M. Santini e A. Urbano

1) [**12 punti**] Si calcoli l'integrale

$$I = \int_0^\infty \frac{x^{-1/2}}{(4x^2+1)(x+1)} dx \,, \tag{79}$$

usando il teorema dei residui (disegnando e motivando esplicitamente il contorno di integrazione scelto).
Soluzione. Contorno pacman e funzione $f(z) = z^{-1/2}/[(4z^2+1)(z+1)]$. *Prendiamo il taglio lungo il semiasse reale positivo. Le singolarità di* $f(z)$ *sono poli semplici locati in* $z_0 = +i/2 = e^{i\pi/2}/2$, $z_1 = -i/2 = e^{3i\pi/2}/2$ *e* $z_2 = -1 = e^{i\pi}$. *La somma sui residui restituisce* $\sum_{k=0}^{2} Res[f(z), z_k] = -2i/5$. *Sul contorno, i due cammini che chiudono la bocca del pacman restituiscono* $2I$. *Di conseguenza, abbiamo* $I = 2\pi/5$.
2) [**4 punti**] Si consideri la funzione

$$f(z) = \frac{1}{z(8-z^3)} \,. \tag{80}$$

Si scriva lo sviluppo in serie di Laurent nell'anello $A(0, 2, \infty)$.
Soluzione. Lo sviluppo richiesto è dato da

$$f(z) = -\frac{1}{z^4}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^{3k} = -\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^{3k}}{z^{3k+4}} \,. \tag{81}$$

Il modo più immediato di ottenere questo sviluppo è quello di usare lo sviluppo della serie geometrica.
3) [**6+4 pt**] i) Sia $\hat{P}$ un proiettore ortogonale sullo spazio di Hilbert H, e sia $|y>\in H$. Determinare la soluzione $|x>\in H$ dell'equazione lineare $\left(2+\hat{P}\right)|x>=|y>$. ii) Determinare gli autovalori dell'operatore
$\hat{A} = 2|e_1><e_1| - |e_2><e_2|$ con relativi autovettori, dove $\{|e_j>\}_{j=1}^2$ è una base ortonormale di uno spazio euclideo di dimensione 2.
Soluzione. i) Per chi ha inteso che $\hat{P}$ *sia un proiettore ortogonale in* H, $|x>=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\hat{P}\right)^{-1}|y>=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\hat{P}\right)|y>$; *per chi ha invece inteso che* H *sia il sottospazio su cui proietta* $\hat{P}$, *allora* $\hat{P}|x>=|x>$ *e* $|x>=(1/3)|y>$.
ii) L'equazione agli autovalori è $2\psi_1|e_1>-\psi_2|e_2>=\lambda|\psi>$, *con* $\psi_j=<e_j|\psi>$; *applicando* $<e_j|$, $j=1,2$, *si ottengono le equazioni* $(\lambda-2)\psi_1=0$, $(\lambda+1)\psi_2=0$. *Quindi:* $\lambda=2$ *con autovettore* $|e_1>$, *e* $\lambda=-1$ *con autovettore* $|e_2>$

4) [**4 pt**] Sviluppare la funzione e^{2x} in serie di Fourier in $[-\pi, \pi]$.
R. $e^{2x} \sim \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n e^{inx}$, $f_n = \frac{\sinh(2\pi)}{\pi}\frac{(-1)^n}{2-in}$.
5) [**4 pt**] Data la funzione $f(x) = (x-1)H(-x) + H(x)\sin x$, calcolare $f'(x)$ e $f''(x)$.
Soluzione. $f'(x) = \delta(x) + H(-x) + H(x)\cos x$ *e* $f''(x) = \delta'(x) - H(x)\sin x$

Scritto del 04/07/2023
canale A-F, P. M. Santini e A. Urbano

1) [**4+7 punti**] Calcolare i seguenti integrali nel piano complesso. Le curve di integrazione sono orientate positivamente.

$$I_1 = \oint_{|z-1|=3/2} \frac{\cos(z\pi)}{z^2-1} dz \,, \qquad I_2 = \oint_{|z|=2} \frac{1}{\cos(1/z)(z-1)} dz \,. \quad (82)$$

Soluzione. $I_1 = -\pi i$ *(teorema dei residui) e* $I_2 = 2\pi i$ *(teorema del residuo allinfinito).*

2) [**4 punti**] Si consideri la funzione

$$w = f(z) = (z-1)^{2/5} \,. \quad (83)$$

Si dimostri che si tratta di una funzione polidroma. Si trovino i punti di diramazione specificandone la natura.

Soluzione. Ad ogni valore di z corrispondono cinque valori distinti di w. z=1 è un punto di diramazione algebrico di ordine 4. Lo stesso vale per il punto allinfinito.

3) [**4+6 pt**] Dato l'operatore $E^+ : l_2 \to l_2$ tale che $E^+(x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_2, x_3, x_4, \dots)$, i) determinare il $\mathrm{Ker}(2+E^+)$ in l_2; ii) Trovare la soluzione $\underline{x} \in l_2$ dell'equazione $(2+E^+)\underline{x} = \underline{e}_2$, dove $\underline{e}_2$ è il versore $(0,1,0,\dots) \in l_2$.

Soluzione. i) La soluzione dell'equazione $(2+E^+)\underline{x} = \underline{0}$ *è la successione* $\{x_n\}$ *tale che* $x_n = (-2)^{n-1}x_1$ *che non appartiene a* l_2*. Quindi Ker*$(2+E^+) = \{\underline{0}\}$ *in* l_2*. ii)* $(2+E^+)\underline{x} = 2(1+(1/2)E^+)\underline{x} = \underline{e}_2$*. Quindi* $\underline{x} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}E^+\right)^{-1}\underline{e}_2 =$

$\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}E^+\right)\underline{e}_2 = \frac{1}{2}\underline{e}_2 - \frac{1}{4}\underline{e}_1 = \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 0, \dots\right)$

4) [**4 pt**] Ricordando che la trasformata di Fourier di $\exp(-x^2/2)$ è $\sqrt{2\pi}\exp(-k^2/2)$, determinare la trasformata di Fourier di $g(x) = \int_{\mathbb{R}} \exp(-(x-y)^2)(y^2+1)^{-1}dy$.

Soluzione. La trasformata di Fourier di $\exp(-x^2)$ *è* $\sqrt{\pi}\exp(-k^2/4)$*, quella di* $(x^2+1)^{-1}$ *è* $\pi\exp(-|k|)$*. Quindi il teorema di convoluzione implica che* $\hat{g}(k) = \pi^{3/2}\exp(-|k| - k^2/4)$

5) [**4 pt**] A cosa converge debolmente la successione di funzionali lineari $\{\hat{F}_n\}$: $\hat{F}_n(\varphi) = n^a \int\limits_0^\infty \frac{e^{-nt}}{t+1}\varphi(t)dt$ al variare di $a \geq 0$?

Soluzione. Se $0 \leq a < 1$, $\hat{F}_n \to 0$*; se* $a = 1$, $\hat{F}_n \to 2\hat{\delta}_0$*; se* $a > 1$, $\hat{F}_n \to \infty$

Scritto dell' 08/09/2023
canale A-F, P. M. Santini e A. Urbano

1) [**9 punti**] Usando opportunamente il teorema dei residui, calcolare l'integrale

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta}{\cosh\alpha - \cos\theta} d\theta \,, \tag{84}$$

dove $\alpha \in \mathbb{R}^+$.
Soluzione. Usando la sostituzione $z = e^{i\theta}$, includiamo solo i residui in $z = 0$ e $z = e^{-\alpha}$. Si ottiene $I = 2\pi(-1 + \cosh\alpha/\sinh\alpha)$.

2) [**6 punti**] Per ciascuna delle seguenti funzioni si scrivano i termini con potenza negativa dei corrispondenti sviluppi in serie di Laurent centrati in $z = 0$ (qualora esistano) specificandone la regione di convergenza. In ogni caso, si specifichi la natura della singolarit in $z = 0$.

$$f(z) = \frac{1}{z^3 \sinh z} \,, \qquad g(z) = \frac{\cos z}{z^5} \,, \qquad h(z) = \frac{1}{z^{12}(1 + e^{1/z})} \,. \tag{85}$$

Soluzione. $f(z)$ ha un polo di ordine 4 e lo sviluppo converge in $A(0, 0, \pi)$. Lo sviluppo cercato $f(z) = \frac{1}{z^4} - \frac{1}{6z^2} + O(z^0)$. $g(z)$ ha un polo di ordine 5 e lo sviluppo converge in $A(0, 0, \infty)$. Lo sviluppo cercato $g(z) = \frac{1}{z^5} - \frac{1}{2z^3} + \frac{1}{24z} + O(z)$. Infine, $h(z)$ ha un punto di accumulazione di singolarit in $z = 0$ e non abbiamo sviluppo di Laurent.

3) (**3+3+4 pt**) i) Se $\hat{P}$ è un proiettore ortogonale sullo spazio di Hilbert H, determinare $\|\hat{P}\|$. Determinare inoltre le proiezioni ortogonali di e^x ii) sul sottospazio span$\{1, e^{ix}\}$ di $L^2[-\pi, \pi]$; iii) sul sottospazio span$\{1, x\}$ di $L^2[-1, 1]$. Suggerimento per il punto iii): si usi la base dei polinomi di Legendre degli appunti: $e_1 = c_1,\ e_2 = c_2 x,\ e_3 = c_3(x^2 - 1/3), \ldots$
Soluzione: i) $\|\hat{P}\| = 1$ (si veda gli appunti). ii) La base ortonormale del sottospazio è $e_n = \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}$, $n = 0, 1$, quindi $(|e_0><e_0| + |e_1><e_1|)\, e^x = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} e^y dy + \frac{e^{ix}}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{y(1-i)} dy = \frac{\sinh\pi}{\pi} \left(1 - \frac{e^{ix}}{1-i}\right)$; iii) La base ortonormale del sottospazio è $e_1 = 1/\sqrt{2},\ e_2 = \sqrt{\frac{3}{2}} x$, quindi $(|e_1><e_1| + |e_2><e_2|)\, e^x = \frac{1}{2} \int\limits_{-1}^{1} e^y dy + \frac{3}{2} x \int\limits_{-1}^{1} y e^y dy = \frac{\sinh 1}{2} + \frac{3}{e} x$.
4) (**4 pt**) Sviluppare la funzione e^x in serie di Fourier in $[0, 1]$.
Soluzione. $e^x \sim (e - 1) \sum\limits_{n \in \mathbb{Z}} \frac{e^{2\pi i n x}}{1 - 2\pi i n}$.

5) (**4 pt**) Data la funzione $f(x) = (x - \alpha)H(-x) + \beta H(x) \sin x$, determinare le costanti α e β tali affinchè $f''(x)$ sia una funzione continua in $\mathbb{R}$, e scriverla.
Soluzione. $f'(x) = H(-x) + \alpha\delta(x) + \beta H(x) \cos x$; $f''(x) = \alpha\delta'(x) + (\beta - 1)\delta(x) - \beta H(x) \sin x$. Quindi $f''(x)$ è continua se e solo se $\alpha = 0, \beta = 1$, e $f''(x) = -H(x) \sin x$.

MODELLI E METODI MATEMATICI DELLA FISICA
canale A-F; P. M. Santini e A. Urbano
Scritto straordinario del 09/11/2023

1) [**10 punti**] Usando opportunamente il teorema dei residui, calcolare l'integrale

$$I = \mathrm{PV}\int_0^{\infty} \frac{x^2}{(x^2-4)(x^2+4)}dx\,. \tag{86}$$

Si motivi in particolare la necessità di considerare il valore principale, e si giustifichi l'uso delle formule risolutive usate avendo cura di disegnare il cammino di integrazione.

Soluzione. Scriviamo $I = \frac{1}{2}PV\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{(x^2-4)(x^2+4)}dx$. *L'integrale converge per confronto asintotico per* $x \to \pm\infty$, *ma abbiamo singolarit sull'asse reale locate in* $x = \pm 2$ *che lo rendono convergente solo in termini del suo valore principale. Usando il teorema dei residui, scriviamo* $I = \frac{1}{2}\Big\{2\pi i Res[f(z), 2i] + \pi i Res[f(z), +2] + \pi i Res[f(z), -2]\Big\} = \frac{\pi}{8}$ *con* $f(z) = z^2/[(z^2-4)(z^2+4)]$.

2) [**6 punti**] Si consideri la funzione

$$f(z) = (z-3)\sin\left(\frac{1}{z+2}\right)\,. \tag{87}$$

(i) Si determinino i primi tre termini dello sviluppo in serie di Laurent centrato in $z=-2$.
(ii) Qual'è la natura della singolarit in $z=-2$? Quale il suo residuo?
(iii) Qual'è il più grande anello di convergenza della serie di Laurent richiesta al punto *(i)*?

Soluzione. Lo sviluppo richiesto $f(z) = 1 - \frac{5}{z+2} - \frac{1}{6(z+2)^2} + \dots$. *La singolarit isolata ed essenziale. Il residuo vale* -5. *La convergenza si ha nell'anello* $A(-2,0,\infty)$ *(essendo il seno una funzione intera, l'unica singolarit quella ereditata dalla funzione razionale* $1/(z+2)$.

3) (**4+3+3 pt**) i) Sia H uno spazio di Hilbert separabile, e $\{|e_j>\}_{j\in\mathbb{N}^+}$ una base ortonormale in H. i) Determinare autovalori e autovettori in H dell'operatore $\hat{A} = c|e_1><e_1| + |e_3><e_3|$, dove c è un parametro complesso arbitrario. ii) Sotto quali condizioni $\hat{A}$ è un operatore hermitiano? iii) Sotto quali condizioni $\hat{A}$ è un proiettore ortogonale?

Soluzione: i) $\lambda = c$ *con autovettore* $|e_1>$, $\lambda = 1$ *con autovettore* $|e_3>$, *e* $\lambda = 0$ *con autovettore nello span di* $\{|e_j>\}_{j\in\mathbb{N}^+, j\neq 1,3}$. *ii)* $c\in\mathbb{R}$. *iii)* $c = 1, 0$.

4) (**4 pt**) Calcolare $I = \int\limits_0^{\infty} \delta(x^3 - x)e^{-x}dx$.

Soluzione. $I = \frac{e+1}{2e}$.

5) (**4 pt**) Se $\hat{f}(k) = \pi e^{-|k|}$ è la trasformata di Fourier di $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$, calcolare la trasformata di Fourier di $f_1(x) = \frac{1}{x^2+a^2}$, $a \in \mathbb{R}$, e di $f_2(x) = \frac{x}{(x^2+1)^2}$.

Soluzione. i) $f_1(x) = \frac{1}{a^2}\frac{1}{(x/a)^2+1}$, *quindi* $\hat{f}_1(k) = \frac{\pi}{|a|}e^{-|ak|}$. *ii)* $f_2(x) = -\frac{1}{2}f'(x)$, *quindi* $\hat{f}_2(k) = -\frac{i\pi}{2}ke^{-|k|}$