Onde debolmente non lineari e quasi unidimensionali in Natura. La rottura di tali onde e il problema della loro regolarizzazione dissipativa

Federica Santucci

19 settembre 2012

Indice

Capitolo 1

Introduzione

La rottura delle onde è un fenomeno frequente in Natura, descrivibile dal punto di vista fisico-matematico attraverso sistemi di equazioni differenziali alle derivate parziali non lineari. Come è noto, risolvere tali sistemi è un compito decisamente arduo, ma imponendo condizioni che, pur restringendo il campo di validità del modello, sono di rilevanza fisica, è spesso possibile ottenere modelli più semplici, ma non per questo di minor interesse, trattabili analiticamente.

Quando si parla di propagazione ondosa, non si può non pensare alla propagazione delle onde marine. Il mare costituisce da sempre un luogo affascinante per il genere umano ed interessante sotto molteplici punti di vista, come quello delle scienze naturali. Un tema particolarmente caro alla fisica è lo studio delle onde marine. Queste sono state e sono un ambito di interesse anche per risvolti di carattere drammatico, basti pensare ai disastrosi tsunami che si sono verificati nel corso della storia (dai più recenti accaduti nel Marzo 2011 in Giappone e nel 2004 in Indonesia, a quello seguito al terremoto di Messina del 1908 e tanti altri).

Sebbene la finalità di questo lavoro non sia di studiare onde marine, il mare è di aiuto nel presentare l'idea base di questa tesi, che ha come punto cardine il concetto di **rottura di un'onda**.

L'onda marina si presenta come una increspatura, più o meno piccola, della superficie d'acqua. Se si idealizza la superficie del mare come una superficie completamente piatta, un piano, ogni onda è un innalzamento più o meno vistoso di acqua al di sopra della superficie marina. Questi innalzamenti, cioè l'altezza delle onde, possono variare da pochissimi centimetri fino a metri, come nel caso degli tsunami vicino alla riva.

Caratteristica dell'onda è quella di propagarsi. Tipicamente, l'onda del mare, spostandosi, modifica la sua forma, fino a riversarsi su se stessa, in prossimità della costa, come in Figura 1.1. Prima di arrivare a questo punto,

Figura 1.1: Propagazione di un'onda marina.

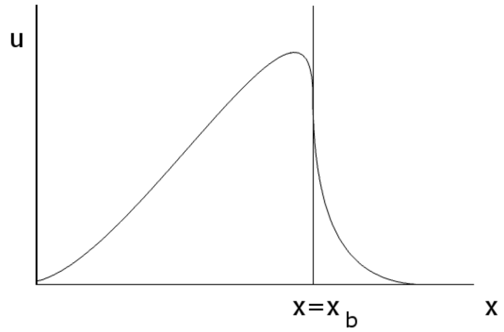

Figura 1.2: Onda che assume un profilo verticale in $x = x_b$.

essa assume un profilo verticale rispetto alla superficie marina (Figura 1.2): in questo momento si dice che l'onda si rompe.

Continuando nella sua evoluzione, dopo aver raggiunto un profilo verticale, l'onda marina si riversa su se stessa, apparendo come in Figura 1.3: dopo la rottura si crea una zona in cui il profilo d'onda è a più valori, cioè polidromo. In tal caso, una retta $x =$costante interseca il grafico in più di un punto: ad esempio in tre punti distinti, oppure in due punti coincidenti ed un altro distinto, come in Figura 1.4.

Nel momento in cui si manifesta la polidromia, sorge il problema della **regolarizzazione** di un'onda. Parlare di *regolarizzazione* implica l'esistenza di una situazione anomala che deve essere, appunto, regolarizzata. Ma cosa può esserci di anomalo in un'onda come in figura? In effetti, finché l'onda rappresenta il profilo di un'onda marina, va tutto bene; la Natura ci mostra continuamente onde marine che si riversano su se stesse. In questo caso la polidromia non costituisce un problema.

La difficoltà sorge se il grafico in figura non individua il profilo di un'onda d'acqua, ma un'altra grandezza fisica (una densità, una velocità, etc). Infatti,

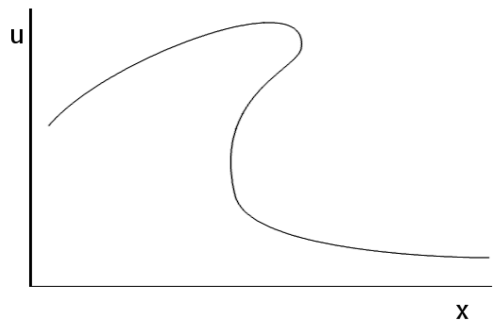

Figura 1.3: Onda polidroma.

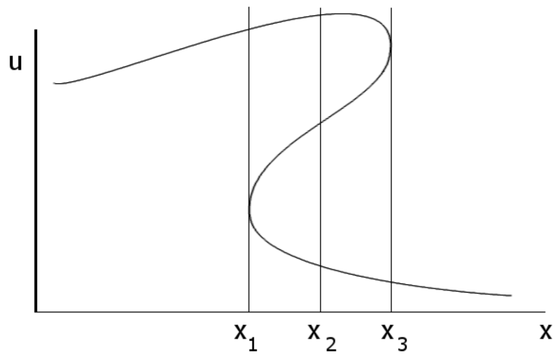

Figura 1.4: Onda polidroma. Come si vede, la retta verticale centrale interseca il grafico della curva in tre punti distinti, le altre due rette intersecano la curva in un punto e sono tangenti in un altro punto. Il punto di tangenza è considerato come la coincidenza di due punti.

se il grafico di Figura 1.4 rappresenta ad esempio una densità in funzione di una coordinata spaziale, diciamo x, ad un certo tempo t, una retta nella zona di polidromia intercetta il grafico della funzione in più di un punto, individuando, quindi, più valori per la densità. In questo caso la polidromia costituisce un'ambiguità che non può essere accettata ed è necessario pensare alla regolarizzazione dell'onda. Cioè, eliminare la polidromia.

Il lavoro si articola nel seguente modo. Il capitolo 2 è dedicato essenzialmente all'introduzione dei risultati noti riguardo il tema della *rottura* delle onde. Si comincia con l'equazione di Riemann

$$u_t + c(u)u_x = 0, \tag{1.1}$$

la cui soluzione generale è data dalla ben nota formula implicita

$$u = F(x - c(u)t), \tag{1.2}$$

studiando tale soluzione ed in particolare studiando il fenomeno della rottura ad essa associato. Si definisce, cioè, cosa si intende con il termine *rottura* in termini matematici, fornendo le condizioni che permettono di caratterizzare ed individuare la rottura. Per chiarezza espositiva, si correda il tutto con degli esempi scelti in modo da essere un ausilio per le finalità del lavoro. Viene poi discusso il tema della *regolarizzazione*, proponendo due modi possibili per regolarizzare un'onda andata incontro a rottura: la regolarizzazione della soluzione della (1.1), che porta all'introduzione dell'*onda d'urto*, e la regolarizzazione dell'equazione (1.1), introducendo un termine correttivo di tipo *dissipativo*, che dà luogo all'equazione di Burgers generalizzata

$$u_t + c(u)u_x = \nu u_{xx}, \qquad \nu > 0. \tag{1.3}$$

Questa è un'equazione che possiede numerose caratteristiche interessanti, a cominciare dal fatto che è esattamente risolubile se $c(u) = u$.

Tutto ciò riguarda la rottura delle onde in dimensione $1+1$. Ma un'onda può propagarsi e rompersi anche in $2+1$ dimensioni (come nel caso delle onde d'acqua) e, in generale, in $n+1$ dimensioni. A questo proposito si introduce l'equazione modello di Kadomtsev-Petviashvili senza dispersione (dKP)

$$(u_t + uu_x)_x + u_{yy} = 0, \qquad u = u(x, y, t). \tag{1.4}$$

Dopo una breve panoramica su alcuni dei punti basilari per la conoscenza di tale equazione, si passa ad una rassegna sul tema della rottura delle sue soluzioni. Sia per la dKP in $2+1$ dimensioni che in $n+1$ dimensioni, indicata con dKP_n:

$$(u_t + uu_x)_x + \triangle_\perp u = 0, \quad u = u(x, y_1, \ldots, y_{n-1}, t), \quad \triangle_\perp := \sum_{i=1}^{n-1} \partial_{y_i}^2. \tag{1.5}$$

Il capitolo 2 esaurisce l'esposizione dei risultati noti e funge da trampolino di lancio per i capitoli successivi, nei quali vengono presentati risultati originali. Nel capitolo 3 la discussione si concentra sull'equazione dKP in $n+1$ dimensioni e con non linearità di ordine $m+1$:

$$(u_t + u^m u_x)_x + \triangle_\perp u = 0, \tag{1.6}$$

con m, n interi positivi arbitrari, che verrà chiamata equazione $dKP_{n,m}$, affrontando il tema di quali fenomeni fisici essa possa descrivere e in quali ambiti della fisica si possa utilizzare. Con l'ausilio di un modello matematico sarà possibile illustrare i requisiti che un'equazione od un sistema di equazioni devono possedere al fine di dedurre l'equazione $dKP_{n,m}$. Il passo successivo è quindi quello di ricavare la $dKP_{n,m}$ da ambiti della fisica. Si presentano tre contesti possibili: l'acustica, la fisica del plasma e la propagazione di onde elettromagnetiche nei dielettrici in ottica non lineare. L'acustica e la fisica del plasma forniscono due situazioni diverse in cui ricavare la dKP con non linearità quadratica in dimensione $3+1$, mentre dall'ottica non lineare si può ricavare la dKP sia con non linearità quadratica che cubica in dimensione $2+1$.

Infine, nel capitolo 4 si trattano aspetti più squisitamente matematici dell'equazione $dKP_{n,m}$. Si comincia studiando alcune simmetrie dell'equazione dKP_n generalizzata nella forma

$$(u_t + c(u)u_x)_x + \triangle_\perp u = 0, \tag{1.7}$$

in cui la non linearità è indicata in modo molto generale, ed utilizzando queste simmetrie per costruire una classe di soluzioni esatte, ma non esplicite, che generalizzano la soluzione (1.2). A seguire si specializza lo studio scegliendo $c(u) = u^m$, cioè rivolgendo l'attenzione all'equazione $dKP_{n,m}$ (1.6) e costruendo una classe di soluzioni per la (1.6) che descrivono la rottura di onde $n+1$-dimensionali, costanti su un fronte d'onda paraboloidale; rottura che avviene simultaneamente in tutti i punti del paraboloide. A questa equazione è dedicato il resto del capitolo: se ne studia il problema di Cauchy per dati iniziali piccoli, individuando i valori di m, n per cui la soluzione va incontro a rottura a tempi lunghi. Si studia quindi in dettaglio come avviene la rottura della soluzione e si propone una regolarizzazione di tipo onda d'urto (di shock).

Capitolo 2

L'equazione di Riemann e la rottura delle onde

Questo capitolo è dedicato all'esposizione di risultati noti nell'ambito della rottura delle onde e della loro regolarizzazione. Si inizia con l'equazione di Riemann (paragrafo 2.1), un punto di partenza classico nello studio della rottura, definendo la rottura dal punto di vista matematico in dimensione $1+1$ ed affrontando il problema della regolarizzazione di un'onda andata incontro a rottura (paragrafo 2.2). Si termina con l'esposizione di risultati recenti riguardanti la rottura di onde multidimensionali descritte dall'equazione di Kadomtsev-Petviashvili senza dispersione (dKP) (paragrafo 2.3), una delle equazioni fondamentali della fisica matematica non lineare. Quest'ultima parte del capitolo riveste un duplice ruolo: innanzitutto permette di estendere il tema della rottura in dimensione maggiore di $1+1$, inoltre introduce l'equazione dKP, fondamentale nel seguito del lavoro.

2.1 L'equazione di Riemann

Si consideri l'equazione delle onde per la funzione incognita $u = u(x,t)$

$$u_{tt} = c_0^2 u_{xx}, \tag{2.1}$$

in cui $u, x, t \in \mathbb{R}$. Questa è un'equazione alle derivate parziali di tipo iperbolico[1] [1, 2, 3, 4, 5, 6] con soluzione generale [1, 3]

$$u = f(x - c_0 t) + g(x + c_0 t). \tag{2.2}$$

[1]Un modo per classificare le equazioni differenziali alle derivate parziali nell'incognita u di forma

$$\sum_{i,j}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \Phi(\vec{x}, u, \nabla_{\vec{x}} u) = 0$$

La (2.2) è costituita dalla somma di due funzioni che descrivono onde propagantisi a velocità c_0, la prima nel verso delle x crescenti e la seconda nel verso delle x decrescenti. Si può evidenziare la presenza nella soluzione di due onde distinte scrivendo la (2.1) come

$$(\partial_t + c_0\partial_x)(\partial_t - c_0\partial_x)\, u = 0. \tag{2.3}$$

In questo modo si vede che l'onda progressiva

$$u = f(x - c_0 t) \tag{2.4}$$

è soluzione dell'equazione $u_t + c_0 u_x = 0$ e l'onda regressiva

$$u = f(x + c_0 t) \tag{2.5}$$

dell'equazione $u_t - c_0 u_x = 0$. Queste due equazioni sono le più semplici tra le equazioni iperboliche, essendo del prim'ordine, lineari nell'incognita u e a coefficienti costanti.

Si consideri l'equazione

$$u_t + c_0 u_x = 0 \tag{2.6}$$

e si sostituisca alla velocità costante c_0 una funzione $c(u)$ dell'incognita $u = u(x,t)$: questo introduce una non linearità che rende la situazione piuttosto differente ed interessante. La (2.6) assume quindi la forma

$$u_t + c(u) u_x = 0 \tag{2.7}$$

ed è nota con il nome di *equazione di Riemann*. Il suo tratto peculiare, cioè la presenza del termine non lineare $c(u)u_x$, è alla base del fenomeno della *rottura dell'onda*.

---

dove $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ è una matrice quadrata di ordine n simmetrica e costante e Φ una funzione regolare arbitraria, è quello di basarsi su due degli invarianti della matrice $\mathbf{A}$: l'indice di inerzia $\mathcal{I}$, ovvero il numero di autovalori negativi, ed il difetto $\mathcal{D}$, cioè il numero di autovalori nulli. In questo modo si distinguono tre casi:

1. equazione *ellittica*: $\mathcal{D} = 0$, $\mathcal{I} = 0$ (oppure $\mathcal{I} = n$); l'esempio tipico è l'equazione di Poisson $\triangle_{\vec{x}} u = -\rho$, con $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ e $\rho(\vec{x}) \in \mathbb{R}$;

2. equazione *iperbolica*: $\mathcal{D} = 0$, $\mathcal{I} = 1$ (oppure $\mathcal{I} = n - 1$); in questo caso rientra l'equazione delle onde $u_{tt} = c_0^2 \triangle_{\tilde{\vec{x}}}$, $\vec{x} = (t, \tilde{\vec{x}}) \in \mathbb{R}^n$. La variabile iperbolica, cioè relativa all'autovalore di segno discorde, è il tempo;

3. equazione *parabolica*: $0 < \mathcal{D} < n$, come l'equazione del calore $u_t = a^2 \triangle_{\tilde{\vec{x}}} u$, $\vec{x} = (t, \tilde{\vec{x}}) \in \mathbb{R}^n$; la variabile parabolica, cioè relativa all'autovalore nullo, è il tempo [3].

2.1.1 Soluzione

Si può ricavare la soluzione della (2.7) utilizzando il *metodo delle caratteristiche* [1, 2, 3, 4, 5, 6]. Supponendo di conoscere $u(x,t)$ nel piano (x,t), si introducono le curve $\mathcal{C}$, dette curve caratteristiche, con pendenza

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = c(u), \tag{2.8}$$

lungo le quali la (2.7) si scrive come la derivata totale di u rispetto al tempo,

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\frac{\partial u}{\partial x} = 0. \tag{2.9}$$

L'intera famiglia delle caratteristiche è individuata dalla (2.8) al variare di u.

Dalla (2.9) segue che su ogni caratteristica la u si mantiene costante e quindi costante è il valore di $c(u)$ per ogni caratteristica: ciò implica che le caratteristiche sono rette. La loro equazione si ricava integrando le (2.8) e (2.9), ottenendo

$$x = c(A(\zeta))t + \zeta \tag{2.10}$$
$$u = A(\zeta), \tag{2.11}$$

in cui ζ è il parametro che identifica la singola caratteristica ed A è una funzione arbitraria di un singolo argomento.

Poiché, dalle (2.10) e (2.11), $\zeta = x - c(A(\zeta))t = x - c(u)t$, sostituendo questa espressione di ζ nella (2.11) si ottiene la soluzione della (2.7) nella forma

$$u = A(x - c(u)t). \tag{2.12}$$

Le equazioni (2.10)-(2.11) e la singola equazione (2.12) forniscono due caratterizzazioni equivalenti della soluzione generale della (2.7), dipendenti dalla funzione arbitraria $A(\zeta)$, $\zeta \in \mathbb{R}$ (si veda l'appendice A per una dimostrazione alternativa del risultato). La funzione arbitraria A viene specificata in modo diverso a seconda del tipo di problema al valore iniziale e/o al contorno che si vuole risolvere.

Se, ad esempio, si vuole risolvere il problema di Cauchy sulla retta

$$u(x,0) = f(x), \qquad x \in \mathbb{R}$$

allora

$$A(\zeta) = f(\zeta), \qquad \zeta \in \mathbb{R} \tag{2.13}$$

e la soluzione del problema di Cauchy per (2.7) diventa

$$x = \zeta + F(\zeta)t \tag{2.14}$$
$$F(\zeta) \equiv c(f(\zeta)) \tag{2.15}$$
$$u = f(\zeta) \tag{2.16}$$

o, in forma equivalente, ma più compatta ed illustrativa,

$$u = f(x - F(\zeta)t) = f(x - c(u)t). \tag{2.17}$$

Se, invece, si vuole risolvere il problema al valore iniziale e al contorno sulla semiretta

$$u(x, 0) = f(x), \quad x > 0$$
$$u(0, t) = g(t), \quad t > 0,$$

con $c(u) > 0$, allora $A(\zeta)$ diventa:

$$A(\zeta) = f(\zeta), \quad \zeta > 0 \tag{2.18}$$
$$A(\zeta) = g(\tilde{t}(\zeta)), \quad \zeta < 0 \tag{2.19}$$

dove $t = \tilde{t}(\zeta)$ è soluzione dell'equazione

$$\zeta + c(g(t))t = 0, \quad t > 0, \quad \zeta < 0, \tag{2.20}$$

che definisce implicitamente t in funzione di ζ.

2.1.2 Rottura

All'inizio di questa sezione è stata introdotta l'equazione di Riemann (2.7) come una generalizzazione non lineare dell'equazione delle onde (2.6). Si noti innanzitutto come la soluzione (2.12) sia formalmente analoga alla (2.4). La differenza consiste nel fatto che la velocità costante c_0 è sostituita da $c(u)$, come del resto l'equazione di Riemann si ottiene dalla (2.6) proprio grazie a tale sostituzione. E' noto che la (2.4) descrive un'onda che si propaga nello spazio con moto traslatorio a velocità c_0: tutti i punti del suo profilo d'onda si muovono nella direzione di propagazione alla medesima velocità costante c_0. Nell'equazione di Riemann, invece, la velocità di propagazione è funzione di u e ciò significa che i punti del profilo d'onda si muovono con diverse velocità: se $c'(u) > 0$, porzioni del profilo caratterizzate da u crescente procederanno con velocità via via maggiori, viceversa se $c'(u) < 0$. Ci si aspetta, quindi, che ad un certo istante di tempo t_b il profilo diventi verticale in un punto

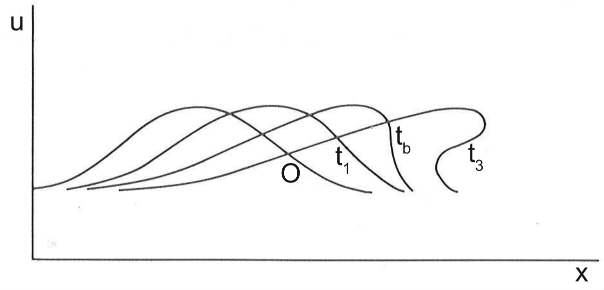

Figura 2.1: Evoluzione di un'onda che va incontro a rottura a $t = t_b$. Il profilo è verticale al tempo critico $t = t_b$ e polidromo a tempi maggiori.

x_b, facendo sì che il gradiente di u diventi infinito in (x_b, t_b) (è la cosiddetta "rottura dell'onda", o "catastrofe del gradiente") e che per $t > t_b$ la soluzione diventi polidroma.

La Figura 2.1 illustra la tipica evoluzione di un profilo d'onda che va incontro a rottura. Al tempo zero il profilo è una funzione continua ad un picco che a tempi successivi si deforma in modo che la sommità della curva oltrepassi la base. Al tempo $t = t_b$ il profilo destro dell'onda diventa verticale. Dunque il suo gradiente per $t = t_b$ nel punto $x = x_b$ sviluppa una singolarità. A tempi ancora successivi, $t_3 > t_b$, l'onda è una funzione polidroma, tipicamente a tre valori.

Calcolando le derivate di u rispetto a t e x e ricordando che la (2.14) definisce ζ come funzione di x e t, $\zeta = \zeta(x,t)$, si ha, dalla (2.16):

$$u_t = f'(\zeta)\zeta_t, \qquad u_x = f'(\zeta)\zeta_x \tag{2.21}$$

e dalla (2.14)

$$\zeta_t = -\frac{F(\zeta)}{1 + F'(\zeta)t}, \qquad \zeta_x = \frac{1}{1 + F'(\zeta)t}. \tag{2.22}$$

Da queste si ricavano le espressioni

$$u_t = -\frac{F(\zeta)f'(\zeta)}{1 + F'(\zeta)t}, \qquad u_x = \frac{f'(\zeta)}{1 + F'(\zeta)t}, \tag{2.23}$$

le quali presentano singolarità per valori di t pari a

$$t = -\frac{1}{F'(\zeta)}, \qquad F'(\zeta) < 0. \tag{2.24}$$

Quando la curva sviluppa una pendenza di valore infinito sta cominciando a rompersi e dopo diventerà una funzione a tre valori (Figura 2.1).

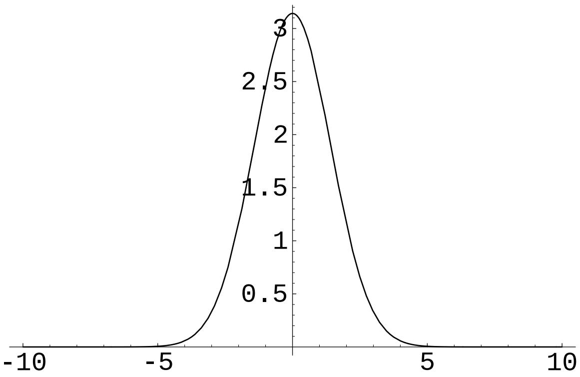

Figura 2.2: Grafico del dato iniziale (2.30) in funzione di x con $d = \pi$.

Si definisce **tempo di rottura** t_b il primo tempo per cui si verifica la (2.24), ovvero

$$t_b = -\frac{1}{F'(\zeta_b)} \equiv \min\left(-\frac{1}{F'(\zeta)}\right), \qquad F'(\zeta_b) < 0 \tag{2.25}$$

con la richiesta, quindi, che $|F'(\zeta_b)|$ sia il massimo assoluto:

$$F''(\zeta_b) = 0, \qquad F'''(\zeta_b) > 0. \tag{2.26}$$

Tale rottura avviene, dalla (2.14), nel punto

$$x_b = F(\zeta_b)t_b + \zeta_b. \tag{2.27}$$

E' utile illustrare questi risultati generali attraverso un esempio. Se $c(u) = u$, l'equazione di Riemann diventa l'equazione di Hopf

$$u_t + uu_x = 0. \tag{2.28}$$

Scegliendo la condizione iniziale gaussiana in Figura 2.2, $f(x) = de^{-x^2/4}$, allora si risolve il problema di Cauchy

$$u_t + uu_x = 0 \tag{2.29}$$

$$f(x) = de^{-x^2/4}, \qquad d = \text{costante} > 0 \tag{2.30}$$

la cui soluzione è descritta, al variare del parametro ζ, da

$$x = \zeta + de^{-\zeta^2/4}t \tag{2.31}$$

$$u = de^{-\zeta^2/4}. \tag{2.32}$$

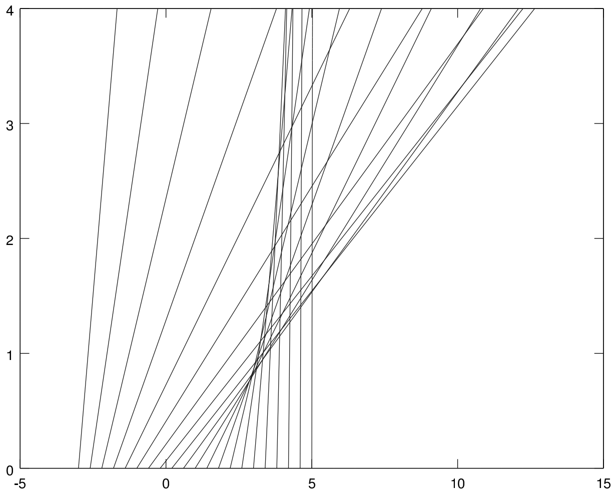

Figura 2.3: Rette caratteristiche per l'equazione $u_t + uu_x = 0$ con dato iniziale di Figura 2.2 nel piano (x, t).

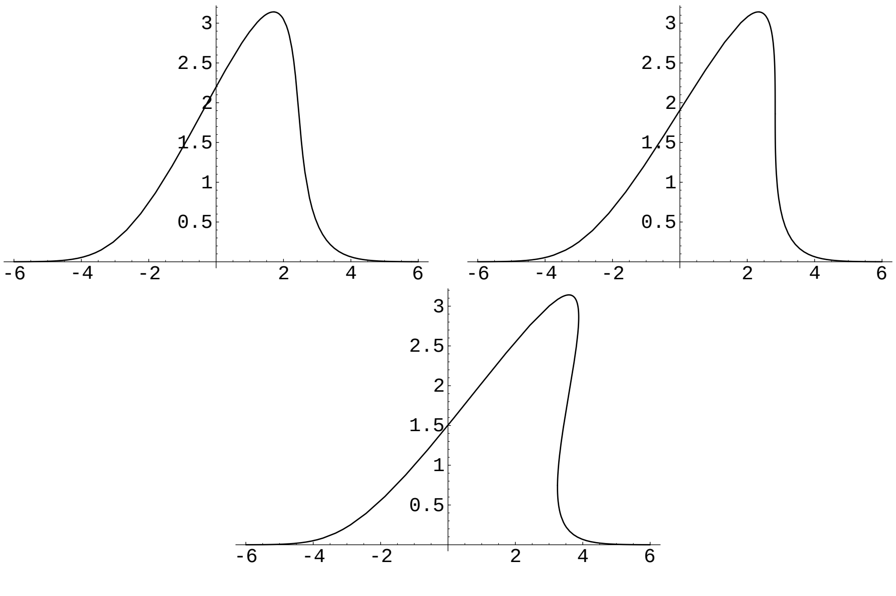

Figura 2.4: Immagini consecutive dell'evoluzione del dato iniziale (2.30) per $d = \pi$, per $t = t_b - 0.2$, $t = t_b$ e $t = t_b + 0.4$, $t_b \simeq 0.74$.

In Figura 2.3 sono graficate le rette caratteristiche (2.31) nel piano (x, t) per $-3 < x < 5$. La loro pendenza varia in accordo con la (2.31) e si nota come inizialmente esse si aprano a ventaglio per poi convergere ed intersecarsi. La pendenza aumenta finché le rette non divengono parallele all'asse t.

Si focalizzi l'attenzione sulla zona di intersezione delle caratteristiche. In essa le caratteristiche individuate dai parametri ζ_1, ζ_2, con $\zeta_1 \neq \zeta_2$, che trasportano le porzioni di profilo $u_1 = f(\zeta_1)$ e $u_2 = f(\zeta_2)$, con $u_1 \neq u_2$, si intersecano nel punto (x, t); quindi la soluzione è polidroma.

Tale regione ha origine nel punto (x_b, t_b) e si sviluppa per $t > t_b$ (si veda la Figura 2.3), con

$$t_b = \frac{\sqrt{2e}}{d}, \qquad x_b = 2\sqrt{2}, \tag{2.33}$$

in corrispondenza del parametro caratteristico

$$\zeta_b = \sqrt{2}. \tag{2.34}$$

In Figura 2.4 si riporta l'evoluzione del dato iniziale (2.30). Si noti il profilo verticale per $t = t_b$ e la polidromia per $t > t_b$.

Riassumendo:

1. l'onda iperbolica non lineare si deforma e, al tempo critico t_b, *si rompe*: nel punto x_b, la sua pendenza (il suo gradiente) diventa infinito nel punto (x_b, t_b) dello spazio tempo (Figura 2.1). Per $t > t_b$ la soluzione diventa, genericamente, a tre valori. La deformazione dell'onda e la sua conseguente polidromia sono causate dalla non linearità $c(u)u_x$ nell'equazione differenziale (2.7): la funzione $c(u)$ si comporta come una velocità (si confronti la soluzione (2.12)) e poiché dipende da u, valori differenti di u si muoveranno con velocità differenti. Perciò dopo un tempo t i punti del profilo d'onda avranno traslato della quantità $c(u)\,t$,diversa per ogni u, modificando l'aspetto dell'onda stessa,

2. nel piano (x, t) si può dedurre il comportamento della soluzione della (2.7) attraverso le rette caratteristiche, definite dalla (2.14) al variare del parametro ζ. Da questo punto di vista la polidromia della soluzione si manifesta nella convergenza delle rette in una regione dello spaziotempo, per $t > t_b$,

3. dal punto di vista analitico, la rottura dell'onda si manifesta dalla singolarità nelle derivate di u rispetto ad x, t (2.23). Il tempo di rottura, cioè il tempo più piccolo al quale si ha divergenza delle derivate è definito nelle (2.25) e (2.26).

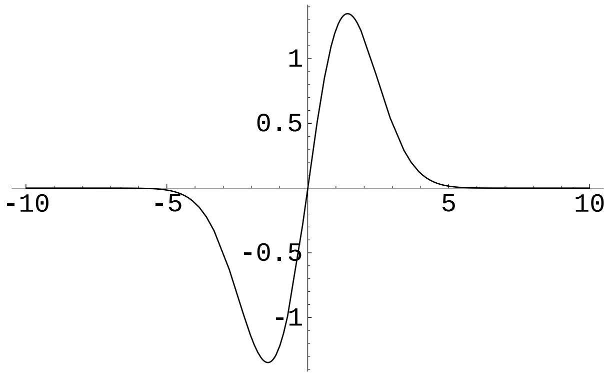

Figura 2.5: Grafico del dato iniziale (2.38), in funzione di x con $d = \pi$.

2.1.3 Esempi

Nel paragrafo precedente è stato presentato come esempio di rottura di un'onda il problema di Cauchy (2.29), (2.30). Adesso si introdurranno altri esempi per arricchire la panoramica su questo fenomeno, studiando come la forma di $c(u)$ nella (2.7) influenzi il comportamento delle soluzioni.

Si considerino le PDE

$$u_t + uu_x = 0 \tag{2.35}$$

$$u_t + u^2 u_x = 0, \tag{2.36}$$

ovvero l'equazione di Riemann (2.7) con non linearità rispettivamente quadratica e cubica, per i seguenti dati iniziali

1. la gaussiana (Figura 2.2)

$$f(x) = de^{-x^2/4}, \qquad d = \text{costante} > 0 \tag{2.37}$$

2. funzione dispari con due picchi, come la derivata rispetto a x della (2.37) con il segno cambiato (Figura 2.5)

$$f(x) = \frac{d}{2} x e^{-x^2/4}, \qquad d > 0 \tag{2.38}$$

3. la funzione

$$f(x) = \Gamma\left(\frac{3}{4}\right) \, {}_1F_1\left(\frac{3}{4}; \frac{1}{2}; -\frac{x^2}{4}\right) + x\,\Gamma\left(\frac{5}{4}\right) \, {}_1F_1\left(\frac{5}{4}; \frac{3}{2}; -\frac{x^2}{4}\right), \tag{2.39}$$

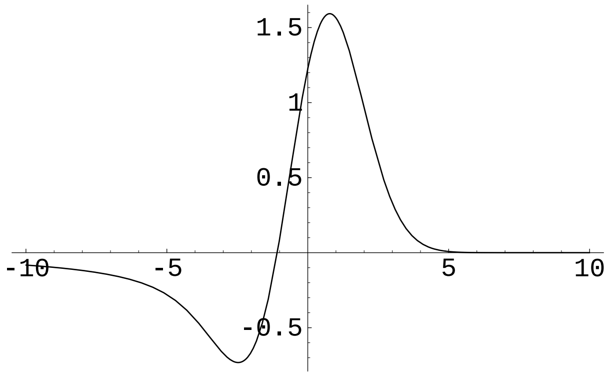

Figura 2.6: Grafico del dato iniziale (2.39).

in cui Γ indica la funzione Gamma di Eulero e ${}_1F_1$ la funzione ipergeometrica confluente di Kummer [7, 8] (Figura 2.6). La scelta di questo dato iniziale è dovuta all'importanza che rivestirà per le finalità del lavoro (si veda il capitolo 4); inoltre permette di studiare l'evoluzione di un dato iniziale con due picchi, uno positivo e l'altro negativo, ma di diversa altezza.

Cominciando con il **dato iniziale (2.37)**, il problema relativo alla (2.35) è già stato discusso nel paragrafo precedente (pagina 13), pertanto qui ci si limita a riscrivere la soluzione

$$x = \zeta + de^{-\zeta^2/4}t \tag{2.40}$$

$$u = de^{-\zeta^2/4} \tag{2.41}$$

e a richiamare i valori di t_b, ζ_b e di x_b

$$t_b = \frac{\sqrt{2e}}{d}, \qquad \zeta_b = \sqrt{2}, \qquad x_b = 2\sqrt{2}. \tag{2.42}$$

Nel caso della (2.36) le caratteristiche sono definite dalla relazione

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = u^2 \tag{2.43}$$

e descritte al variare del parametro ζ da

$$x = \zeta + d^2 e^{-\zeta^2/2}t. \tag{2.44}$$

Il grafico è riportato in Figura 2.7.

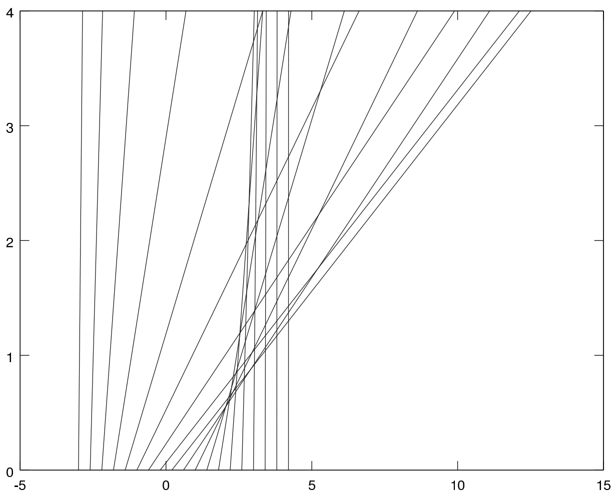

Figura 2.7: Rette caratteristiche per l'equazione $u_t + u^2 u_x = 0$ con dato iniziale di Figura 2.2 nel piano (x, t).

La soluzione è

$$x = \zeta + d^2 e^{-\zeta^2/2} t$$
$$u = d e^{-\zeta^2/4},$$

la cui evoluzione per differenti valori di t è mostrata in Figura 2.8. Alla rottura, t_b, x_b e ζ_b sono

$$t_b = \frac{e^{1/2}}{d^2}, \qquad \zeta_b = 1, \qquad x_b = 2. \tag{2.45}$$

Dal confronto delle Figure 2.3, 2.7 e 2.4, 2.8, si evince che per un dato iniziale positivo $\forall x$ le due soluzioni non differiscono in maniera sostanziale: il picco iniziale evolve rompendosi verso destra in entrambi i casi.

Si apprezza, invece, una differenza nel comportamento delle soluzioni per il **dato iniziale (2.38)** (figura 2.5), non più gaussiano bensì funzione dispari a due picchi. Le caratteristiche dell'equazione (2.35) sono descritte al variare di ζ dalla

$$x = \zeta + \frac{d}{2} \zeta e^{-\zeta^2/4} t \tag{2.46}$$

ed il loro grafico nel piano (x, t) è in Figura 2.9. In Figura 2.10 si può vedere l'evoluzione dell'onda. La rottura avviene in due punti distinti dello spazio-tempo al medesimo tempo

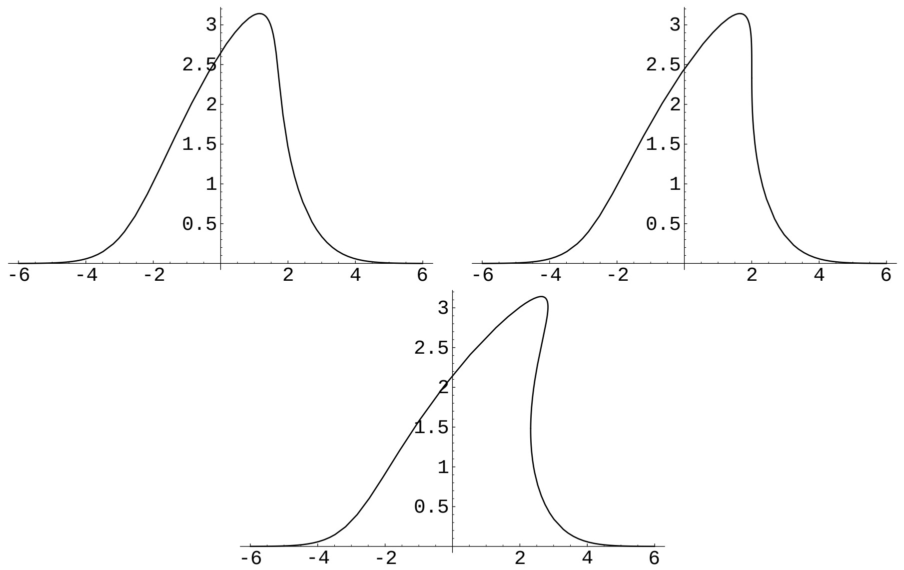

Figura 2.8: Immagini consecutive dell'evoluzione del dato iniziale (2.37) per $d = \pi$ secondo la legge di evoluzione (2.36), per $t = t_b - 0.05$, $t = t_b$ e $t = t_b + 0.1$, $t_b \simeq 0.17$.

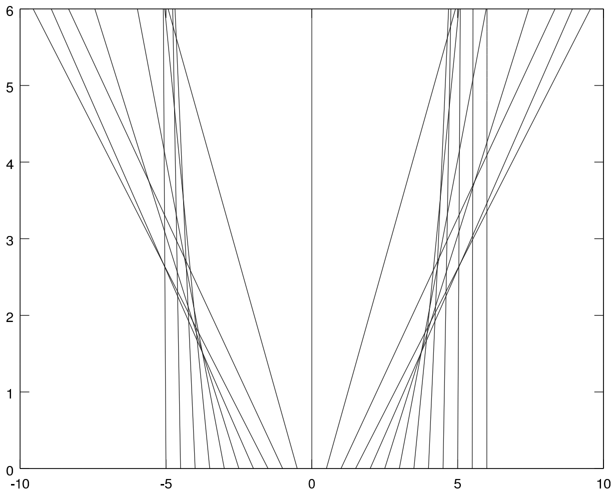

Figura 2.9: Rette caratteristiche nel piano (x, t) per l'equazione $u_t + uu_x = 0$ con dato iniziale di Figura 2.5.

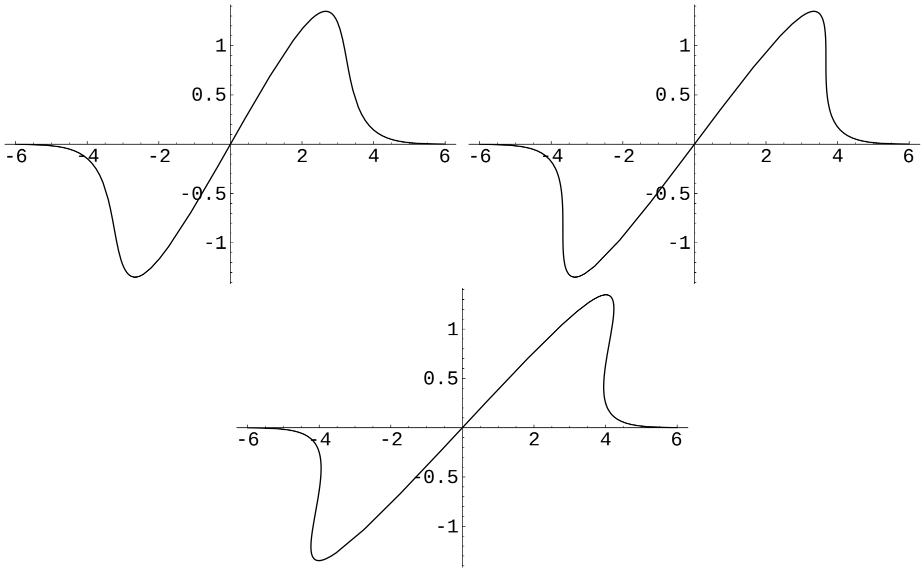

Figura 2.10: Immagini consecutive dell'evoluzione del dato iniziale (2.38) per $d = \pi$, secondo la legge di evoluzione (2.35), per $t = t_b - 0.5$, $t = t_b$ e $t = t_b + 0.5$, $t_b \simeq 1.43$.

$$t_b = \frac{e^{3/2}}{d}, \tag{2.47}$$

per i valori di ζ e x

$$\zeta_{b1} = \sqrt{6}, \quad x_{b1} = \frac{3\sqrt{6}}{2}; \qquad \zeta_{b2} = -\sqrt{6}, \quad x_{b2} = -\frac{3\sqrt{6}}{2}. \tag{2.48}$$

Per la (2.36), le caratteristiche sono individuate dalla famiglia di rette (Figura 2.11)

$$x = \zeta + \frac{d^2}{4}\zeta^2 e^{-\zeta^2/2} t; \tag{2.49}$$

la rottura avviene in due punti dello spazio-tempo caratterizzati dai valori di t_b, ζ_b e x_b

$$t_{b1} = -\frac{4e^{\zeta_{b1}^2/2}}{d^2\zeta_{b1}\left(2 - \zeta_{b1}^2\right)}, \quad \zeta_{b1} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{17}}{2}}, \quad x_{b1} = \zeta_{b1} - \frac{\zeta_{b1}}{2 - \zeta_{b1}^2}, \tag{2.50}$$

$$t_{b2} = -\frac{4e^{\zeta_{b2}^2/2}}{d^2\zeta_{b2}\left(2 - \zeta_{b2}^2\right)}, \quad \zeta_{b2} = -\sqrt{\frac{5-\sqrt{17}}{2}}, \quad x_{b2} = \zeta_{b2} - \frac{\zeta_{b2}}{2 - \zeta_{b2}^2}. \tag{2.51}$$

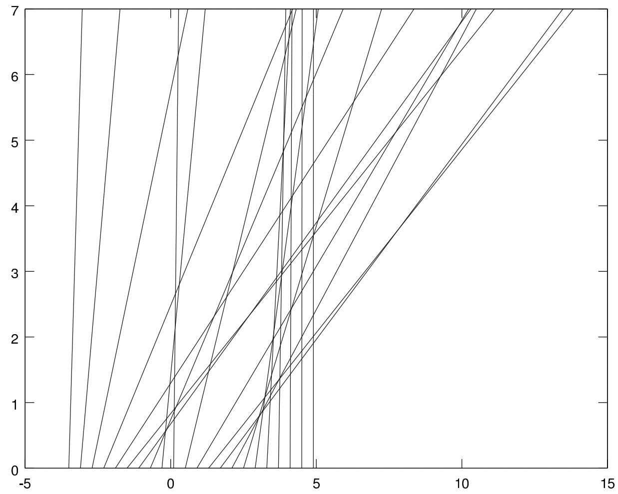

Figura 2.11: Rette caratteristiche per l'equazione $u_t + u^2 u_x = 0$ con dato iniziale di Figura 2.5 nel piano (x, t).

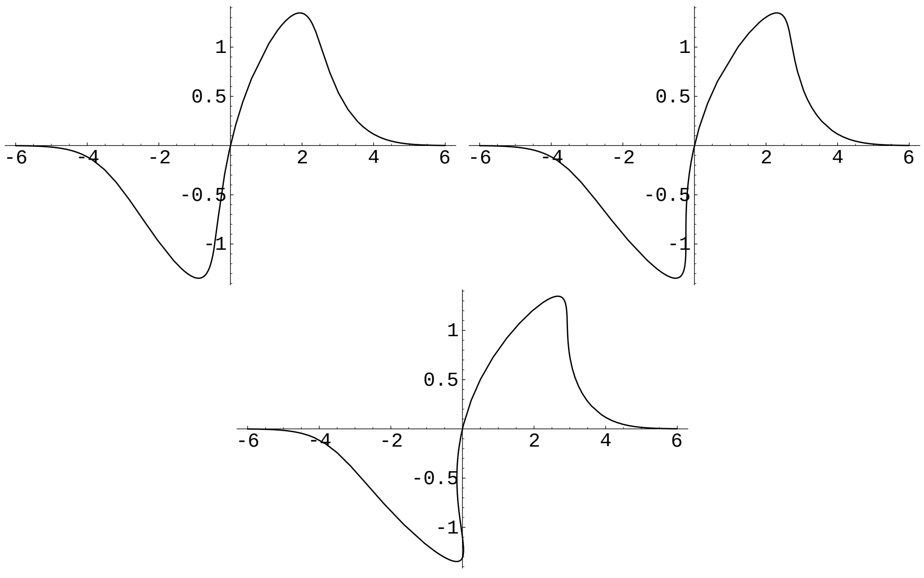

Figura 2.12: Immagini consecutive dell'evoluzione del dato iniziale (2.38) per $d = \pi$, secondo la legge di evoluzione (2.36), per $t = t_b - 0.2$, $t = t_b$ e $t = t_b + 0.2$, $tb \simeq 0.49$.

Inserendo i valori numerici di ζ_{b1} e ζ_{b2} all'interno di t_{b1} e t_{b2} rispettivamente, si calcola

$$t_{b1} \simeq \frac{1}{d^2} 7.15, \qquad t_{b2} \simeq \frac{1}{d^2} 4.82,$$

da cui segue che si rompe prima la porzione d'onda negativa individuata da ζ_{b_2}, come mostra la Figura 2.12.

Quindi, per l'equazione (2.35) la rottura avviene sia verso le x crescenti che verso le x decrescenti (Figure 2.9, 2.10), mentre per l'equazione (2.36) la rottura avviene solo verso le x crescenti (Figure 2.11, 2.12). Infatti, secondo la (2.35), ogni punto del profilo d'onda evolve con una velocità $c(u) = u$, perciò un punto $u(x, 0) > 0$ del dato iniziale evolve con velocità positiva, mentre un punto $u(x, 0) < 0$ con velocità negativa. Al contrario, per la (2.36) la velocità di propagazione della soluzione è $c(u) = u^2$, ovvero sempre positiva. Come conseguenza i due picchi evolvono e si rompono verso destra. Il picco che arriva per primo a rottura è quindi il picco inferiore, poiché ha un profilo di destra più ripido.

E' interessante osservare cosa accade per l'ultimo **dato iniziale (2.39)**. Sebbene la dinamica evolutiva non differisca qualitativamente dalla dinamica del dato (2.38), stavolta si rompe prima il picco positivo anche per l'equazione (2.36), a causa dell'altezza maggiore di tale picco rispetto al picco negativo. In particolare, per l'equazione (2.35) la rottura avviene per i valori

$$t_b = 1.31, \qquad \zeta_b = 1.96, \qquad x_b = 3.26; \tag{2.52}$$

per l'equazione (2.36), invece, la rottura avviene per i valori

$$t_b = 0.57, \qquad \zeta_b = 1.60, \qquad x_b = 2.51. \tag{2.53}$$

Nelle Figure 2.13, 2.14 si riportano le evoluzioni del dato iniziale secondo le equazioni (2.35) e (2.36) rispettivamente.

Infine, una riflessione su cosa accade per **dati iniziali piccoli**, cioè $0 < d \ll 1$. La rottura avviene a **tempi lunghi**: $O(d^{-1})$ per l'equazione con non linearità quadratica (2.35) (relazioni (2.42) e (2.47)), e $O(d^{-2})$ per l'equazione con non linearità cubica (2.36) (relazioni (2.45) e (2.50)-(2.51)). La ragione per cui la rottura avviene a tempi maggiori nel caso cubico rispetto al caso quadratico si spiega come segue: il termine responsabile della rottura è la non linearità che, nel caso cubico, è $u^2 u_x$. Elevare a potenza un dato < 1 equivale a renderlo ancora più piccolo, quindi si deve attendere un tempo più lungo affinché la non linearità prenda il sopravvento provocando rottura.

2.1.4 Condizione di rottura

Guardando i grafici delle caratteristiche degli esempi studiati fin qui, si nota che l'intersezione delle rette avviene quando la loro pendenza varia nel modo

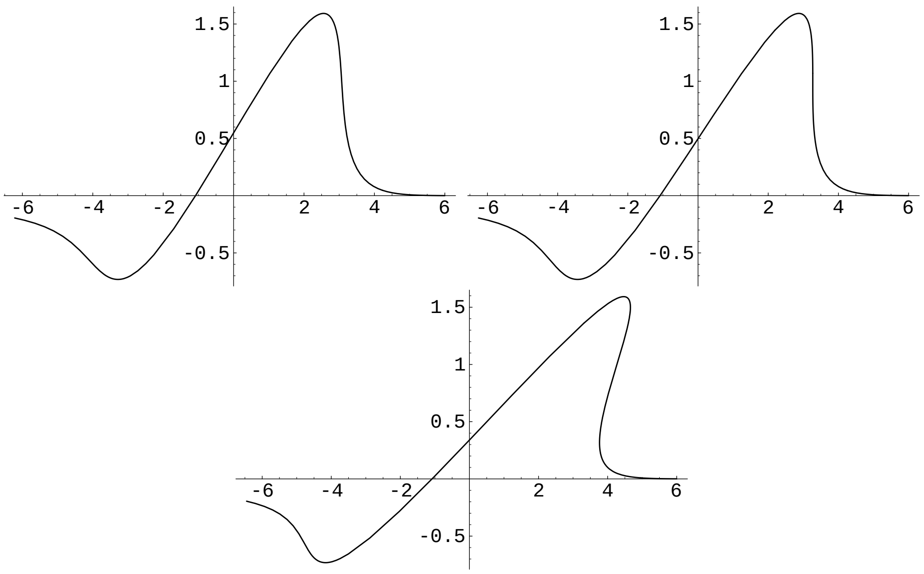

Figura 2.13: Immagini consecutive dell'evoluzione del dato iniziale (2.39), per $t = t_b - 0.2$, $t = t_b$ e $t = t_b + 1$.

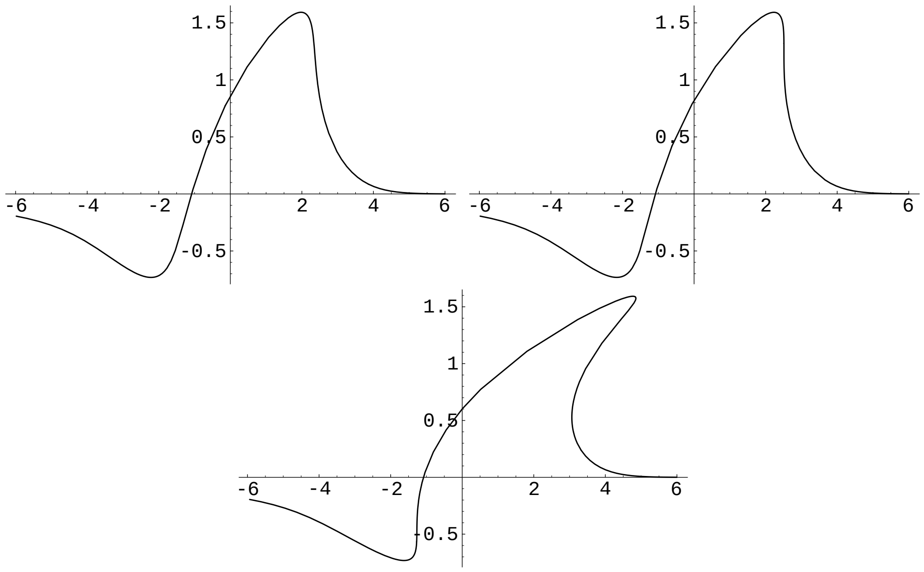

Figura 2.14: Immagini consecutive del'evoluzione del dato iniziale (2.39), per $t = t_b - 0.1$, $t = t_b$ e $t = t_b + 1$.

opportuno. Ad esempio in Figura 2.3 inizialmente la pendenza diminuisce ed esse non si intersecano. E' all'aumentare della pendenza, cioè all'aumentare della quantità $\mathrm{d}t/\mathrm{d}x$ che si verifica intersezione e quindi la rottura del profilo dell'onda.

Volendo dedurre una condizione di validità generale, si ha rottura se all'aumentare di x aumenta la quantità $\mathrm{d}t/\mathrm{d}x$. Quest'ultima non è altro che l'inverso della velocità $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = c(u)$, come definisce la (2.8). Quindi all'aumentare di x la velocità $c(u)$ di propagazione dell'onda deve diminuire.

2.2 Regolarizzazione

La presenza di una polidromia può costituire un problema ai fini dell'interpretazione fisica della soluzione, a seconda della grandezza fisica che l'incognita u individua. Nel caso in cui l'equazione stia descrivendo il profilo di un'onda d'acqua, una soluzione a tre valori può aver senso e di fatto ha senso, come il frangersi delle onde marine [9]. Altrimenti una polidromia non può essere accettata in quanto costituisce un'ambiguità.

Per risolvere questa situazione si adottano alcune strategie, come

- eliminare la polidromia sostituendola con una discontinuità di salto, costruendo quella che è nota come **onda d'urto**; di questo si parla nel paragrafo 2.2.1;

- considerare la (2.7) non sufficientemente precisa per descrivere la situazione fisica in esame. Ciò vuol dire che si deve valutare più attentamente il fenomeno fisico e modificare la (2.7) nel modo opportuno. Ad esempio valutare la presenza di **dispersione** e **dissipazione** che, se non trascurabili, devono essere prese in considerazione. I termini di dispersione[2], proporzionali ad esempio a u_{xxx}, o dissipazione, proporzionali a u_{xx}, di fatto si oppongono alla non linearità uu_x, impedendo

[2]Le equazioni dispersive lineari rappresentano una classe di equazioni che ammettono soluzioni del tipo

$$u = a\cos(kx - \omega t), \tag{2.54}$$

in cui a è l'ampiezza e la frequenza ω è una funzione reale dipendente dal numero d'onda k, cioè $\omega = \omega(k)$. La relazione $\omega = \omega(k)$ viene detta *relazione di dispersione* ed è determinata dal sistema.

La velocità di fase è data da $\omega(k)/k$ e le onde sono dette **dispersive** se la loro velocità di fase non è costante ma dipende da k. Il motivo per cui onde di questo tipo vengono definite 'dispersive' è il seguente. Una soluzione più generale della (2.54) è costituita da una sovrapposizione di differenti modi di forma (2.54) con diversi k. Se la velocità di fase ω/k non è la stessa per ogni k, cioè $\omega \neq c_0 k$ con c_0 costante, modi con diverso numero d'onda si propagano con differenti velocità, disperdendosi.

la rottura dell'onda. Il tema della regolarizzazione dissipativa verrà trattato nel paragrafo 2.2.2, introducendo anche l'equazione di Burger come caso particolare.

In questo lavoro non verrà trattata, invece, la regolarizzazione dispersiva. Tuttavia è giusto spendere qualche parola a proposito, in quanto aggiungere un termine dispersivo porta ad esempio a considerare l'equazione

$$u_t + uu_x + \delta^2 u_{xxx} = 0, \tag{2.55}$$

nota come l'equazione di *Korteweg-de Vries* (KdV) [10, 11, 12, 13, 14, 15, 16]. Questa famosa equazione è rilevante in diversi contesti fisici quali la fisica delle onde d'acqua, la fisica del plasma, la teoria dei circuiti elettrici etc [15, 17] ed è integrabile con il metodo della Trasformata Spettrale Inversa (IST) [18]. Zabusky e Kruskal hanno verificato in [17] che la presenza del termine dispersivo $\delta^2 u_{xxx}$ per piccoli δ impedisce la rottura: inizialmente i termini $u_t + uu_x$ sono dominanti e producono un profilo d'onda sempre più ripido ma, proprio quando il profilo tende a rompersi, il termine dispersivo, non più trascurabile, porta alla formazione di oscillazioni in luogo della rottura. Questo tipo di **regolarizzazione dispersiva** è stato studiato in diversi lavori, anche recenti [19, 20, 21, 22, 23, 24].

2.2.1 Onde d'urto

Un modo per eliminare la polidromia della soluzione dell'equazione di Riemann è quello di accettare una discontinuità di salto e costruire la cosiddetta *onda d'urto*: si forma così una soluzione a gradino la cui discontinuità sostituisce la regione a più valori.

La domanda da porsi è dove dislocare la discontinuità, secondo quale criterio scegliere il punto del salto.

A questo proposito è fondamentale notare che la (2.7) si ricava a partire dalla legge di continuità

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \tag{2.56}$$

in cui tra la densità u ed il flusso q esiste una relazione del tipo

$$q = Q(u) \tag{2.57}$$

e definendo

$$c(u) = Q'(u). \tag{2.58}$$

Quindi, un'equazione è dispersiva se ammette soluzioni nella forma (2.54) con $\omega''(k) \neq 0$ (per escludere il caso $\omega = c_0 k$).

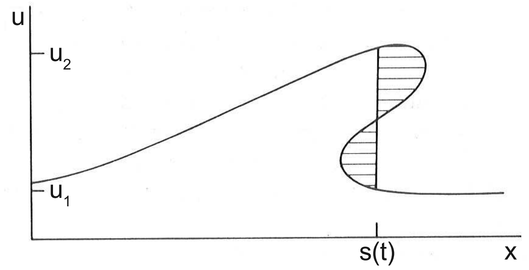

Figura 2.15: La discontinuità taglia la zona di polidromia individuando due lobi di ugual area.

La (2.56) deriva a sua volta dalla relazione

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{x_2}^{x_1} u(x,t)\mathrm{d}x + q(x_1,t) - q(x_2,t) = 0, \tag{2.59}$$

che esprime il bilanciamento tra le variazioni della grandezza u in una sezione $x_2 < x < x_1$ ed il flusso q attraverso x_1 e x_2. Se u possiede derivate continue, nel limite $x_1 \to x_2$ si ottiene la (2.56). Se, invece, l'onda è discontinua, come nel caso dell'onda d'urto, è necessario considerare la (2.59).

Se u rappresenta una densità, bisogna fare in modo che l'area sottesa dai grafici delle due soluzioni, una continua ma polidroma, l'altra discontinua ma monodroma, sia la stessa, dimodoché venga conservata la quantità $\int u\mathrm{d}x$: la discontinuità deve individuare allora due lobi di ugual area [1, 15] come in Figura 2.15.

Si supponga che la discontinuità si trovi in un punto $x = s(t)$ dell'intervallo $x \in [x_2, x_1]$ e che esistano e siano finiti i limiti per $x \to s^{\pm}(t)$. La (2.59) si scrive, dunque, nel seguente modo

$$\begin{aligned} q(x_2,t) - q(x_1,t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int_{x_2}^{s(t)} u(x,t)\mathrm{d}x + \int_{s(t)}^{x_1} u(x,t)\mathrm{d}x\right) = \\ &= u(s^-,t)\dot{s} - u(s^+,t)\dot{s} + \int_{x_2}^{s(t)} u_t(x,t)\mathrm{d}x + \int_{s(t)}^{x_1} u_t(x,t)\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{2.60}$$

Nel limite $x_2 \to s^-$ e $x_1 \to s^+$ gli integrali nella relazione precedente tendono a zero (perchè gli integrandi sono limitati) e si ottiene per la velocità $\dot{s}$ dello shock

$$\dot{s} = \frac{q_2 - q_1}{u_2 - u_1}$$

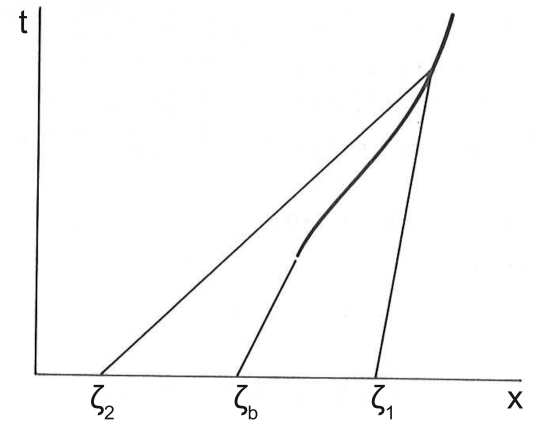

Figura 2.16: Nel piano (x,t) la discontinuità unisce le caratteristiche individuate dai parametri ζ_2 , ζ_1, eliminando la zona di polidromia.

in cui il pedice 2 indica i valori delle funzioni dietro lo shock e il pedice 1 davanti. Ricordando la (2.57) si arriva all'espressione

$$\dot{s} = \frac{Q(u_2) - Q(u_1)}{u_2 - u_1}, \tag{2.61}$$

con

$$u = f(\zeta), \qquad q = Q(f(\zeta)) \qquad Q'(u) = c(u) = c(f(\zeta)) = F(\zeta) \tag{2.62}$$

funzioni del parametro caratteristico ζ.

La discontinuità taglia la zona di polidromia intercettando il profilo d'onda (Figura 2.15). Costruendo la soluzione di shock si elimina la zona del profilo d'onda compresa tra i valori ζ_2 e ζ_1, i parametri caratteristici rispettivamente prima e dopo lo shock. Nel piano (x,t) la discontinuità unisce le caratteristiche individuate da $\zeta = \zeta_2$ e $\zeta = \zeta_1$ (Figura 2.16) e dalla (2.14) si ha

$$s = \zeta_1 + F(\zeta_1)t = \zeta_2 + F(\zeta_2)t \tag{2.63}$$

dove s è la posizione dello shock.

Il sistema costituito dalle (2.61), (2.63)

$$\dot{s} = \frac{Q(f(\zeta_2)) - Q(f(\zeta_1))}{f(\zeta_2) - f(\zeta_1)}, \tag{2.64}$$

$$s = \zeta_2 + F(\zeta_2)t \tag{2.65}$$

$$s = \zeta_1 + F(\zeta_1)t \tag{2.66}$$

è un sistema di tre equazioni per le tre incognite $s(t), \zeta_1(t)$ e $\zeta_2(t)$: risolvendo le (2.65), (2.66) per $\zeta_{1,2}$, ottenendo quindi $\zeta_{1,2} = \zeta_{1,2}(s,t)$, e sostituendo quanto ottenuto nella (2.64), si determina la posizione $s(t)$ della discontinuità, e, quindi, anche $\zeta_1(t)$ e $\zeta_2(t)$, per $t > t_b$, partendo dalla condizione iniziale

$$s(t_b) = x_b \tag{2.67}$$

$$\zeta_2(t_b) = \zeta_1(t_b) = \zeta_b. \tag{2.68}$$

Per $t > t_b$ la soluzione è quindi

$$\begin{cases} x = \zeta_2 + F(\zeta_2)t \\ u = f(\zeta_2) \end{cases} \qquad \text{se } x < s(t) \qquad \zeta < \zeta_2 \tag{2.69}$$

$$\begin{cases} x = \zeta_1 + F(\zeta_1)t \\ u = f(\zeta_1) \end{cases} \qquad \text{se } x > s(t) \qquad \zeta > \zeta_1. \tag{2.70}$$

Onda d'urto per $Q(u)$ quadratica

Si consideri il caso particolare in cui $Q(u)$ è una funzione quadratica di u

$$Q(u) = au^2 + bu + c. \tag{2.71}$$

Questa condizione è di validità non generale, tuttavia di interesse in quanto una $Q(u)$ che sia almeno C^2 si può scrivere come

$$Q \sim Q(u_0) + Q'(u_0)(u - u_0) + \frac{1}{2}Q''(u_0)(u - u_0)^2$$

per piccole perturbazioni attorno a u_0. In alcuni casi come gli shock deboli questa approssimazione è valida. Inoltre quanto verrà illustrato sarà utile in seguito, a proposito della regolarizzazione dissipativa.

Se $Q(u)$ è definita dalla (2.71), la velocità $c(u)$ dell'onda è

$$c(u) = Q'(u) = 2au + b \tag{2.72}$$

e la velocità (2.61) dello shock

$$\dot{s} = U = \frac{1}{2}(c_1 + c_2), \tag{2.73}$$

in cui $c_1 = c(u_1)$ e $c_2 = c(u_2)$. In questo caso l'intero problema può essere formulato in funzione di c: la soluzione (2.14), (2.16) si scrive come

$$x = \zeta + F(\zeta)t, \qquad F(\zeta) = c(f(\zeta)) \tag{2.74}$$

$$c = F(\zeta), \tag{2.75}$$

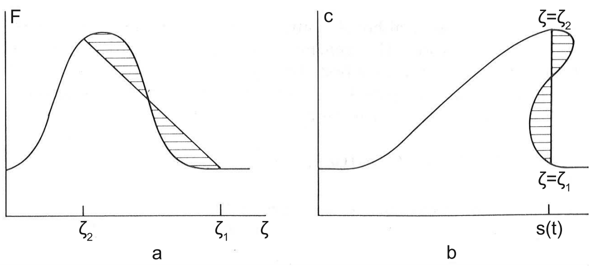

Figura 2.17: Onda di shock per $Q(u)$ quadratica.

e la velocità dello shock (2.73) assume la forma

$$U = \frac{1}{2}\left(F(\zeta_1) + F(\zeta_2)\right). \tag{2.76}$$

L'equazione differenziale che definisce c è

$$c_t + cc_x = 0 \tag{2.77}$$

e l'equazione di continuità

$$c_t + \left(\frac{1}{2}c^2\right)_x = 0. \tag{2.78}$$

Il valore $x = s(t)$ in cui posizionare lo shock è determinato dalla richiesta che la discontinuità tagli la zona di polidromia individuando lobi di ugual area, cioè che l'area sottesa dai grafici della soluzione continua ma polidroma e discontinua ma non polidroma sia la stessa (Figura 2.17 b)).

Poiché, nel caso quadratico, questa condizione vale anche a ritroso nel tempo (la velocità è lineare in c) e, quindi, al tempo $t = 0$, essa si traduce analiticamente nell'equazione

$$\frac{1}{2}\left[F(\zeta_1) + F(\zeta_2)\right](\zeta_1 - \zeta_2) = \int_{\zeta_2}^{\zeta_1} F(\zeta')\mathrm{d}\zeta', \tag{2.79}$$

(Figura 2.17 a).

La relazione precedente e le

$$s(t) = \zeta_2 + F(\zeta_2)t$$
$$s(t) = \zeta_1 + F(\zeta_1)t$$

compongono il sistema di tre equazioni nelle tre incognite $\zeta_1(t), \zeta_2(t)$ e $s(t)$ in grado di determinare, insieme alle condizioni iniziali (2.67), (2.68), la soluzione del problema. Risolvendo per ζ_1, ζ_2 le ultime due relazioni e sostituendo i risultati ottenuti nella (2.79) si ottiene la posizione $s(t)$ dello shock.

Condizione di rottura

Nel paragrafo 2.1.4 è stata enunciata la condizione necessaria per la rottura di un'onda, ovvero che la sua velocità di propagazione diminuisca all'aumentare di x. Lo stesso vale per un'onda d'urto. Detti c_2, c_1 i valori delle velocità dietro e davanti lo shock rispettivamente, la condizione cui deve soddisfare la velocità U dello shock è

$$c_2 > U > c_1. \tag{2.80}$$

2.2.2 Dissipazione

Un altro modo per affrontare il problema della polidromia è di mettere in discussione la validità della (2.57), ad esempio considerando q dipendente non solo da u ma anche dal suo gradiente,

$$q = Q(u) - \nu u_x, \tag{2.81}$$

con $\nu > 0$ e costante. In questo modo, dalla relazione di continuità (2.56) si ottiene

$$u_t + c(u)u_x = \nu u_{xx}, \qquad c(u) = Q'(u) \tag{2.82}$$

in cui accanto alla non linearità compare il termine dissipativo νu_{xx}[3]. Questo termine è tipico dell'equazione del calore

$$u_t = \nu u_{xx} \tag{2.86}$$

[3]La natura dissipativa del termine u_{xx} si può spiegare nel seguente modo.
Moltiplicando la (2.82) per u, si ottiene l'equazione

$$uu_t + uc(u)u_x = \nu uu_{xx}, \tag{2.83}$$

che, integrando sull'asse reale, può essere scritta come

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{-\infty}^{+\infty} u^2 \mathrm{d}x + \int_{-\infty}^{+\infty} (V(u))_x \, \mathrm{d}x = \nu \int_{-\infty}^{+\infty} uu_{xx}\mathrm{d}x, \tag{2.84}$$

dove $V'(u) = u\,c(u)$. Richiedendo che u e u_x appartengano ad esempio alla classe L_2, il secondo integrale nella (2.84) è nullo, mentre l'integrale al secondo membro si può scrivere come

$$\nu \int_{-\infty}^{+\infty} uu_{xx}\mathrm{d}x = -\nu \int_{-\infty}^{+\infty} u_x^2 \mathrm{d}x$$

tramite integrazione per parti. Si giunge dunque all'equazione

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{-\infty}^{+\infty} u^2 \mathrm{d}x = -\nu \int_{-\infty}^{+\infty} u_x^2 \mathrm{d}x < 0. \tag{2.85}$$

Interpretando la quantità del membro di sinistra come un'energia, la (2.85) esprime come questa decresca nel tempo, mostrando la natura dissipativa del termine u_{xx}.

che possiede soluzioni continue.

Introducendo il termine dissipativo nell'equazione di Riemann $u_t+c(u)u_x = 0$, si impedisce la formazione della discontinuità causata dalla non linearità. Infatti il termine νu_{xx}, legato alla concavità del profilo, rallenta il lobo più veloce ed accelera quello più lento (avente concavità opposta), impedendo la rottura.

Di particolare interesse è il caso di $Q(u)$ quadratica in u. Moltiplicando la (2.82) per $c'(u)$, si ottiene l'equazione

$$c_t + cc_x = \nu c'(u)u_{xx} = \nu c_{xx} - \nu c''(u)u_x^2. \tag{2.87}$$

Se $Q(u)$ è quadratica, $c''(u) = 0$ (infatti $c(u) = Q'(u)$) e l'espressione precedente si scrive come

$$c_t + cc_x = \nu c_{xx}. \tag{2.88}$$

Questa è nota come **equazione di Burgers**.

L'interesse per l'equazione di Burgers scaturisce da diversi aspetti: è la più semplice equazione che coniuga la non linearità alla dissipazione, è esattamente risolubile, ha una soluzione continua che per $\nu \to 0$ tende alla soluzione a gradino dell'equazione di Riemann-Hopf.

L'equazione di Burgers

L'equazione di Burgers [25, 26, 1]

$$c_t + cc_x = \nu c_{xx}, \tag{2.89}$$

è un'equazione non lineare che rientra nella classe di equazioni C-integrabili [27, 28], cioè equazioni trasformate in equazioni lineari mediante un cambio di variabili.

Per questa equazione il cambio di variabili è la trasformazione non lineare nota come *trasformazione di Cole-Hopf* [25, 26, 1, 15, 28]

$$c = -2\nu\frac{\phi_x}{\phi}, \tag{2.90}$$

grazie alla quale la (2.89) si riduce a

$$\phi_t = \nu\phi_{xx}, \tag{2.91}$$

ovvero all'equazione del calore per la variabile ϕ.

Si consideri la condizione iniziale

$$c = F(x), \qquad t = 0.$$

La (2.90) traduce questa condizione iniziale nella condizione iniziale per la variabile ϕ

$$\phi = \Phi(x) = exp\left[-\frac{1}{2\nu}\int_0^x F(\xi)\mathrm{d}\xi\right], \qquad t = 0. \tag{2.92}$$

Dato quindi il problema di Cauchy nell'incognita ϕ

$$\begin{aligned} \phi_t &= \nu\phi_{xx} \\ \phi(x,0) &= \Phi(x), \end{aligned}$$

questo ha come soluzione [3]

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{4\pi\nu t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi(\xi)\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4\nu t}\right]\mathrm{d}\xi. \tag{2.93}$$

Dalla (2.90) si ricava la soluzione per c nella forma

$$c(x,t) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x-\xi}{t}e^{-H/2\nu}\mathrm{d}\xi}{\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-H/2\nu}\mathrm{d}\xi} \tag{2.94}$$

dove

$$H(\xi,x,t) = \int_0^\xi F(\xi')\mathrm{d}\xi' + \frac{(x-\xi)^2}{2t}. \tag{2.95}$$

Comportamento per $\nu \to 0$

Nel limite $\nu \to 0$ l'equazione di Burgers (2.89) tende all'equazione di Hopf (2.28). Si vuole dimostrare che in questo limite anche la soluzione (2.94) della (2.89) tende alla soluzione della (2.7) data dalle (2.64)-(2.70), per $c(u) = u$.

Si consideri $\nu \to 0$ tenendo fissati x, t. In questo limite i contributi rilevanti per gli integrali della (2.94) provengono dagli intorni dei punti stazionari. Si supponga che esista un solo punto stazionario $\zeta = \zeta(x,t)$. In tale punto si ha

$$\frac{\partial H}{\partial \zeta} = F(\zeta) - \frac{x-\zeta}{t} = 0 \tag{2.96}$$

per la definizione stessa di punto stazionario. Gli integrali sono risolubili con il metodo di Laplace (si veda l'appendice B) e si ottiene

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x-\xi}{t}e^{-H/2\nu}\mathrm{d}\xi \sim \frac{x-\zeta}{t}\sqrt{\frac{4\pi\nu}{H''(\zeta)}}e^{-H(\zeta)/2\nu}, \tag{2.97}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-H/2\nu}\mathrm{d}\xi \sim \sqrt{\frac{4\pi\nu}{H''(\zeta)}}e^{-H(\zeta)/2\nu}. \tag{2.98}$$

Quindi la soluzione (2.94) assume la forma

$$c \sim \frac{x-\zeta}{t}. \tag{2.99}$$

Utilizzando la (2.96) la soluzione asintotica è descritta dalle

$$c = F(\zeta) \tag{2.100}$$

$$x = \zeta + F(\zeta)t. \tag{2.101}$$

Come si nota, la soluzione coincide con la soluzione di Riemann (2.14), (2.16), ma non con la soluzione ad onda d'urto. Ciò è dovuto al fatto che, nel calcolare gli integrali (2.97), (2.98), si è ipotizzata l'esistenza di un solo punto stazionario. Se invece i punti stazionari fossero due, ζ_1 e ζ_2, ci sarebbero due contributi per ognuno degli integrali (2.97), (2.98) per cui la soluzione avrebbe la forma

$$c \sim \frac{\frac{x-\zeta_1}{t}\left(H''(\zeta_1)\right)^{-1/2} e^{-H(\zeta_1)/2\nu} + \frac{x-\zeta_2}{t}\left(H''(\zeta_2)\right)^{-1/2} e^{-H(\zeta_2)/2\nu}}{\left(H''(\zeta_1)\right)^{-1/2} e^{-H(\zeta_1)/2\nu} + \left(H''(\zeta_2)\right)^{-1/2} e^{-H(\zeta_2)/2\nu}}. \tag{2.102}$$

Se $H(\zeta_1) \neq H(\zeta_2)$ il limite $\nu \to 0$ rende prevalente il contributo relativo all'uno o all'altro punto stazionario. Se $H(\zeta_1) < H(\zeta_2)$ si ha $e^{-H(\zeta_1)/2\nu} > e^{-H(\zeta_2)/2\nu}$ e la soluzione è

$$c \sim \frac{x-\zeta_1}{t}. \tag{2.103}$$

Viceversa, se $H(\zeta_1) > H(\zeta_2)$ si ha $e^{-H(\zeta_1)/2\nu} < e^{-H(\zeta_2)/2\nu}$ e la soluzione è

$$c \sim \frac{x-\zeta_2}{t}. \tag{2.104}$$

Quindi in questi casi vale la (2.100), (2.101) con $\zeta = \zeta_1$ nel primo caso e $\zeta = \zeta_2$ nel secondo.

Cosa accade infine se $H(\zeta_1) = H(\zeta_2)$? In questo caso

$$\int_0^{\zeta_2} F(\xi')\mathrm{d}\xi' + \frac{(x-\zeta_2)^2}{2t} = \int_0^{\zeta_1} F(\xi')\mathrm{d}\xi' + \frac{(x-\zeta_1)^2}{2t} \tag{2.105}$$

come segue dalla (2.95). Ponendo $\zeta_1 > \zeta_2$ ed utilizzando la (2.96), la relazione precedente assume la forma

$$\frac{1}{2}\left[F(\zeta_1) + F(\zeta_2)\right](\zeta_1 - \zeta_2) = \int_{\zeta_2}^{\zeta_1} F(\xi')\mathrm{d}\xi'. \tag{2.106}$$

Ma questa è proprio la condizione (2.79) che permette di determinare lo shock nel caso di $Q(u)$ quadratica. Si conclude quindi che **nel limite $\nu \to 0$, quando l'equazione di Burgers $c_t + cc_x = \nu c_{xx}$ tende all'equazione (2.77) $c_t + cc_x = 0$, la soluzione dell'equazione di Burgers tende alla soluzione discontinua dell'equazione di Hopf $c_t + cc_x = 0$.**

2.3 L'equazione dKP

Finora è stato sviluppato l'argomento della rottura delle onde prendendo in considerazione l'equazione di Riemann

$$u_t + c(u)u_x = 0, \tag{2.107}$$

equazione $1 + 1$-dimensionale. Se invece il sistema fisico fosse tale da non poter trascurare ciò che avviene lungo la coordinata trasversa y, la (2.107) non sarebbe più una valida equazione modello. Ad esempio, la presenza di un canale di diffrazione lungo la direzione y conduce ad un'altra delle equazioni fondamentali della fisica matematica, che va sotto il nome di *equazione di Kadomtsev-Petviashvili senza dispersione*, la cui forma è

$$\begin{gathered} (u_t + uu_x)_x + u_{yy} = 0, \\ u = u(x, y, t) \in \mathbb{R}, \qquad x, y, t \in \mathbb{R}. \end{gathered} \tag{2.108}$$

L'equazione di Kadomtsev-Petviashvili senza dispersione, che d'ora in avanti sarà indicata con dKP, è un'equazione alle derivate parziali (PDE) in $2 + 1$ dimensioni e costituisce un modello matematico utile per la descrizione di onde **debolmente non lineari e quasi unidimensionali** in $2 + 1$ dimensioni, in assenza di dispersione e dissipazione [39].

Il termine 'quasi unidimensionalità' significa che, nei fenomeni descritti, le variazioni delle grandezze in gioco sono maggiori lungo la direzione di propagazione dell'onda, indicata con x, rispetto alle variazioni nella direzione perpendicolare y.

La dKP è il limite di dispersione nulla dell'equazione di Kadomtsev-Petviashvili (KP) [36, 13, 16]

$$(u_t + uu_x + u_{xxx})_x + \sigma^2 u_{yy} = 0 \qquad \sigma^2 = \pm 1, \tag{2.109}$$

che descrive la propagazione di onde debolmente non lineari e quasi unidimensionali, sotto le ipotesi

- che la teoria linearizzata è descritta dall'equazione delle onde, almeno in qualche approssimazione;

- che la dissipazione è trascurabile mentre la dispersione nella direzione principale di propagazione è piccola, ma non trascurabile.

Essa trova applicazioni, ad esempio, in fisica del plasma [36] ed in idrodinamica [16]. L'equazione KP è inoltre integrabile [13, 16] attraverso una generalizzazione del metodo della Trasformata Spettrale Inversa, introdotto in [18] per risolvere la KdV.

La dKP si può utilizzare quindi in questi fenomeni laddove la dispersione lungo la direzione x sia trascurabile.

Si consideri una situazione fisica ben descritta dalla dKP. Se ci si trova nel limite in cui il termine u_{yy} è trascurabile, la dKP si riduce all'equazione di Hopf

$$u_t + uu_x = 0, \tag{2.110}$$

le cui soluzioni vanno incontro a rottura.

E' quindi naturale domandarsi se le soluzioni della dKP possano rompersi.

Questo punto è stato studiato in diversi lavori [29, 30, 31, 39]. In particolare

- in [29] si è risolto il problema di Cauchy per l'equazione dKP, presentata come condizione di commutazione di campi vettoriali, tramite una nuova trasformata spettrale inversa per campi vettoriali [32, 33] che generalizza in modo significativo la trasformata spettrale delle equazioni solitoniche del tipo KdV e KP;

- in [30] si risponde affermativamente alla domanda se avviene rottura per le soluzioni del problema di Cauchy per la dKP, chiarendo che la rottura avviene in tempi finiti per dati iniziali localizzati ed a tempi lunghi per dati iniziali localizzati ma piccoli, studiando nel dettaglio il modo in cui avviene quest'ultima rottura;

- in [39] si costruiscono soluzioni particolari dell'equazione dKP_n

$$(u_t + uu_x)_x + \triangle_\perp u = 0, \tag{2.111}$$
$$\triangle_\perp = \sum_{i=1}^{n-1} \partial^2_{y_i},$$

  e se ne risolve il problema di Cauchy per piccoli dati iniziali, chiarendo per quali valori di n si ha il fenomeno della rottura.

Questi risultati vengono brevemente esposti nella restante parte di questo capitolo.

2.3.1 La rottura per l'equazione dKP

Lo scopo di questo paragrafo è quello di ampliare il discorso sulla rottura delle onde, introducendo la rottura in dimensioni maggiori di $1 + 1$ attraverso ciò che accade per le soluzioni della dKP.

Si farà riferimento ai risultati ottenuti in [29, 30, 32, 33] a proposito dell'equazione dKP e del problema della rottura delle sue soluzioni, riassumendo gli aspetti centrali nell'ambito della rottura ed introducendo solo dove strettamente necessario nozioni che esulano dagli interessi primari del presente lavoro e che infatti non verranno utilizzati in questa tesi. Il riferimento è al problema di Riemann-Hilbert, che è di primaria importanza nella determinazione della soluzione della dKP ma che non viene utilizzato in questa tesi. Tuttavia, non sarebbe corretto non farne menzione ma si rimanda a [29, 30] per una esposizione più diffusa ed all'appendice C per una teoria di base del problema RH.

L'equazione dKP (2.108) è un'equazione che descrive fenomeni debolmente non lineari e quasi unidimensionali in assenza di dispersione e dissipazione in $2+1$ dimensioni (si veda il capitolo 3). Si ottiene come condizione di commutazione

$$\left[\hat{L}_1, \hat{L}_2\right] = 0 \tag{2.112}$$

tra i due campi vettoriali[4] $\hat{L}_1$ e $\hat{L}_2$ di forma

$$\hat{L}_1 = \partial_y + \lambda\partial_x - u_x\partial_\lambda, \tag{2.113}$$

$$\hat{L}_2 = \partial_t + (\lambda^2 + u)\partial_x + (-\lambda u_x + u_y)\partial_\lambda, \tag{2.114}$$

in cui $\lambda \in \mathbb{C}$ è il parametro spettrale. Il metodo della Trasformata Spettrale Inversa per campi vettoriali, recentemente introdotta in [32, 33, 34], permette di costruire la soluzione in forma implicita; in particolare, la soluzione al problema di Cauchy si ottiene mediante la formulazione di un problema di Riemann-Hilbert non lineare sull'asse reale

$$\vec{\pi}^+(\lambda) = \vec{\mathcal{R}}(\vec{\pi}^-(\lambda)), \qquad \lambda \in \mathbb{R} \tag{2.115}$$

in cui $\vec{\pi}^\pm(\lambda) = (\pi_1^\pm(\lambda), \pi_2^\pm(\lambda)) \in \mathbb{C}^2$ sono funzioni vettoriali in due dimensioni analitiche nelle metà superiore ed inferiore del piano complesso λ, con normalizzazione

$$\vec{\pi}^\pm(\lambda) = \begin{pmatrix} -\lambda^2 t - \lambda y + x - 2ut \\ \lambda \end{pmatrix} + \vec{O}(\lambda^{-1}), \qquad |\lambda| \gg 1, \tag{2.116}$$

[4]Un campo vettoriale di dimensione n è un operatore alle derivate parziali del primo ordine, a coefficienti scalari $c_j(\vec{x})$ del tipo

$$\hat{L} = \sum_{j=1}^{n+1} c_j(\vec{x}) \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

dove

$$u = \lim_{\lambda\to\infty}[\lambda(\pi_2^{\pm}(\lambda) - \lambda)]; \tag{2.117}$$

i dati spettrali $\vec{\mathcal{R}} = (\mathcal{R}_1(\zeta_1,\zeta_2), \mathcal{R}_1(\zeta_1,\zeta_2)) \in \mathbb{C}^2$, $\vec{\zeta} \in \mathbb{C}^2$ sono differenziabili e soddisfano le seguenti condizioni

- condizione di realtà: $\vec{\mathcal{R}}(\overline{\vec{\mathcal{R}}(\bar{\vec{\zeta}})}) = \vec{\zeta}, \qquad \forall \vec{\zeta} \in \mathbb{C}^2$,
- condizione hamiltoniana: $\{\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2\}_{\vec{\zeta}} = \mathcal{R}_{1_{\zeta_1}}\mathcal{R}_{2_{\zeta_2}} - \mathcal{R}_{1_{\zeta_2}}\mathcal{R}_{2_{\zeta_1}} = 1.$

Rimandando per i dettagli a [30], la soluzione u della dKP è data implicitamente dalla

$$u = F(x - 2ut, y, t) \in \mathbb{R}, \tag{2.118}$$

dove la funzione spettrale

$$\begin{aligned} F(\xi, y, t) &= -\frac{1}{2\pi\imath}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}\lambda R_2\left(\pi_1^-(\lambda;\xi,y,t), \pi_2^-(\lambda;\xi,y,t)\right), \\ \mathcal{R}_j(\zeta_1,\zeta_2) &= \zeta_j + R_j(\zeta_1,\zeta_2), \qquad j = 1,2, \end{aligned} \tag{2.119}$$

è in relazione con il dato iniziale $u(x,y,0)$ attraverso la trasformata spettrale diretta secondo quanto esposto in [29]. **La dipendenza della soluzione u da u stessa, nella forma (2.118), è analoga alla soluzione $u = f(x-ut)$ dell'equazione di Hopf, ed è il meccanismo che provoca la rottura di un dato iniziale localizzato ad un tempo finito t_b.**

Se il dato iniziale è piccolo, il problema di Cauchy mostra che la rottura avviene ugualmente, ma a tempi lunghi: dallo studio della soluzione della dKP a tempi lunghi ($t \gg 1$), nella regione

$$x = \xi + v_1 t, \qquad y = v_2 t, \qquad \xi - 2ut, v_1, v_2 = O(1), \quad v_2 \neq 0 \tag{2.120}$$

si evince che la soluzione si concentra sulla parabola

$$x + \frac{y^2}{4t} = \xi, \tag{2.121}$$

dove si verifica la rottura e dove è $O(1/\sqrt{t})$, decadendo più rapidamente di $1/\sqrt{t}$ al di fuori della parabola [30].

2.3.2 La rottura per l'equazione dKP in $n+1$ dimensioni

L'equazione di Kadomtsev-Petviashvili senza dispersione in $n+1$ dimensioni (dKP_n)

$$(u_t + uu_x)_x + \triangle_\perp u = 0, \tag{2.122}$$

$$\triangle_{\perp} = \sum_{i=1}^{n-1} \partial_{y_i}^2$$

nell'incognita $u = u(x, \vec{y}, t) \in \mathbb{R}$ per $\vec{y} \in \mathbb{R}^{n-1}$, $n \geq 2$, è la generalizzazione in dimensione $n+1$ della dKP; è stata ottenuta per la prima volta da Timmann [35] per $n = 2$ e poi ricavata da Zabolotskaya e Khoklov [37] per $n = 3$ nell'ambito dell'acustica.

Come nel caso 2 + 1-dimensionale (2.108), l'equazione (2.122) costituisce un modello matematico valido in caso di onde debolmente non lineari e quasi unidimensionali in $n + 1$ dimensioni che, nel limite lineare, si riducono all'equazione delle onde

$$u_{tt} = c^2 \triangle u, \qquad \triangle = \partial_x^2 \sum_{i=1}^{n-1} \partial_{y_i}^2 \tag{2.123}$$

in assenza di dispersione e dissipazione [39].

Anche nel caso della dKP_n è naturale domandarsi se le sue soluzioni vadano incontro a rottura, vista la presenza del termine $u_t + uu_x$ che, come è stato detto, costituisce un prototipo per la descrizione della rottura delle onde, oppure se il termine $\triangle_{\perp} u$ sia sufficiente per impedire la rottura. Questo punto è discusso in [39] e qui si riportano i punti salienti dell'articolo.

L'invarianza dell'equazione dKP_n rispetto al seguente gruppo di trasformazioni di Lie

$$\begin{cases} \tilde{x} &= x + \sum_{i=1}^{n-1} (\delta_i y_i - \delta_i^2 t), \\ \tilde{y}_j &= y_j - 2\delta_j t, \qquad j = 1, \cdots, n-1 \ , \\ \tilde{t} &= t \end{cases} \tag{2.124}$$

(in cui i δ_j sono i parametri arbitrari del gruppo), che lascia invariante il paraboloide

$$\xi = x + \frac{1}{4t} \sum_{i=1}^{n-1} y_i^2, \tag{2.125}$$

permette di costruire la seguente classe di soluzioni esatte

$$u = \begin{cases} t^{-\frac{n-1}{2}} F\left(x + \frac{1}{4t} \sum_{i=1}^{n-1} y_i^2 - \frac{2ut}{3-n}\right) \ n \neq 3 \\ t^{-1} F\left(x + \frac{1}{4t} \sum_{i=1}^{n-1} y_i^2 - ut \ln t\right) \ n = 3 \end{cases} . \tag{2.126}$$

La dipendenza di u da u stessa nella (2.126 fa sì che queste soluzioni vadano incontro a rottura. Queste soluzioni descrivono onde costanti sul fronte d'onda paraboloidale e che si rompono simultaneamente in tutti i punti dello stesso.

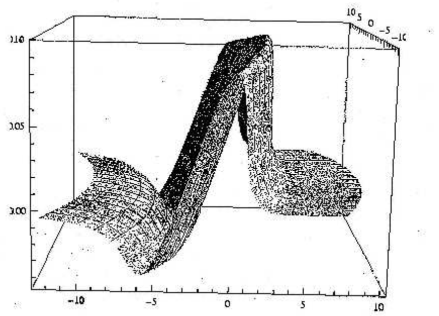

Figura 2.18: Immagine del fronte d'onda parabolico dell'equazione dKP_2 a $t = t_b$ attorno al punto di rottura (x_b, t_b).

Inoltre, utilizzando la (2.126) per costruire una soluzione approssimata al problema di Cauchy per dati iniziali piccoli e localizzati, si mostra che la rottura avviene per questi dati iniziali nel regime di tempi lunghi soltanto per $n = 1, 2, 3$ ed il tempo di rottura aumenta all'aumentare di n. In particolare, per un dato iniziale localizzato che sia $O(\epsilon)$, con $\epsilon \ll 1$, i tempi di rottura sono $O(\epsilon^{-1})$, $O(\epsilon^{-2})$ e $O(e^{\epsilon^{-1}})$ rispettivamente per $n = 1, 2, 3$. Per $n \geq 4$ non si verifica rottura.

La ragione fisica che motiva l'esistenza di una dimensione critica oltre la quale non si verifica rottura è da ritrovare in quanto segue: la non linearità uu_x produce un profilo d'onda che diventa sempre più ripido fino a rompersi nella direzione principale di propagazione, mentre gli $n-1$ canali di diffrazione, rappresentati dal laplaciano $n-1$-dimensionale, hanno un effetto opposto. Ne segue che per una dimensionalità fino a $n = 3$ prevale l'effetto della non linearità, mentre per dimensioni maggiori il numero dei canali di diffrazione trasversi è sufficiente per evitare la rottura, nel regime di dati iniziali piccoli e a tempi lunghi.

Capitolo 3

L'equazione di Kadomtsev-Petviashvili senza dispersione in $n+1$ dimensioni

In questo capitolo si studierà il significato fisico dell'equazione dKP in $n+1$ dimensioni e con non linearità polinomiale arbitraria:

$$(u_t + u^m u_x)_x + \triangle_\perp u = 0 \tag{3.1}$$
$$\triangle_\perp := \sum_{i=1}^{n-1} \partial_{y_i}^2 \quad n \geq 2,$$

che verrà chiamata equazione $dKP_{n,m}$. In particolare, ciò che si vuol fare è

1. **delineare le condizioni che si devono imporre ad un sistema fisico per ricavare la (3.1)**. Un sistema fisico può essere descritto da un'equazione od un sistema di equazioni alle derivate parziali: si vogliono chiarire quali sono le condizioni da imporre a tali equazioni per poter ricavare la (3.1). Ciò vuol dire che se in un'esperimento sono verificate le condizioni che permettono di ottenere la (3.1), quest'equazione può essere utilizzata come modello per descrivere matematicamente i risultati;

2. infine, fornire **esempi di derivazione della (3.1) da ambiti della fisica**: acustica, fisica del plasma, ottica non lineare.

Si comincia considerando un modello matematico che risolve il punto 1 (sezione 3.1); a seguire si propone una casistica di situazioni fisiche in cui ricavare la $dKP_{n,m}$ con diversi gradi di non linearità.

3.1 Derivazione della dKP_n con non linearità arbitraria da un modello matematico

Si consideri l'equazione delle onde non lineare

$$(f(w))_{TT} = \triangle w, \qquad \triangle = \sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i}^2 \tag{3.2}$$

che si vuole studiare nel limite di onde di piccola ampiezza e quasi unidimensionali, dove $f(w)$ è una funzione largamente arbitraria, il pedice T indica la derivazione rispetto al tempo e il vettore posizione $\vec{x}$ è un vettore spaziale n-dimensionale.

Per piccole ampiezze, tali cioè che si possa considerare $w \to \epsilon w$ con ϵ infinitesimo, si ammette per $f(w)$ lo sviluppo in serie

$$f(w) = f(0) + f'(0)\epsilon w + \frac{1}{2} f''(0)\epsilon^2 w^2 + \cdots, \tag{3.3}$$

che inserito nella (3.2) conduce alla

$$\epsilon f'(0) w_{TT} + \epsilon^2 f''(0)(w_T^2 + w w_{TT}) + O(\epsilon^3) = \epsilon \triangle w. \tag{3.4}$$

Uguagliando i termini di ordine ϵ si trova l'equazione lineare

$$f'(0) w_{TT} = \triangle w. \tag{3.5}$$

Se $f'(0) < 0$, si ottiene l'equazione di Laplace, di tipo ellittico. Se $f'(0) > 0$, abbiamo l'equazione delle onde cercata:

$$w_{TT} = c^2 \triangle w \tag{3.6}$$

con velocità

$$c = 1/\sqrt{f'(0)}. \tag{3.7}$$

Cercando soluzioni nella forma di onda monocromatica

$$w \sim \exp\left[\imath(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega T)\right], \tag{3.8}$$

si ottiene la relazione di dispersione

$$\begin{aligned} \omega^2 &= c^2(k_1^2 + k_2^2 + \cdots + k_n^2) = c^2 \vec{k}^2, \\ \vec{k} &= (k_1, k_2, \ldots, k_n). \end{aligned} \tag{3.9}$$

Si restringe ora l'analisi ad onde quasi unidimensionali. Dire che l'onda è quasi unidimensionale vuol dire che le variazioni che avvengono nella direzione di propagazione, diciamo x_1, sono più rapide rispetto a quelle che avvengono perpendicolarmente a x_1 [39]. Conviene quindi separare, nel vettore d'onda $\vec{k}$, la componente k_1 nella direzione di propagazione principale, dal vettore trasverso $\tilde{k}_\perp$ $(n-1)$-dimensionale: $\vec{k} = (k_1, \tilde{k}_\perp)$. Si può quindi porre

$$\tilde{k}_\perp = \epsilon^\alpha k_\perp, \qquad \alpha > 0. \tag{3.10}$$

Dalla relazione di dispersione (3.9) si calcola l'espressione per la frequenza ω

$$\omega = c\sqrt{k_1^2 + \tilde{k}_\perp^2} = ck_1\sqrt{1 + \epsilon^{2\alpha}\frac{k_\perp^2}{k_1^2}} \simeq ck_1\left(1 + \epsilon^{2\alpha}\frac{k_\perp^2}{2k_1^2}\right). \tag{3.11}$$

e si sostituisce quanto ottenuto nella fase della (3.8), ottenendo

$$\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega T = k_1(x_1 - cT) + \epsilon^\alpha \tilde{k}_\perp \cdot \vec{x}_\perp - \frac{c\epsilon^{2\alpha}}{2}\frac{k_\perp^2}{k_1}T. \tag{3.12}$$

Questa relazione suggerisce di considerare il cambio di variabili

$$\begin{cases} x &= x_1 - cT \\ \vec{Y} &= \epsilon^\alpha \vec{x}_\perp \\ t &= \epsilon^{2\alpha} T \end{cases}. \tag{3.13}$$

Il nuovo sistema di riferimento si muove lungo l'asse x_1 con la velocità c di propagazione dell'onda lineare. Di fatto nella direzione x la trasformazione è una trasformazione galileana. Lungo le direzioni individuate da $\vec{Y}$ si osservano invece variazioni di ordine ϵ^α rispetto a quelle che si osservano lungo l'asse x. Lungo l'asse temporale t le variazioni sono su scala $\epsilon^{2\alpha}$. Quindi lungo le coordinate $\vec{Y}$ e t si osservano variazioni su scale molto più lente rispetto a ciò che avviene lungo l'asse x. Questo giustifica il nome di *metodo multiscala* [15, 40, 41, 42, 43] con cui questo procedimento è noto.

Si riscrive adesso l'equazione originale (3.2) nel nuovo sistema di coordinate. Per far questo, è necessario calcolare come si trasformano le derivate:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} &= \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial x_{i+1}} &= \epsilon^\alpha \frac{\partial}{\partial Y_i} \qquad i \geq 1 \\ \frac{\partial}{\partial T} &= -c\frac{\partial}{\partial x} + \epsilon^{2\alpha}\frac{\partial}{\partial t}. \end{aligned} \tag{3.14}$$

L'equazione (3.2) assume quindi la forma

$$\left(-c\partial_x + \epsilon^{2\alpha}\partial_t\right)^2 \left(f(0) + f'(0)\epsilon w + \sum_{k\geq 2} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\epsilon^k w^k \right) =$$
$$= \left(\partial_x^2 + \epsilon^{2\alpha} \sum_{i=1}^{n-1} \partial_{Y_i}^2 \right) \epsilon w. \qquad (3.15)$$

L'espressione contiene termini nei vari ordini di ϵ. Eguagliando membro a membro i termini dello stesso ordine in ϵ si ottiene all'ordine ϵ l'identità

$$w_{xx} = w_{xx}.$$

All'ordine successivo si trovano i termini lineari di ordine $\epsilon^{2\alpha+1}$, cioè $w_{tx} + \sum_{i=1}^{n-1} w_{Y_iY_i}$ ed il termine non lineare $(ww_x)_x$, di ordine ϵ^2. Il criterio del massimo bilancio, principio cardine della teoria delle perturbazioni, è quindi ottenuto imponendo $\alpha = 1/2$, da cui

$$\begin{gathered} \left(w_t + Aww_x\right)_x + B\sum_{i=1}^{n-1} w_{Y_iY_i} = 0, \\ A = -\tfrac{c^3}{2}f''(0), \qquad B = \tfrac{c}{2} \end{gathered} \qquad (3.16)$$

che è l'equazione dKP in dimensione $n+1$

$$\left(u_t + uu_x\right)_x + \triangle_\perp u = 0 \qquad (3.17)$$

attraverso il riscalamento $u = Aw$, $y_i = \sqrt{2/c}\, Y_i$.

Può accadere tuttavia che nello sviluppo in serie della funzione $f(w)$, $f''(0)$ sia nullo: in tal caso si deve considerare lo sviluppo della funzione all'ordine successivo e procedere come prima. Se anche $f'''(0) = 0$, è necessario considerare lo sviluppo della $f(w)$ fino al quarto ordine e così via, ottenendo, nel caso particolare in cui $f^{(l)}(0) = 0$, $l = 2, \dots m$, l'equazione all'ordine $\epsilon^{2\alpha+1}$, con $\alpha = m/2$

$$\left(w_t + Aw^m w_x\right)_x + B\sum_{i=1}^{n-1} w_{Y_iY_i} = 0 \qquad (3.18)$$

dove

$$A := -\frac{c^3}{2}\frac{f^{(m+1)}(0)}{m!}. \qquad (3.19)$$

Riscalando la funzione w in modo tale da scegliere il coefficiente del termine non lineare pari all'unità e le coordinate Y_i in modo che $y_i = \sqrt{2/c}\, Y_i$, si ottiene

$$\left(u_t + u^m u_x\right)_x + \triangle_\perp u = 0 \tag{3.20}$$
$$\triangle_\perp := \sum_{i=1}^{n-1} \partial_{y_i}^2 \quad n \geq 2$$

con $u = A^{1/m} w$ se m è dispari, e

$$\left(u_t + \mathrm{sgn}A \; u^m u_x\right)_x + \triangle_\perp u = 0 \tag{3.21}$$
$$\triangle_\perp := \sum_{i=1}^{n-1} \partial_{y_i}^2 \quad n \geq 2$$

con $u = |A|^{1/m} w$ se m è pari. Le (3.20) e (3.21) sono la generalizzazione naturale della dKP in $n+1$ dimensioni con non linearità di ordine $m+1$.

Riassumendo, la $dKP_{n,m}$ è stata ottenuta a partire dall'equazione alle derivate parziali (3.2)

1. considerando piccole ampiezze, che implicano uno sviluppo perturbativo del tipo (3.3),

2. imponendo che il limite lineare dell'equazione conduca all'equazione delle onde (3.5), che implica la condizione $f'(0) > 0$,

3. restringendo l'analisi ad onde quasi unidimensionali,

4. considerando la possibilità che nello sviluppo (3.3) si annullino i termini $f^{(l)}(0)$, $l = 2, \ldots m$.

Prima di concludere si vuole fare una considerazione sul **grado di universalità** di questo modello matematico. Per ottenere la $dKP_{n,m}$ a partire dalla (3.2) deve accadere che nello sviluppo (3.3) si annullino le derivate $f^{(l)}(0)$ per $l = 2, \ldots m$. Ma l'annullarsi delle derivate fino all'ordine $f^{(m)}(0)$ è una condizione particolare, tanto più particolare quanto maggiore è il valore di m. Ciò significa che **il modello è sempre meno generale all'aumentare di** m. Il massimo grado di universalità si ha se nessuna delle derivate si annulla, caso in cui si ottiene la dKP_n con non linearità quadratica (3.16). Si tornerà su questo punto nel paragrafo 3.2.3.

3.2 L'equazione dKP, equazione modello della fisica-matematica

Nel paragrago 3.1 è stata ottenuta l'equazione $dKP_{n,m}$ a partire dal modello matematico (3.2). Il procedimento seguito illustra i passi da percorrere per dedurre la dKP_n da un'equazione o da un sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali. Inoltre chiarisce le condizioni che un sistema di PDE deve soddisfare per poter ricavare la dKP_n.

Queste condizioni sono [39]:

1. data una PDE od un sistema di PDE, per ottenere la dKP_n con non linearità quadratica devono essere presenti termini non lineari quadratici (ad esempio di tipo idrodinamico) oppure il cui sviluppo in serie di potenze contenga termini quadratici; per ottenere l'equazione dKP_n con non linearità di grado $m+1$ lo sviluppo in serie di potenze del termine non lineare non deve contenere potenze di grado l, con $2 \leq l \leq m$;

2. il limite lineare del sistema di PDE deve ridursi all'equazione delle onde, almeno in qualche approssimazione (ad esempio nel limite di onde lunghe);

3. lo studio deve rivolgersi alle onde quasi unidimensionali, cioè onde tali che le variazioni che avvengono nella direzione di propagazione siano più rapide di quelle che avvengono perpendicolarmente;

4. si devono trascurare la dispersione e la dissipazione.

Nel seguito si studieranno situazioni della fisica in cui è possibile ritrovare ed utilizzare la $dKP_{n,m}$. Si inizierà con l'acustica e la fisica dei plasmi ricavando la dKP_n con non linearità quadratica . Si passerà poi alla derivazione della dKP_n con non linearità quadratica e cubica nel caso di propagazione di onde elettromagnetiche in dielettrici.

3.2.1 Acustica

Le equazioni che descrivono un'onda acustica propagantesi in un fluido di densità ρ sono [44], [45]

$$\rho_{t'} + \nabla_{\vec{x}} \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \tag{3.22}$$

$$\vec{v}_{t'} + (\vec{v} \cdot \nabla_{\vec{x}})\vec{v} + \frac{1}{\rho}\nabla_{\vec{x}} p = 0 \tag{3.23}$$

dove $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $p = p(\rho, s)$ è la pressione esercitata sul fluido, s l'entropia e $\vec{v}$ la velocità di propagazione del fluido. La (3.22) è l'equazione di continuità mentre la (3.23), nota come equazione di Eulero, descrive l'evoluzione di un fluido perfetto, cioè un fluido in cui l'attrito interno (viscosità) e gli scambi di calore sono trascurabili. La condizione di assenza di viscosità e di scambi di calore sia tra le diverse parti del fluido che tra il fluido e l'ambiente circostante è detta condizione di adiabaticità [44]. In un moto adiabatico vale [44, 45] per l'entropia l'equazione:

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t'} = \frac{\partial s}{\partial t'} + \vec{v} \cdot \nabla s = 0. \tag{3.24}$$

Ciò significa che l'entropia si mantiene costante lungo una linea di corrente[1]. Se all'istante iniziale l'entropia è tale che $s(\vec{x}, 0) = s_0$ costante, la (3.24) si traduce nella relazione

$$s = s_0 \quad \forall(\vec{x}, t'). \tag{3.25}$$

Un fluido per il quale vale la precedente relazione è detto isoentropico ed è ad esso che si farà riferimento in questo paragrafo.

Per studiare piccole perturbazioni della soluzione d'equilibrio costante della (3.22), (3.23), $\rho = \rho_0$, $p = p_0$ e $\vec{v} = 0$, si sviluppano in serie le quantità $\rho, \vec{v}$ e p nel seguente modo

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_0 + \epsilon\rho_1 + \epsilon^2\rho_2 + \cdots \\ p &= p_0 + \epsilon p_1 + \epsilon^2 p_2 + \cdots \\ \vec{v} &= \epsilon\vec{v}_1 + \epsilon^2\vec{v}_2 + \cdots \end{aligned} \tag{3.26}$$

dove ρ_0 e p_0 sono costanti e

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{\partial p}{\partial \rho}(\rho_0, s)\rho_1, \\ p_2 &= \frac{\partial p}{\partial \rho}(\rho_0, s)\,\rho_2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 p}{\partial \rho^2}(\rho_0, s)\,\rho_1^2 \end{aligned}$$

e si definiscono

$$c^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho}(\rho_0, s) \tag{3.27}$$

$$d = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 p}{\partial \rho^2}(\rho_0, s) \tag{3.28}$$

In questo caso per ρ e p si assume che la perturbazione avvenga attorno ai valori di equilibrio ρ_0 e p_0 mentre per la velocità si assume che all'equilibrio

[1]Si definisce linea di corrente la soluzione dell'equazione [44, 45]

$$\frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t} = \vec{v}(x, t).$$

La proprietà delle linee di corrente è che ad ogni istante di tempo t il vettore velocità $\vec{v}$ è tangente alla linea stessa.

il fluido sia fermo. Si noti che la quantità $c^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho}(\rho_0, s)$ è definita positiva perché l'aumento della pressione è correlato ad un aumento della densità.

Utilizzando gli sviluppi (3.26), si studia dapprima il limite lineare delle (3.22), (3.23), ottenendo

$$\rho_{1t'} + \rho_0 \nabla \cdot \vec{v}_1 = 0 \tag{3.29}$$

$$\vec{v}_{1t'} + \frac{c^2}{\rho_0} \nabla \rho_1 = 0. \tag{3.30}$$

Applicando l'operatore di rotore alla seconda delle equazioni precedenti, si arriva alla relazione

$$\nabla \wedge \vec{v}_1 = 0. \tag{3.31}$$

Questa esprime l'esistenza del potenziale ϕ tale che

$$\vec{v}_1 = \nabla \phi. \tag{3.32}$$

Inoltre, derivando rispetto al tempo le (3.29), (3.30) e utilizzando la (3.32) si ha

$$\rho_{1t't'} - c^2 \triangle \rho_1 = 0 \tag{3.33}$$

$$\vec{v}_{1t't'} - c^2 \triangle \vec{v}_1 = 0. \tag{3.34}$$

Ciò vuol dire che nel limite lineare la densità ρ e la velocità $\vec{v}$ soddisfano l'equazione delle onde. Ammettendo una soluzione di tipo onda piana monocromatica, la relazione di dispersione è dunque

$$\omega(\vec{k}) = c\sqrt{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2}. \tag{3.35}$$

Ci si trova esattamente nel caso del modello matematico (3.2) studiato precedentemente (si confronti la (3.9)). Si procede quindi supponendo che l'onda sia quasi unidimensionale e si introduce il sistema di coordinate

$$\begin{cases} x = x_1 - ct' \\ \bar{y}_{1,2} = \epsilon^{\alpha} x_{2,3} \ \ \alpha > 0. \\ t = \epsilon^{2\alpha} t' \end{cases} \tag{3.36}$$

Le coordinate $\bar{y}_{1,2}$ e t sono le variabili lente: individuano direzioni lungo le quali le variazioni sono rispettivamente di ordine ϵ^{α} e $\epsilon^{2\alpha}$ in confronto alle variazioni lungo l'asse x.

Utilizzando le nuove variabili $(x, \bar{y}_1, \bar{y}_2)$ si riscrivono le (3.22), (3.23) per ρ, p e $\vec{v}$ date dalla (3.26). In questo modo le equazioni contengono termini di vario ordine in ϵ e si procede uguagliando per ognuna delle due equazioni i termini dello stesso ordine in ϵ, come è stato fatto per il modello matematico nel paragrafo 3.1.

L'introduzione del sistema di coordinate (3.36) trasforma gli operatori di derivazione nel seguente modo

$$\begin{aligned}\partial_{x_1} &= \partial_x \\ \partial_{x_{2,3}} &= \epsilon^\alpha \partial_{y_{1,2}} \\ \partial_{t'} &= -c\partial_x + \epsilon^{2\alpha}\partial_t.\end{aligned}$$

Utilizzando i nuovi operatori di derivazione e gli sviluppi in serie (3.26) si riscrivono le equazioni (3.22) e (3.23):

Equazione (3.22)

$$\rho_t = \epsilon(-c\rho_{1x}) + \epsilon^2(-c\rho_{2x}) + \epsilon^{1+2\alpha}\rho_{1t} + \cdots, \tag{3.37}$$

$$\vec{v} = \epsilon\nabla_{\vec{x}}\phi + \epsilon^2\vec{v}_2 = \epsilon\begin{pmatrix}\phi_x \\ \epsilon^\alpha\phi_{y_1} \\ \epsilon^\alpha\phi_{y_2}\end{pmatrix} + \epsilon^2\begin{pmatrix} v_2^1 \\ \epsilon^\alpha v_2^2 \\ \epsilon^\alpha v_2^3\end{pmatrix} + \cdots \tag{3.38}$$

$$\nabla_{\vec{x}}\cdot(\rho\vec{v}) = \epsilon\rho_0\phi_{xx} + \epsilon^{2\alpha+1}\rho_0(\phi_{y_1y_1} + \phi_{y_2y_2}) + \epsilon^2[\rho_0 v_{2x}^1 + (\rho_1\phi_x)_x] + \cdots. \tag{3.39}$$

Nella (3.38) si è fatto uso della (3.32). Eguagliando membro a membro termini dello stesso ordine in ϵ si ha

- all'ordine ϵ

$$-c\rho_{1x} + \rho_0\phi_{xx} = 0 \tag{3.40}$$

- all'ordine ϵ^2, ottenuto imponendo $\alpha = 1/2$

$$c\rho_{2x} - \rho_0 v_{2x}^1 = \rho_{1t} + \rho_0\left(\phi_{y_1y_1} + \phi_{y_2y_2}\right) + \frac{\rho_0}{c}\left(\phi_x^2\right)_x. \tag{3.41}$$

Equazione (3.23)

$$\begin{aligned}\vec{v}_{t'} &= \epsilon\nabla_{\vec{x}}\phi_{t'} + \epsilon^2\vec{v}_{2t'} = \\ &= -\epsilon c\begin{pmatrix}\phi_{xx} \\ \epsilon^{1/2}\phi_{xy_1} \\ \epsilon^{1/2}\phi_{xy_2}\end{pmatrix} + \epsilon^2\left[\begin{pmatrix}\phi_{tx} \\ \epsilon^{1/2}\phi_{ty_1} \\ \epsilon^{1/2}\phi_{ty_2}\end{pmatrix} - c\begin{pmatrix} v_{2x}^1 \\ \epsilon^{1/2}v_{2x}^2 \\ \epsilon^{1/2}v_{2x}^3\end{pmatrix}\right] + \cdots\end{aligned} \tag{3.42}$$

$$\frac{1}{\rho}\nabla_{\vec{x}}p = \frac{1}{\rho_0}\begin{pmatrix}\epsilon p_{1x} + \epsilon^2\left(p_{2x} - \frac{\rho_1}{\rho_0}p_{1x}\right) \\ O(\epsilon^{3/2}) \\ O(\epsilon^{3/2})\end{pmatrix} \tag{3.43}$$

$$(\vec{v} \cdot \nabla_{\vec{x}})\vec{v} = \epsilon^2 \begin{pmatrix} \phi_x \phi_{xx} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + O(\epsilon^{3/2}). \tag{3.44}$$

Uguagliando i termini dello stesso ordine si ha:

- all'ordine ϵ

$$-c\phi_{xx} + \frac{p_{1x}}{\rho_0} = 0 \tag{3.45}$$

- all'ordine ϵ^2

$$cv^1_{2x} - \frac{1}{\rho_0} p_{2x} = \phi_{tx} + \phi_x \phi_{xx} - \frac{\rho_1}{\rho_0^2} p_{1x}. \tag{3.46}$$

Dalle equazioni (3.40) e (3.45) si esprimono il potenziale ϕ e la pressione p_1 in funzione della densità ρ_1

$$\phi_x = v^1_1 = \frac{c}{\rho_0}\rho_1 \tag{3.47}$$

$$p_1 = c\rho_0\phi_x = c\rho_0 v^1_1 = c^2\rho_1. \tag{3.48}$$

Moltiplicando la (3.41) per c, la (3.46) per ρ_0, sommando le due equazioni ed esprimendo p_1 e ϕ_x in termini di ρ_1 attraverso le (3.47), (3.48), si ottiene un'equazione per la sola ρ_1:

$$2\left[\rho_{1t} + \left(\frac{c^2}{\rho_0} + \frac{d}{c}\right)\rho_1\rho_{1x}\right]_x + c\left(\rho_{1\bar{y}_1\bar{y}_1} + \rho_{1\bar{y}_2\bar{y}_2}\right) = 0. \tag{3.49}$$

Riscalando nella (3.49) ρ_1 e le coordinate $\bar{y}_{1,2}$ nel seguente modo

$$\rho_1 = \left(\frac{c^2}{\rho_0} + \frac{d}{c}\right)^{-1} u, \qquad y_{1,2} = \sqrt{\frac{2}{c}}\bar{y}_{1,2}$$

si giunge all'espressione della dKP in dimensione $3+1$ [37]

$$(u_t + uu_x)_x + (u_{y_1y_1} + u_{y_2y_2}) = 0. \tag{3.50}$$

3.2.2 Fisica del plasma

Un altro ambito in cui si ricava l'equazione dKP_3 è la fisica del plasma [15, 39, 46, 47].

Si consideri dunque un sistema costituito da un gas di elettroni energetici di carica $-e$ e densità per unità di volume n_e e da ioni freddi (cioè caratterizzati da un'energia molto minore di quella elettronica) con carica $+e$, massa m_i e densità per unità di volume pari a n_i. La massa degli elettroni viene trascurata in quanto molto minore di quella degli ioni; al contrario non si trascura il potenziale elettrostatico che il gas elettronico crea.

Il sistema di equazioni differenziali che descrive questo modello è [15]

$$\frac{\partial n_i}{\partial \tilde{T}} + \nabla_{\vec{\tilde{x}}} \cdot (n_i \vec{v}_i) = 0 \tag{3.51}$$

$$m_i \left[\vec{v}_{i\tilde{T}} + (\vec{v}_i \cdot \nabla_{\vec{\tilde{x}}}) \vec{v}_i \right] = -e \nabla_{\vec{\tilde{x}}} \Phi \tag{3.52}$$

$$\triangle \Phi = 4\pi e (n_e - n_i) \tag{3.53}$$

$$n_e = n_0 \exp \left[\frac{e}{K_B T_e} \Phi \right] \tag{3.54}$$

in cui $\vec{\tilde{x}} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3)$, $\triangle = \sum_{i=1}^{3} \partial^2_{\tilde{x}_i}$, $\vec{v}_i$ è la velocità degli ioni, $\tilde{T}$ il tempo, n_0 la densità di equilibrio delle particelle, T_e la temperatura degli elettroni e Φ il potenziale elettrico. In quanto segue è più comodo lavorare con le equazioni riscalate

$$\rho_T + \nabla_{\vec{x}} \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \tag{3.55}$$

$$\vec{v}_T + (\vec{v} \cdot \nabla_{\vec{x}}) \vec{v} = -\nabla_{\vec{x}} \phi \tag{3.56}$$

$$\triangle \phi = e^{\phi} - \rho \tag{3.57}$$

dove $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\triangle = \sum_{i=1}^{3} \partial^2_{x_i}$. Queste si ottengono dalle (3.51)-(3.53) definendo le nuove variabili

$$\phi = \frac{e}{K_B T_e} \Phi \qquad \rho = n_i / n_0$$

ed introducendo un sistema di coordinate adimensionali

$$\vec{x} = \vec{\tilde{x}} / \lambda, \qquad T = \omega_p \tilde{T}, \qquad \vec{v} = (\lambda \omega_p)^{-1} \vec{v}_i$$

in cui $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) = (x_1, \vec{x}_\perp)$,

$$\lambda = \sqrt{\frac{K_B T_e}{4\pi n_0 e^2}}$$

è la lunghezza di Debye e

$$\omega_p = \sqrt{\frac{4\pi n_0 e^2}{m_i}}$$

è la frequenza di plasma.

Ciò che si vuole fare è studiare piccole perturbazioni di uno stato di densità costante. Si ammettono quindi sviluppi delle quantità ρ, ϕ e $\vec{v}$ in termini del parametro infinitesimo ϵ

$$\begin{aligned}\rho &= 1 + \epsilon\rho^{(1)} + \epsilon^{1+r}\rho^{(2)} + \cdots \\ \phi &= \epsilon\phi^{(1)} + \epsilon^{1+r}\phi^{(2)} + \cdots \\ \vec{v} &= \epsilon\vec{v}^{(1)} + \epsilon^{1+\nu}\vec{v}^{(2)} + \cdots\end{aligned} \tag{3.58}$$

con $r, \nu > 0$ da determinare.

Il limite lineare delle (3.55), (3.56), (3.57) conduce alle

$$\rho_T^{(1)} + \nabla_{\vec{x}} \cdot \vec{v}^{(1)} = 0 \tag{3.59}$$

$$\vec{v}_T^{(1)} = -\nabla_{\vec{x}}\phi^{(1)} \tag{3.60}$$

$$\triangle\phi^{(1)} = \phi^{(1)} - \rho^{(1)}, \tag{3.61}$$

dalle quali si ottiene, derivando la (3.61) rispetto al tempo T due volte ed usando (3.59) e (3.60):

$$\triangle\phi_{TT}^{(1)} = \phi_{TT}^{(1)} - \triangle\phi^{(1)}. \tag{3.62}$$

A differenza di quanto accade sia per il modello matematico (3.2) che per le equazioni (3.22), (3.23) di un gas isoentropico in acustica, in questo caso il limite lineare non produce l'equazione delle onde (3.5), a causa della presenza del termine $\triangle\phi_{TT}^{(1)}$. La relazione di dispersione relativa alla (3.62) è

$$\omega = \sqrt{\frac{k_1^2 + \vec{k}_\perp^2}{1 + k_1^2 + \vec{k}_\perp^2}}. \tag{3.63}$$

Se però si limita lo studio alle onde lunghe, cioè alle onde con piccolo numero d'onda $\vec{k}$, il termine $\triangle\phi_{TT}^{(1)}$ è trascurabile. Si definiscono quindi

$$k_1 = \epsilon^p k_1, \qquad \vec{k}_\perp = \epsilon^{p+\alpha}\vec{k}_\perp \tag{3.64}$$

in cui $p > 0$ indica che le onde considerate sono lunghe, $\alpha > 0$ che le onde sono quasi unidimensionali. La relazione di dispersione (3.63) assume la forma

$$\omega \sim \epsilon^p \left(k_1 + \frac{\epsilon^{2\alpha}}{2}\frac{\vec{k}_\perp^2}{k_1} - \frac{\epsilon^{2p}}{2}k_1^2 \right). \tag{3.65}$$

Per ottenere la dKP si deve imporre $\alpha < p$: in questo modo il terzo termine tra parentesi è di ordine superiore, perciò trascurabile, e la (3.65) si riduce alla

$$\omega \sim \epsilon^p \left(k_1 + \frac{\epsilon^{2\alpha}}{2}\frac{\vec{k}_\perp^2}{k_1} \right). \tag{3.66}$$

Questa è la relazione di dispersione dell'equazione delle onde per onde quasi unidimensionali (si confronti la (3.11)). Se invece $\alpha = p$, il terzo termine della (3.65) non è trascurabile: in tal caso il risultato dello sviluppo multiscala non è l'equazione dKP bensì la KP (2.109).

Tornando alla relazione di dispersione (3.66) e alle (3.64), esse suggeriscono di introdurre il cambiamento di coordinate

$$\begin{cases} x = \epsilon^p (x_1 - T) \\ \vec{y} = \epsilon^{p+\alpha} \vec{x}_\perp \\ t = \epsilon^{p+2\alpha} T \end{cases} . \tag{3.67}$$

Quindi, gli operatori di derivazione nel nuovo sistema di coordinate sono

$$\begin{aligned} \partial_{x_1} &= \epsilon^p \partial_x \\ \partial_{x_{2,3}} &= \epsilon^{p+\alpha} \partial_{y_{1,2}} \\ \partial_T &= -\epsilon^p \partial_x + \epsilon^{p+2\alpha} \partial_t \end{aligned}$$

e le equazioni (3.55), (3.56), (3.57) vanno riscritte nelle nuove coordinate per $\rho, \vec{v}$ e ϕ date dalla (3.58). L'equazione (3.56), in particolare, implica che

$$\vec{v} = \epsilon \begin{pmatrix} v_1^{(1)} + \epsilon^{\nu_1} v_1^{(2)} \\ \epsilon^\alpha v_2^{(1)} + \epsilon^{\alpha+\nu_2} v_2^{(2)} \\ \epsilon^\alpha v_3^{(1)} + \epsilon^{\alpha+\nu_2} v_3^{(2)} \end{pmatrix} \tag{3.68}$$

con ν_1 e ν_2 positivi.

Si procede con il calcolo delle quantità di interesse:

Equazione (3.55)

$$\rho_T = \epsilon^{p+1}(-\partial_x + \epsilon^{2\alpha}\partial_t)(\rho^{(1)} + \epsilon^r \rho^{(2)}) \tag{3.69}$$

$$\begin{aligned} \nabla_{\vec{x}} \cdot (\rho\vec{v}) = {} & \epsilon^{p+1} \left[(1 + \epsilon\rho^{(1)})(v_1^{(1)} + \epsilon^{\nu_1} v_1^{(2)}) \right]_x + \\ & + \epsilon^{p+2\alpha+1} \left[(1 + \epsilon\rho^{(1)})(v_2^{(1)} + \epsilon^{\nu_2} v_2^{(2)}) \right]_{y_1} + \\ & \epsilon^{p+2\alpha+1} \left[(1 + \epsilon\rho^{(1)})(v_3^{(1)} + \epsilon^{\nu_2} v_3^{(2)}) \right]_{y_2} . \end{aligned} \tag{3.70}$$

Eguagliando i termini dello stesso ordine si ottiene

- all'ordine ϵ^{p+1}

$$-\rho_x^{(1)} + v_{1x}^{(1)} = 0 \Longrightarrow \rho^{(1)} = v_1^{(1)}; \tag{3.71}$$

- all'ordine ϵ^{p+2}, avendo imposto $r = 2\alpha = \nu_1 = 1$ per il massimo bilancio

$$-\rho_x^{(2)} + v_{1x}^{(2)} + \rho_t^{(1)} + (\rho^{(1)} v_1^{(1)})_x + (v_{2y_1}^{(1)} + v_{3y_2}^{(1)}) = 0. \tag{3.72}$$

Equazione (3.56):

$$\vec{v}_t = \begin{pmatrix} \epsilon^{p+1}(-\partial_x + \epsilon^{2\alpha}\partial_t)(v_1^{(1)} + \epsilon^{\nu_1} v_1^{(2)}) \\ \epsilon^{\alpha+p+1}(-\partial_x + \epsilon^{2\alpha}\partial_t)(v_2^{(1)} + \epsilon^{\nu_2} v_2^{(2)}) \\ \epsilon^{\alpha+p+1}(-\partial_x + \epsilon^{2\alpha}\partial_t)(v_3^{(1)} + \epsilon^{\nu_2} v_3^{(2)}) \end{pmatrix} \tag{3.73}$$

$$\begin{aligned}[(\vec{v}\cdot\nabla_{\vec{x}})\vec{v}]_1 &= \epsilon^{p+2}(v_1^{(1)} + \epsilon^{\nu_1} v_1^{(2)})(v_1^{(1)} + \epsilon^{\nu_1} v_1^{(2)})_x + \\ &+ \epsilon^{p+2\alpha+2}(v_2^{(1)} + \epsilon^{\nu_2} v_2^{(2)})(v_1^{(1)} + \epsilon^{\nu_1} v_1^{(2)})_{y_1} + \\ &+ \epsilon^{p+2\alpha+2}(v_3^{(1)} + \epsilon^{\nu_2} v_3^{(2)})(v_1^{(1)} + \epsilon^{\nu_1} v_1^{(2)})_{y_2} \end{aligned} \tag{3.74}$$

$$\begin{aligned}[(\vec{v}\cdot\nabla_{\vec{x}})\vec{v}]_{2,3} &= \epsilon^{p+\alpha+2}(v_1^{(1)} + \epsilon^{\nu_1} v_1^{(2)})(v_{2,3}^{(1)} + \epsilon^{\nu_2} v_{2,3}^{(2)})_x + \\ &+ \epsilon^{p+3\alpha+2}(v_2^{(1)} + \epsilon^{\nu_2} v_2^{(2)})(v_{2,3}^{(1)} + \epsilon v_{2,3}^{(2)})_{y_1} + \\ &+ \epsilon^{p+3\alpha+2}(v_3^{(1)} + \epsilon^{\nu_2} v_3^{(2)})(v_{2,3}^{(1)} + \epsilon v_{2,3}^{(2)})_{y_2} \end{aligned} \tag{3.75}$$

$$-\nabla_{\vec{x}}\phi = \begin{pmatrix} -\epsilon^{p+1}(\phi_x^{(1)} + \epsilon^r \phi_x^{(2)}) \\ -\epsilon^{p+\alpha+1}(\phi_{y_1}^{(1)} + \epsilon^r \phi_{y_1}^{(2)}) \\ -\epsilon^{p+\alpha+1}(\phi_{y_2}^{(1)} + \epsilon^r \phi_{y_2}^{(2)}) \end{pmatrix}. \tag{3.76}$$

Uguagliando termini di ugual ordine in ϵ si ottiene

- all'ordine principale, per le tre componenti:

$$v_1^{(1)} = \phi^{(1)}, \qquad v_{2x}^{(1)} = \phi_{y_1}^{(1)}, \qquad v_{3x}^{(1)} = \phi_{y_2}^{(1)} \tag{3.77}$$

- all'ordine successivo, per la prima componente:

$$-v_{1x}^{(2)} + v_{1t}^{(1)} + v_1^{(1)} v_{1x}^{(1)} + \phi_x^{(2)} = 0,$$

  la quale, utilizzando la prima delle (3.77), si scrive come

$$-v_{1x}^{(2)} + \phi_t^{(1)} + \phi^{(1)}\phi_x^{(1)} + \phi_x^{(2)} = 0. \tag{3.78}$$

Equazione (3.57) :

$$\begin{aligned} &\epsilon^{2p+1}(\partial_x^2 + \epsilon^{2\alpha}\partial_{y_1}^2 + \epsilon^{2\alpha}\partial_{y_2}^2)(\phi^{(1)} + \epsilon^r \phi^{(2)}) \sim \\ &\qquad = \epsilon^2\left[\phi^{(2)} + \frac{1}{2}(\phi^{(1)})^2 - \rho^{(2)}\right]. \end{aligned} \tag{3.79}$$

A proposito di questa equazione bisogna ricordare quanto detto a proposito della relazione di dispersione (3.65): per ottenere la relazione di dispersione

(3.66) a partire dalla (3.63) si deve imporre $\alpha = 1/2 < p$; altrimenti, se $\alpha = 1/2 = p$, non si può trascurare il terzo termine al secondo membro della (3.65). In questo caso, quindi, imponendo $p > 1/2 = \alpha$, si ottiene all'ordine ϵ^2

$$\phi^{(2)} + \frac{1}{2}(\phi^{(1)})^2 - \rho^{(2)} = 0. \tag{3.80}$$

Se, invece, si pone $p = 1/2$, per ottenere il massimo bilancio bisogna considerare l'equazione

$$\phi^{(1)}_{xx} = \phi^{(2)} + \frac{1}{2}(\phi^{(1)})^2 - \rho^{(2)}, \tag{3.81}$$

in cui compare il termine aggiuntivo $\phi^{(1)}_{xx}$, che darà origine ad un termine dispersivo nell'equazione finale.

Se $p > 1/2$, dalle (3.78) e (3.80) si isolano le variabili $\rho^{(2)}$ e $v_1^{(2)}$

$$\rho^{(2)} = \phi^{(2)} + \frac{1}{2}\left(\phi^{(1)}\right)^2 \tag{3.82}$$

$$v_1^{(2)} = +\partial_x^{-1}\phi_t^{(1)} + \frac{1}{2}\left(\phi^{(1)}\right)^2 + \phi^{(2)}. \tag{3.83}$$

Inserendo le relazioni precedenti all'interno della (3.72) e ricordando le (3.77), si giunge all'equazione dKP in $3+1$ dimensioni

$$2\left(\phi_t^{(1)} + \phi^{(1)}\phi_x^{(1)}\right)_x + \phi^{(1)}_{y_1y_1} + \phi^{(1)}_{y_2y_2} = 0. \tag{3.84}$$

Se invece si impone $p = 1/2$, si deve considerare l'equazione (3.81) in luogo della (3.80). In questo modo nulla cambia per la variabile $v_1^{(2)}$, che è ancora definita dalla (3.83), mentre per $\rho^{(2)}$ vale la seguente relazione

$$\rho^{(2)} = \phi^{(2)} + \frac{1}{2}\left(\phi^{(1)}\right)^2 - \phi^{(1)}_{xx}. \tag{3.85}$$

Inserendo le (3.82) e (3.83) nella (3.72), si giunge all'equazione

$$2\left(\phi_t^{(1)} + \phi^{(1)}\phi_x^{(1)}\right) + \phi^{(1)}_{xxx} + \partial_x^{-1}\left(\phi^{(1)}_{y_1y_1} + \phi^{(1)}_{y_2y_2}\right) = 0, \tag{3.86}$$

che, derivando rispetto a x e ponendo $\phi^{(1)} = 1/2u$ e $\tilde{t} = 1/2t$, assume la forma

$$(u_{\tilde{t}} + uu_x + u_{xxx})_x + u_{y_1y_1} + u_{y_2y_2} = 0, \tag{3.87}$$

che è la generalizzazione dell'equazione KP (2.109) in dimensione $3+1$, con $\sigma^2 = 1$.

3.2.3 Onde elettromagnetiche nei dielettrici

Una situazione della fisica in cui si può ricavare l'equazione dKP con non linearità cubica è rappresentata dall'ottica non lineare.

L'ottica non lineare si occupa dell'interazione di luce di forte intensità, come un laser, con la materia [48, 49, 50, 51].

Le prime conoscenze sull'ottica derivano dall'utilizzo di sorgenti luminose convenzionali dotate di scarsa intensità e si basano sull'assunto che, nell'interazione con la materia, il campo elettrico incidente induca nel mezzo modificazioni descritte dal vettore di polarizzazione elettrica $\vec{P}$, la cui relazione con il campo elettrico è lineare:

$$\vec{P}(\vec{x},T) = \epsilon_0 \chi \vec{E}(\vec{x},T) \tag{3.88}$$

dove ϵ_0 rappresenta la costante dielettrica del vuoto e χ la suscettività del materiale utilizzato.

Con la costruzione di sorgenti laser si è avuto a disposizione una luce di intensità notevolmente superiore: il suo utilizzo ha evidenziato la presenza di effetti fisici fino ad allora non rilevati e che non trovavano spiegazione nella (3.88). Questa relazione è stata quindi modificata in modo che si tenesse conto di termini di polarizzazione non lineari, ottenendo [48, 50]

$$\begin{aligned}\vec{P} &= \epsilon_0 \left[\chi^{(1)}\vec{E} + \chi^{(2)}\vec{E}\vec{E} + \chi^{(3)}\vec{E}\vec{E}\vec{E} + \cdots\right] \\ &= \vec{P}^{(1)} + \vec{P}^{(2)} + \vec{P}^{(3)} + \cdots + \vec{P}^{(n)} + \cdots, \end{aligned} \tag{3.89}$$

in cui $\chi^{(1)}, \chi^{(2)}, \chi^{(3)}$ etc sono dette suscettività rispettivamente del primo, del secondo, del terzo ordine e così via. Il prodotto tra suscettività e campo elettrico va inteso come prodotto tensoriale, cioè valgono le relazioni

$$\left(\vec{P}^{(n)}(\vec{x},t)\right)_i = \epsilon_0 \left(\chi^{(n)}\vec{E}\vec{E}\cdots\vec{E}^{(n)}\right)_i \equiv$$

$$\begin{aligned}\equiv \epsilon_0 \sum_{j_1\cdots j_n=1}^{3} \int_{-\infty}^{T} \mathrm{d}\tau_1 \int_{-\infty}^{T} \mathrm{d}\tau_2 \cdots \int_{-\infty}^{T} \mathrm{d}\tau_n \; \chi^{(n)}_{i,j_1,\ldots,j_n}(T-\tau_1, T-\tau_2, \cdots T-\tau_n) \cdot \\ \cdot E_{j_1}(\vec{x},\tau_1)\cdots E_{j_n}(\vec{x},\tau_n), \qquad i = 1,2,3\end{aligned} \tag{3.90}$$

dove si è assunto che

1. il materiale è omogeneo, e quindi le suscettività non dipendono da $\vec{x}$;

2. la risposta è invariante per traslazioni temporali e causale, quindi $\chi^{(n)}$ dipende da $(T-\tau_j)$, $j=1,\ldots,n$, ed è nulla per $\tau_j > T$.

Le equazioni che descrivono l'interazione tra onde elettromagnetiche e materia sono le ben note equazioni di Maxwell

$$\nabla\cdot\vec{E} = -\frac{1}{\epsilon_0}\nabla\cdot\vec{P}, \quad \nabla\wedge\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial T}, \quad \nabla\cdot\vec{B}=0, \quad \frac{\partial\vec{E}}{\partial T} = c^2\nabla\wedge\vec{B} - \frac{1}{\epsilon_0}\frac{\partial\vec{P}}{\partial T}$$

dove $\nabla = (\partial_{x_1}, \partial_{x_2}, \partial_{x_3})$. Facendo il rotore della seconda delle precedenti, si ricava la relazione tra il campo elettrico $\vec{E}$ e la densità di dipolo elettrico $\vec{P}$

$$\vec{E}_{TT} + c^2\nabla(\nabla\cdot\vec{E}) - c^2\triangle\vec{E} = -\frac{1}{\epsilon_0}\vec{P}_{TT}. \tag{3.91}$$

Limitando ora l'analisi ad un materiale omogeneo per il quale è possibile trascurare ordini superiori al secondo e considerando il caso si suscettività costanti, il vettore polarizzazione si scrive come

$$\vec{P}(\vec{x},T) = \epsilon_0\chi^{(1)}\vec{E}(\vec{x},T) + \epsilon_0\chi^{(2)}\vec{E}(\vec{x},T)\,\vec{E}(\vec{x},T), \tag{3.92}$$

dove

$$\left(\chi^{(2)}\,\vec{E}(\vec{x},t)\,\vec{E}(\vec{x},t)\right)_i = \sum_{j,k=1}^{3}\chi^{(2)}_{i,j,k}E_j(\vec{x},t)E_k(\vec{x},t).$$

L'equazione (3.91) assume dunque la forma

$$\begin{aligned}\left[\vec{E}(\vec{x},T) + \chi^{(1)}\vec{E}(\vec{x},T)\right]_{TT} - c^2\triangle\vec{E}(\vec{x},T) + c^2\nabla(\nabla\cdot\vec{E}) &= \\ = -\chi^{(2)}\left[\vec{E}(\vec{x},T)\,\vec{E}(\vec{x},T)\right]_{TT}&.\end{aligned} \tag{3.93}$$

Si studi il caso realistico di una suscettività non lineare piccola:

$$\chi^{(2)} \to \epsilon\chi^{(2)}. \tag{3.94}$$

Sostituendo questa espressione nella (3.93) si ottiene l'equazione

$$\begin{aligned}\left[\vec{E}(\vec{x},T) + \chi^{(1)}\vec{E}(\vec{x},T)\right]_{TT} - c^2\triangle\vec{E}(\vec{x},T) + c^2\nabla(\nabla\cdot\vec{E}) &= \\ -\epsilon\chi^{(2)}\left[\vec{E}(\vec{x},T)\vec{E}(\vec{x},T)\right]_{TT}&,\end{aligned} \tag{3.95}$$

dalla quale si ricava all'ordine 1

$$\left(1+\chi^{(1)}\right)\vec{E}(\vec{x},T)_{TT} - c^2\triangle\vec{E}(\vec{x},T) + c^2\nabla(\nabla\cdot\vec{E}(\vec{x},T)) = 0. \tag{3.96}$$

Come si vede, il limite lineare non conduce all'equazione delle onde a causa della presenza del termine $\nabla(\nabla \cdot \vec{E}(\vec{x}, T))$. Tuttavia è possibile eliminare questo termine scegliendo un campo elettrico polarizzato linearmente nella direzione x_3 ed indipendente dalla coordinata x_3, cioè

$$\vec{E} = (0, 0, E_3(x_1, x_2, T)). \tag{3.97}$$

In questo modo la divergenza di $\vec{E}$ è identicamente nulla. Si noti inoltre che la forma (3.97) di $\vec{E}$ è compatibile con l'equazione (3.95) solo se $\chi^{(2)}_{133} = \chi^{(2)}_{233} = 0$.

Per un campo elettrico di forma (3.97), il limite lineare della (3.93) è l'equazione delle onde

$$E_3(\vec{x}, T)_{TT} = C^2 \triangle E_3(\vec{x}, T), \tag{3.98}$$

dove

$$C = \frac{c}{\sqrt{1 + \chi^{(1)}}} \tag{3.99}$$

è la velocità di propagazione del campo E_3.

Cercando soluzioni nella forma di onda monocromatica $E_3 \propto \exp[-\imath(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega T)]$, con $\vec{x} = (x_1, x_2)$ e $\vec{k} = (k_1, \tilde{k}_2)$, la relazione di dispersione è

$$\omega^2 = C^2 \vec{k}^2. \tag{3.100}$$

Richiedendo adesso che l'onda sia quasi unidimensionale, si pone $k_1 = O(1)$ e $\tilde{k}_2 = \epsilon^\alpha k_2$. In questo modo la relazione di dispersione assume la forma

$$\omega = C\sqrt{k_1^2 + \tilde{k}_2^2} = C\sqrt{k_1^2 + \epsilon^{2\alpha} k_2^2} \simeq C k_1 \left(1 + \epsilon^{2\alpha} \frac{k_2^2}{2k_1^2}\right) \tag{3.101}$$

e la fase dell'onda monocromatica è

$$\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega T = k_1 \left(x_1 - CT\right) + \epsilon^\alpha k_2 x_2 - \epsilon^{2\alpha} C \frac{k_2^2}{2k_1} T. \tag{3.102}$$

Si introduce dunque il nuovo sistema di coordinate

$$\begin{aligned} x &= x_1 - CT \\ y &= \epsilon^\alpha x_2 \\ t &= \epsilon^{2\alpha} T \end{aligned} \tag{3.103}$$

attraverso il quale riscrivere l'equazione (3.93).

Gli operatori di derivazione si trasformano nel seguente modo

$$\begin{aligned} \partial_{x_1} &= \partial_x \\ \partial_{x_2} &= \epsilon^\alpha \partial_y \\ \partial_T &= -C\partial_x + \epsilon^{2\alpha} \partial_t. \end{aligned}$$

Si possono ora riscrivere i termini della (3.95):

$$
\begin{aligned}
\left(1+\chi^{(1)}\right) E_{3TT} &= \left(1+\chi^{(1)}\right)\left(C^2\partial_x^2+\epsilon^{4\alpha}\partial_t^2-2C\epsilon^{2\alpha}\partial_x\partial_t\right)E_3 && (3.104)\\
c^2\triangle E_3 &= c^2\left(\partial_x^2+\epsilon^{2\alpha}\partial_y^2\right)E_3 && (3.105)\\
\epsilon\chi^{(2)}\left[\vec{E}\vec{E}\right]_{TT} &= \epsilon\chi^{(2)}_{333}\left(C^2\partial_x^2+\epsilon^{4\alpha}\partial_t^2-2C\epsilon^{2\alpha}\partial_x\partial_t\right)E_3^2. && (3.106)
\end{aligned}
$$

Eguagliando i termini dello stesso ordine in ϵ si ottiene

- all'ordine 1 l'identità

$$C^2(1+\chi^{(1)})E_{3xx}-c^2E_{3xx}=0,$$

  si ricordi infatti che la velocità C è definita dalla (3.99);

- all'ordine successivo, ponendo $\alpha=1/2$ per ottenere il massimo bilancio

$$\left(E_{3t}-\frac{\chi^{(2)}_{333}C}{1+\chi^{(1)}}E_3E_{3x}\right)_x+\frac{C}{2}E_{3yy}=0, \qquad (3.107)$$

  ovvero l'equazione dKP con non linearità quadratica in dimensione $2+1$.

A questo punto è d'obbligo fare la seguente **osservazione**: la dKP_n con non linearità quadratica è ottenuta a partire dalla relazione di ordine quadratico (3.108) per la polarizzazione. Questo è in accordo con quanto detto all'inizio di questa sezione, a pagina 45, a proposito delle condizioni necessarie per dedurre la dKP_n con non linearità di grado $m+1$.

Procedendo come nel modello matematico di paragrafo 3.1, si ipotizzi che il termine quadratico nella (3.108) sia nullo e si consideri lo sviluppo della polarizzazione fino all'ordine cubico.

L'annullarsi del termine quadratico si verifica in mezzi isotropi (gas, liquidi, solidi amorfi) e cristalli centrosimmetrici (cioè che possiedono un centro di simmetria), in quanto per questi materiali la suscettività del secondo ordine e di tutti gli ordini pari è nulla[2] [48, 50].

[2]In approssimazione di dipolo. Se si considerano ordini di approssimazione superiori (di quadrupolo elettrico o quadrupolo magnetico) questo non è più vero [50].

Analizzando quindi un mezzo omogeneo ed isotropo e trascurando non linearità di ordine superiore al terzo, il vettore polarizzazione assume la forma

$$\vec{P}(\vec{x},T) = \epsilon_0 \int_{-\infty}^{T} \mathrm{d}\tau_1 \chi^{(1)}(T-\tau_1)\vec{E}(\vec{x},\tau_1)+$$
$$+\epsilon_0 \int_{-\infty}^{T}\mathrm{d}\tau_1 \int_{-\infty}^{T}\mathrm{d}\tau_2 \int_{-\infty}^{T}\mathrm{d}\tau_3\ \chi^{(3)}(T-\tau_1, T-\tau_2, T-\tau_3)\cdot, \tag{3.108}$$
$$\cdot \left[\vec{E}(\vec{x},\tau_2)\cdot\vec{E}(\vec{x},\tau_3)\right]\vec{E}(\vec{x},\tau_1)$$

in cui le funzioni $\chi^{(1)}, \chi^{(3)}$ rappresentano la suscettività lineare e cubica rispettivamente e l'invarianza per rotazioni si riflette nella presenza dei soli termini $\vec{E}$, $\vec{E}\cdot\vec{E}=\vec{E}^2$.

Considerando come prima il caso di suscettività $\chi^{(1)}$ e $\chi^{(3)}$ costanti, si ottiene per il vettore polarizzazione

$$\vec{P}(\vec{x},T) = \epsilon_0\chi^{(1)}\vec{E}(\vec{x},T) + \epsilon_0\chi^{(3)}\left[\vec{E}(\vec{x},T)\cdot\vec{E}(\vec{x},T)\right]\vec{E}(\vec{x},T). \tag{3.109}$$

L'equazione (3.91) assume dunque la forma

$$\left[\vec{E}(\vec{x},T) + \chi^{(1)}\vec{E}(\vec{x},T)\right]_{TT} - c^2\triangle\vec{E}(\vec{x},T) + c^2\nabla(\nabla\cdot\vec{E}) =$$
$$= -\chi^{(3)}\left[\left(\vec{E}(\vec{x},T)\cdot\vec{E}(\vec{x},T)\right)\vec{E}(\vec{x},T)\right]_{TT}. \tag{3.110}$$

Per un campo elettrico di forma (3.97) e nel caso di suscettività non lineare piccola, cioè $\chi^{(3)}\to\epsilon\chi^{(3)}$, l'equazione precedente diventa

$$\left[E_3(\vec{x},T) + \chi^{(1)}E_3(\vec{x},T)\right]_{TT} - c^2\triangle E_3(\vec{x},T) =$$
$$= -\epsilon\chi^{(3)}\left[E_3^3(\vec{x},T)\right]_{TT}. \tag{3.111}$$

Si ripercorrono, dunque, i passi fatti per dedurre la (3.107): tutto è analogo al caso precedente, tranne il secondo membro dell'equazione (3.111). Trascrivendo l'equazione (3.111) nel sistema di coordinate per onde quasi unidimensionali (3.103), si ha

$$\chi^{(3)}\left(E_3\right)^3_{TT} = \epsilon\chi^{(3)}\left(C^2\partial_x^2 + \epsilon^{4\alpha}\partial_t^2 - 2C\epsilon^{2\alpha}\partial_x\partial_t\right)E_3^3; \tag{3.112}$$

gli altri termini dell'equazione sono dati dalle (3.104), (3.105).

Uguagliando i termini dello stesso ordine in ϵ si ottiene

- all'ordine 1 l'identità

  $$C^2(1+\chi^{(1)})E_{3xx} - c^2E_{3xx} = 0,$$

  si ricordi infatti che la velocità C è definita dalla (3.99);

- all'ordine successivo, ponendo $\alpha = 1/2$ per ottenere il massimo bilancio

$$\left(E_{3t} - \frac{3}{2}\frac{\chi^{(3)}C}{1+\chi^{(1)}}E_3^2 E_{3x}\right)_x + \frac{C}{2}E_{3yy} = 0, \tag{3.113}$$

ovvero l'equazione dKP con non linearità cubica in dimensione $2+1$.

L'interesse per questo esempio tratto dall'ottica non lineare non consiste solo nel presentare un campo di applicazione per la dKP_n con non linearità sia quadratica che cubica, ma anche nel permettere di verificare che **maggiore è la non linearità dell'equazione modello a cui si perviene, minore è l'universalità del modello stesso**. Infatti, per ottenere la dKP_n con non linearità cubica, si deve imporre l'ipotesi di isotropia del mezzo su cui la luce va ad incidere, ipotesi assente nel caso della dKP_n con non linearità quadratica.

Capitolo 4

Studio dell'equazione dKP_n con non linearita' di grado arbitrario: problema di Cauchy, studio della rottura, onda d'urto

Dopo aver studiato, nel capitolo 3, le proprietà fisiche dell'equazione $dKP_{n,m}$

$$(u_t + u^m u_x)_x + \triangle_\perp u = 0, \qquad \triangle_\perp := \sum_{i=1}^{n-1} \partial^2_{y_i}, \tag{4.1}$$

in questo capitolo si analizzeranno alcune proprietà matematiche interessanti di tale modello e, più in generale, dell'equazione

$$(u_t + c(u)u_x)_x + \triangle_\perp u = 0, \tag{4.2}$$

dove $c(u)$ è una qualunque funzione regolare.

Più precisamente, nel paragrafo 4.1 si individuerà un importante gruppo di simmetria dell'equazione (4.2), che permetterà di ottenere una famiglia di soluzioni esatte, ma implicite, della (4.2), dipendenti da una funzione arbitraria di un singolo argomento (la generalizzazione naturale della soluzione (2.12) dell'equazione di Riemann). Tali soluzioni sono costanti sul paraboloide (4.4) (il fronte d'onda) e si rompe simultaneamente in tutti i punti di esso. Nel paragrafo 4.2, si concentra l'attenzione sull'equazione $dKP_{n,m}$ (4.1) ($c(u) = u^m$), e si utilizza tale soluzione esatta per risolvere il problema di Cauchy per piccoli dati iniziali, individuando i valori dei parametri (n, m) per i quali una piccola onda localizzata si rompe nel regime asintotico sul paraboloide (4.4).

4.1 Simmetrie e riduzioni per simmetria

Nell'ambito dello studio della dKP_n presentato in [39], si vede come l'equazione goda di una invarianza per trasformazioni sotto il seguente gruppo di simmetria di Lie

$$\begin{cases} \tilde{x} &= x + \sum_{i=1}^{n-1} (\delta_i y_i - \delta_i^2 t), \\ \tilde{y}_j &= y_j - 2\delta_j t, \qquad j = 1, \cdots, n-1 \\ \tilde{t} &= t \end{cases}, \tag{4.3}$$

in cui i δ_j sono i parametri arbitrari del gruppo, che lascia invariante il paraboloide

$$\xi = x + \frac{1}{4t} \sum_{i=1}^{n-1} y_i^2, \tag{4.4}$$

come si verifica sostituendo direttamente le (4.3) nella (4.4). Tale simmetria vale anche per la dKP_n nella forma più generale data dalla (4.2), come si verifica facilmente tramite calcolo diretto: le derivate si trasformano nel seguente modo

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \\ \frac{\partial}{\partial y_i} &= \delta_i \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial}{\partial y_i}, \qquad i = 1, \cdots, n-1 \\ \frac{\partial}{\partial t} &= -\sum_{i=1}^{n-1} \left(\delta_i^2 \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} + 2\delta_i \frac{\partial}{\partial \tilde{y}_i} \right) + \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} \end{aligned} \tag{4.5}$$

e applicando alla (4.2) le relazioni ottenute

$$\begin{aligned} u_{tx} &\rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial \tilde{t} \partial \tilde{x}} - \sum_{i=1}^{n-1} \delta_i^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \tilde{x}^2} - 2 \sum_{i=1}^{n-1} \delta_i \frac{\partial^2 u}{\partial \tilde{y}_i \partial \tilde{x}} \\ (c(u)u_x)_x &\rightarrow (c(u)u_{\tilde{x}})_{\tilde{x}} \\ \triangle_\perp u &\rightarrow \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial^2 u}{\partial \tilde{y}_i^2} + \sum_{i=1}^{n-1} \delta_i^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \tilde{x}^2} + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \delta_i \frac{\partial^2 u}{\partial \tilde{x} \partial \tilde{y}_i} \end{aligned}$$

si ottiene

$$(u_{\tilde{t}} + c(u)u_{\tilde{x}})_{\tilde{x}} + \tilde{\triangle}_\perp u = 0.$$

L'esistenza della suddetta simmetria suggerisce di cercare soluzioni per la (4.2) nella forma

$$\begin{aligned} u &= v(\xi, t) \\ \xi &= x + \frac{1}{4t} \sum_{i=1}^{n-1} y_i^2. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Sostituendo quindi la (4.6) nella (4.2) e assumendo che $v(\xi) \to 0$, $\xi \to \infty$, si ottiene l'equazione per la variabile v

$$v_t + c(v)v_\xi + \frac{n-1}{2t}v = 0. \tag{4.7}$$

Questa è un'equazione quasi-lineare[1] del prim'ordine per l'incognita v e può essere integrata grazie al metodo delle caratteristiche [1, 2], già utilizzato nel capitolo 2, nel paragrafo 2.1.1. Il metodo consiste nell'introdurre curve, dette caratteristiche, sulle quali l'equazione (o il sistema di equazioni) alle derivate parziali si scrive come un sistema di equazioni alle derivate ordinarie (ODE). In questo caso la (4.7) è equivalente al sistema di ODE

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\frac{n-1}{2t}v \tag{4.8}$$

$$\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t} = c(v) \tag{4.9}$$

lungo le caratteristiche individuate dalla (4.9). A differenza dell'equazione di Riemann, in questo caso la soluzione v non è costante lungo le caratteristiche, come si vede dalla (4.8), quindi le caratteristiche non sono delle rette.

Considerando il seguente dato iniziale

$$v(\xi, t_0) = F(\xi) \tag{4.10}$$

$$\xi(t = t_0) = \zeta, \qquad t_0 > 0 \tag{4.11}$$

si procede all'integrazione della (4.8), la cui soluzione è

$$v = F(\zeta)\left(\frac{t_0}{t}\right)^{\frac{n-1}{2}}. \tag{4.12}$$

Integrando la (4.9) si ottiene

$$\xi = \zeta + \int_{t_0}^{t} c\left(F(\zeta)\left(\frac{t_0}{t}\right)^{\frac{n-1}{2}}\right)\mathrm{d}t', \tag{4.13}$$

per cui la soluzione dell'equazione (4.7) è data implicitamente dal sistema

$$v(\xi, t) = F(\zeta)\left(\frac{t_0}{t}\right)^{\frac{n-1}{2}} \tag{4.14}$$

$$\xi = \zeta + \int_{t_0}^{t} c\left(F(\zeta)\left(\frac{t_0}{t'}\right)^{\frac{n-1}{2}}\right)\mathrm{d}t' \tag{4.15}$$

[1] Un sistema di PDE si definisce *quasi lineare del primo ordine* se può essere scritto nella forma

$$A_{ij}\frac{\partial u_j}{\partial t} + a_{ij}\frac{\partial u_j}{\partial x} + b_i, \qquad i = 1, \dots, n$$

in cui le matrici A_{ij}, a_{ij} ed il vettore b_i sono funzioni di u ma non delle sue derivate.

al variare di ζ. Dalla (4.15) si ricava

$$\zeta(\xi,t) = \xi - \int_{t_0}^{t} c\left(v(\xi,t)\left(\frac{t}{t'}\right)^{\frac{n-1}{2}}\right) \mathrm{d}t' \tag{4.16}$$

che, inserita nella (4.14) conduce alla soluzione

$$v(\xi,t) = \left(\frac{t_0}{t'}\right)^{\frac{n-1}{2}} F\left(\xi - \int_{t_0}^{t} c\left(v(\xi,t)\left(\frac{t}{t'}\right)^{\frac{n-1}{2}}\right) \mathrm{d}t'\right). \tag{4.17}$$

A questo punto si può ricavare la soluzione $u = u(x,\vec{y},t)$ dell'equazione originale (4.2) ricordando il cambiamento di variabili (4.6).

4.1.1 Osservazioni ed esempi

Innanzitutto si osserva che, se $n = 1$, le (4.14), (4.15) riproducono la soluzione (2.14), (2.16) dell'equazione di Riemann: infatti, per $n = 1$ le (4.14), (4.15) assumono la forma

$$v = F(\zeta) \tag{4.18}$$

$$\xi = \zeta + \int c\,(F(\zeta))\,\mathrm{d}t' = \zeta + c\,(F(\zeta))\,(t - t_0), \tag{4.19}$$

da cui si ottiene

$$v = F(\xi - c(v)(t - t_0)). \tag{4.20}$$

Come esempio, si consideri per $c(v)$ la funzione localizzata data dalla lorentziana

$$c(v) = \frac{1}{1+v^2} \tag{4.21}$$

(in Figura 4.1), come dato iniziale la gaussiana $F(\xi) = de^{-\xi^2/4}$ (Figura 4.2) ed $n = 2$. Si definisce il problema di Cauchy

$$v_t + \tfrac{1}{1+v^2} v_\xi + \tfrac{1}{2t} v = 0 \tag{4.22}$$

$$F(\xi) = de^{-\xi^2/4}, \qquad d = \text{costante} > 0. \tag{4.23}$$

La soluzione del problema si ottiene direttamente dal sistema (4.14), (4.15) al variare di ζ, ed è

$$v = F(\zeta)\left(\frac{t_0}{t}\right)^{1/2} \tag{4.24}$$

$$\xi = \zeta + \int_{t_0}^{t} \frac{1}{F^2(\zeta)\left(\frac{t_0}{t'}\right) + 1} \mathrm{d}t' = \zeta + (t - t_0) - t_0 F^2(\zeta) \ln \frac{|F(\zeta)^2 + t/t_0|}{1 + F(\zeta)^2}. \tag{4.25}$$

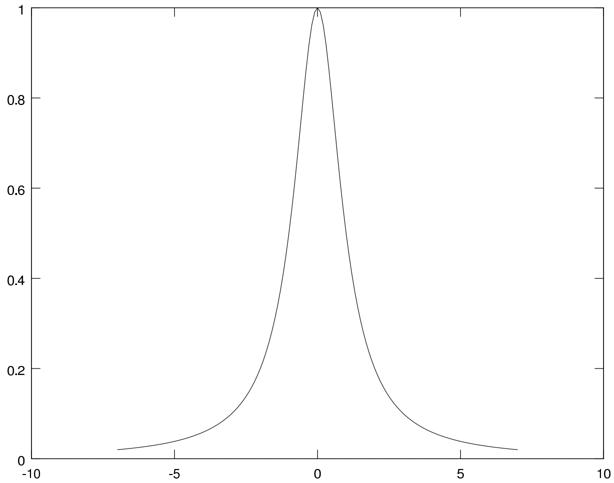

Figura 4.1: Grafico della funzione $c(v) = 1/(1 + v^2)$.

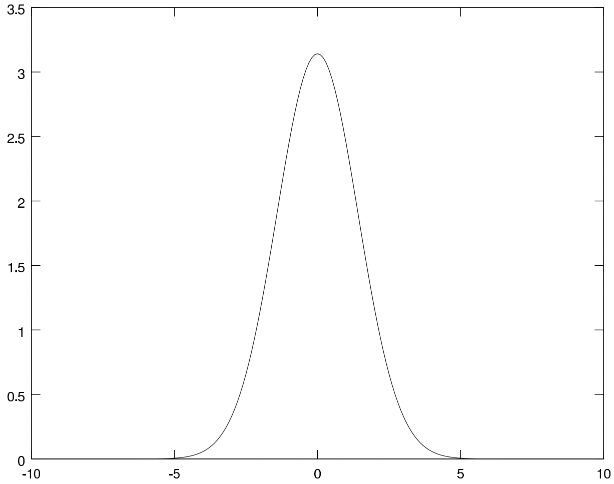

Figura 4.2: Grafico del dato iniziale (4.23) in funzione di ξ con $d = \pi$.

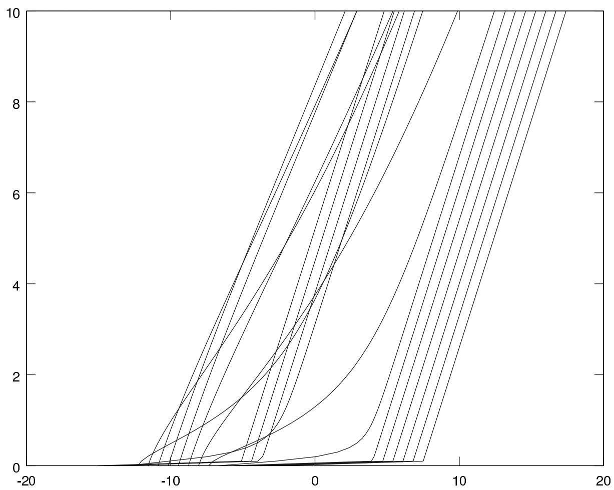

Figura 4.3: Grafico delle caratteristiche (4.25) nel piano (ξ, t).

In Figura 4.3 è presentato il grafico delle caratteristiche (4.25) nel piano (ξ, t).

4.1.2 Il caso $\mathbf{c(u) = u^m}$

Se $c(u) = u^m$, quale forma assume la soluzione?

In questo caso l'equazione di partenza è

$$(u_t + u^m u_x)_x + \triangle_\perp u = 0, \tag{4.26}$$

e la (4.7) si scrive come

$$v_t + v^m v_\xi + \frac{n-1}{2t} v = 0. \tag{4.27}$$

Siccome $c(v) = v^m$, la (4.15) assume la forma

$$\xi = \zeta + \int_{t_0}^{t} F^m(\zeta) \left(\frac{t_0}{t'}\right)^{m\left(\frac{n-1}{2}\right)} \mathrm{d}t', \tag{4.28}$$

in cui per v è stata utilizzata l'espressione (4.14). Integrando l'espressione precedente si giunge alla relazione

$$\xi = \zeta + \frac{2}{2 - m(n-1)} \left[v^m(\xi, t)t - v^m(\xi, t_0)t_0 \right]. \tag{4.29}$$

Da questo risultato è chiaro che la (4.29) è valida se $2 - m(n-1) \neq 0$. Quindi bisogna separare i casi $2 - m(n-1) \neq 0$ dal caso $2 - m(n-1) = 0$.

Si inizia con $2 - m(n-1) \neq 0$. Ricavando ζ dalla (4.29), si ottiene la soluzione della (4.27) in forma implicita attraverso il sistema

$$\zeta = \xi - \frac{2}{2 - m(n-1)} \left[v^m(\xi, t)\, t - v^m(\xi, t_0)\, t_0 \right] \tag{4.30}$$

$$v = \left(\frac{t_0}{t}\right)^{\frac{n-1}{2}} F\left(\xi - \frac{2}{2 - m(n-1)} \left(v^m(\xi, t) t - v^m(\xi, t_0) t_0 \right)\right). \tag{4.31}$$

Se, invece, $2 - m(n-1) = 0$, la soluzione (4.14), (4.15) diventa

$$\zeta = \xi - v^m\, t \ln \frac{t}{t_0} \tag{4.32}$$

$$v = F\left(\xi - v^m\, t \ln \frac{t}{t_0}\right) \left(\frac{t_0}{t}\right)^{\frac{n-1}{2}}. \tag{4.33}$$

Si noti che la situazione $2 - m(n-1) = 0$ si può verificare sole se $(n, m) = (3, 1)$ e $(n, m) = (2, 2)$, poiché n, m sono numeri interi.

A questo punto si è in grado di scrivere la soluzione $u = u(x, \vec{y}, t)$ per l'equazione (4.26), ricordando il cambio di variabile (4.6)

$$u = \begin{cases} \left(\frac{t_0}{t}\right)^{\frac{n-1}{2}} F\left(x + \frac{1}{4t}\sum_{i=1}^{n-1} y_i^2 - \frac{2}{2-m(n-1)} \left(u^m t - (u\,|_{t_0})^m\, t_0 \right)\right) & 2 - m(n-1) \neq 0 \\ \left(\frac{t_0}{t}\right)^{\frac{n-1}{2}} F\left(x + \frac{1}{4t}\sum_{i=1}^{n-1} y_i^2 - u^m t \ln \frac{t}{t_0}\right) & 2 - m(n-1) = 0 \end{cases}. \tag{4.34}$$

Questa soluzione descrive un'onda costante sul paraboloide (4.4), che si rompe simultaneamente in tutti i punti del paraboloide.

Per tempi lunghi, cioè $t \gg t_0$, la soluzione precedente assume la forma

$$u = \begin{cases} t^{-\frac{n-1}{2}} F\left(x + \frac{1}{4t}\sum_{i=1}^{n-1} y_i^2 - \frac{2}{2-m(n-1)} u^m t\right) & 2 - m(n-1) \neq 0 \\ t^{-\frac{n-1}{2}} F\left(x + \frac{1}{4t}\sum_{i=1}^{n-1} y_i^2 - u^m t \ln t\right) & 2 - m(n-1) = 0 \end{cases}. \tag{4.35}$$

E' interessante notare che si può giungere all'espressione (4.35) a partire dall'equazione (4.27) attraverso il cambio di variabile

$$v(\xi, t) = t^{-\frac{n-1}{2}} q(\xi, \tau), \tag{4.36}$$

in cui

$$\tau(t) = \begin{cases} \frac{2}{2-m(n-1)}\, t^{\frac{2-m(n-1)}{2}} & 2 - m(n-1) \neq 0 \\ \ln t & 2 - m(n-1) = 0 \end{cases}, \tag{4.37}$$

che trasforma la (4.27) nell'equazione di Riemann $q_\tau + q^m q_\xi = 0$, la cui soluzione generale

$$q = F(\xi - q^m \tau) \tag{4.38}$$

coincide con la (4.35). Si noti infine che, per $m = 1$, la (4.35) si riduce alla soluzione costruita in [39].

4.2 Il problema di Cauchy per piccoli dati iniziali

In analogia con quanto fatto in [39], si vuole ora sfruttare la soluzione esatta (4.35) della $dKP_{n,m}$ per costruire una soluzione asintotica del suo problema di Cauchy per piccoli dati iniziali, e si vuole utilizzare questo risultato per chiarire se tali dati iniziali vadano incontro a rottura, per opportuni valori dei parametri (n, m).

Si consideri, quindi, il problema di Cauchy per l'equazione $dKP_{n,m}$

$$(u_t + u^m u_x)_x + \triangle_\perp u = 0, \tag{4.39}$$

$$\triangle_\perp := \sum_{i=1}^{n-1} \partial^2_{y_i} \quad n \geq 2$$

con dato iniziale piccolo, ovvero tale che

$$u(x, \vec{y}, 0) = \epsilon u_0(x, \vec{y}), \tag{4.40}$$

in cui $0 < \epsilon \ll 1$. Per studiare l'evoluzione di un'onda descritta dalla (4.39) si dovrà tener conto dell'effetto della non linearità: i termini non lineari presenti nelle equazioni sono responsabili della rottura dell'onda stessa ad un certo tempo critico τ_b. Quindi lo studio del problema di Cauchy dovrà articolarsi in due fasi: una prima fase in cui la non linearità può essere trascurata e la soluzione del problema è essenzialmente descritta dalla soluzione del problema linearizzato; una seconda fase, per tempi sufficientemente lunghi, in cui invece la non linearità è rilevante e conduce eventualmente a fenomeni di rottura dell'onda.

Per il dato iniziale (4.40) il tempo critico è dell'ordine $\tau_b = O(\epsilon^{-m}) \gg 1$, come risulta utilizzando la (2.25) e, considerando per τ la (4.37), il tempo in cui si manifesta la non linearità è

$$t \simeq \tau^{-1}(\epsilon^{-m}) = \begin{cases} \epsilon^{-\frac{2m}{2-m(n-1)}}, & 2 - m(n-1) \neq 0 \\ \mathrm{e}^{\epsilon^{-m}}, & 2 - m(n-1) = 0 \end{cases} \tag{4.41}$$

dove per τ^{-1} si intende la funzione inversa della (4.37).

Quindi per tempi $t \ll \tau^{-1}(\epsilon^{-m})$ la soluzione del problema di Cauchy sarà approssimata dalla soluzione della (4.39) linearizzata, mentre per tempi $t \sim \tau^{-1}(\epsilon^{-m})$ la soluzione sarà l'approssimata della (4.35). Si noti che $\tau^{-1}(\epsilon^{-m}) \gg 1$ se e solo se $2 \geq m(n-1)$.

4.2.1 Il regime lineare

Nel regime lineare, ovvero per $1 \ll t \ll O(\tau^{-1}(\epsilon^{-m}))$, la soluzione alla (4.39) è ben descritta dalla soluzione della $dKP_{n,m}$ linearizzata,

$$u(x, \vec{y}, t) \sim \frac{\epsilon}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}_0(k_1, \vec{k}_\perp) \exp\left[\imath(k_1 x + \vec{k}_\perp \cdot \vec{y} - \frac{k_\perp^2}{k_1} t)\right] \mathrm{d}k_1 \mathrm{d}\vec{k}_\perp \quad (4.42)$$

in cui

$$\hat{u}_0(k_1, \vec{k}_\perp) = \int_{\mathbb{R}^n} u_0(x, \vec{y}) \exp\left[-\imath(k_1 x + \vec{k}_\perp \cdot \vec{y})\right] \mathrm{d}x \mathrm{d}\vec{y}.$$

Poiché si stanno considerando tempi $t \gg 1$, è possibile valutare asintoticamente l'integrale nella (4.42) attraverso il metodo della fase stazionaria (si veda l'appendice B) da cui si ottiene l'espressione

$$u(x, \vec{y}, t) \sim t^{-\frac{n-1}{2}} \epsilon G\left(x + \frac{1}{4t} \sum_{i=1}^{n-1} y_i^2, \frac{\vec{y}}{2t}\right), \quad (4.43)$$

dove [39]

$$G(\xi, \vec{\eta}) := \frac{1}{(2\pi)^n} \pi^{\frac{n-1}{2}} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}k_1 |k_1|^{\frac{n-1}{2}} \hat{u}_0\left(k_1, \vec{\eta} k_1\right) \exp\left[\imath k_1 \xi - \imath(n-1)\frac{\pi}{4} \mathrm{sgn}(k_1)\right]. \quad (4.44)$$

Questa espressione è valida nella regione spazio-temporale individuata da

$$1 \ll t \ll O(\tau^{-1}(\epsilon^{-m})), \qquad (x-\xi)/t,\ y_i/t = O(1), \quad i = 1, \ldots, n-1. \quad (4.45)$$

4.2.2 Il regime non lineare

Ragionando come in [39], quando la non linearità non è più trascurabile, cioè per tempi $t \sim O(\tau^{-1}(\epsilon^{-m}))$, sarà la soluzione esatta (4.35) a giocare un ruolo rilevante nello sviluppo asintotico del regime non lineare. Raccordando quest'espressione con la (4.43) del regime lineare, si ottiene la soluzione approssimata $u(x, \vec{y}, t) \sim u_{n,m}^{as}(x, \vec{y}, t)$ con

$$u_{n,m}^{as}(x, \vec{y}, t) \equiv \begin{cases} t^{-\frac{n-1}{2}} \epsilon G\left(x + \frac{1}{4t}\sum_{i=1}^{n-1} y_i^2 - \frac{2}{2-m(n-1)} u^m t, \frac{\vec{y}}{2t}\right) & 2 - m(n-1) \neq 0 \\ t^{-\frac{n-1}{2}} \epsilon G\left(x + \frac{1}{4t}\sum_{i=1}^{n-1} y_i^2 - u^m t \ln t, \frac{\vec{y}}{2t}\right) & 2 - m(n-1) = 0. \end{cases} \quad (4.46)$$

La domanda alla quale si vuole adesso rispondere è se la (4.46) descriva o no la rottura dell'onda e quali condizioni comportano la sua rottura. Per fare questo si devono studiare i termini non lineari dell'espressione precedente, cioè $u^m t$ per $2 - m(n-1) \neq 0$ e $u^2 t \ln t$ per $2 - m(n-1) = 0$, ottenendo

- per $2-m(n-1)\neq 0$ $\qquad u^m t\sim t^{\frac{2+m-mn}{2}}$;
- per $2-m(n-1)=0$ $\qquad u^2 t\ln t\sim \ln t$.

Si nota quindi che la non linearità per tempi lunghi provoca la rottura, al variare di m e n, nei seguenti casi

$n=1$	$n=2$	$n=3$
$\forall m$	$m=1,2$	$m=1$

(4.47)

I casi $n=1$, $(n,m)=(2,1)$ e $(n,m)=(3,1)$ sono già stati studiati [39]; non ancora studiato è il caso $(n,m)=(2,2)$, corrispondente all'equazione

$$\left(u_t+u^2u_x\right)_x+u_{yy}=0 \tag{4.48}$$

ed alla soluzione asintotica

$$u\simeq u^{as}(x,y,t)=\frac{1}{\sqrt{t}}\epsilon G\left(x+\frac{y^2}{4t}-u^2t\ln t,\frac{y}{2t}\right), \tag{4.49}$$

e questo verrà fatto nel presente lavoro.

Si conclude notando che, per un dato iniziale u_0 gaussiano

$$u_0(x,y)=d_n\exp\left[-\frac{x^2+y^2}{4}\right], \tag{4.50}$$

con d_n costante, la soluzione asintotica (4.46) si scrive in termini di funzioni speciali, ottenendo per $G(\xi,\vec{\eta})$ l'espressione [39]

$$\begin{aligned} G(\xi,\vec{\eta}) \;=\; & \frac{d_n}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{(1+\eta^2)^{\frac{n+1}{4}}}\left[\cos\frac{\pi(n-1)}{4}\Gamma\left(\frac{n+1}{4}\right)\;{}_1F_1\left(\frac{n+1}{4};\frac{1}{2};-\frac{Y^2}{4}\right)+\right.\\ & \left.+\;\sin\frac{\pi(n-1)}{4}Y\Gamma\left(\frac{n+3}{4}\right)\;{}_1F_1\left(\frac{n+3}{4};\frac{3}{2};-\frac{Y^2}{4}\right)\right], \\ Y \;:=\; & \frac{\xi}{\sqrt{1+\eta^2}}, \end{aligned} \tag{4.51}$$

dove Γ rappresenta la funzione Gamma di Eulero e ${}_1F_1$ la funzione ipergeometrica confluente di Kummer [7, 8], scritta utilizzando la seguente rappresentazione integrale

$${}_1F_1(a,b,-z)=\frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)}z^{\frac{1}{2}-\frac{b}{2}}\int_0^{+\infty}e^{-t}\,t^{a-\frac{b}{2}-\frac{1}{2}}J_{b-1}(2\sqrt{tz})\;\mathrm{d}t, \tag{4.52}$$

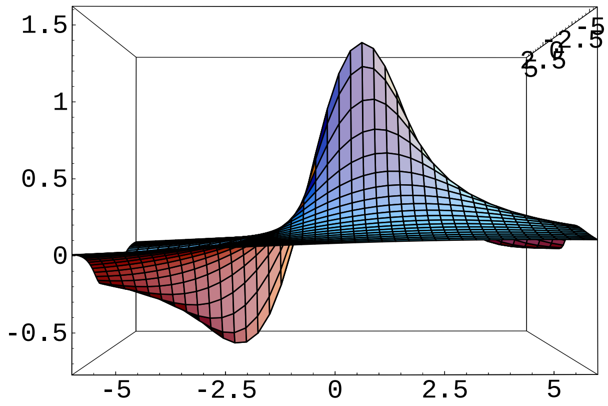

Figura 4.4: Grafico della funzione (4.53).

in cui J_ν sono le funzioni di Bessel [7, 52, 53]. In particolare, si sfruttano le relazioni [53]

$$J_{\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,\sin z$$
$$J_{-\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,\cos z.$$

Per $n = 2$, scegliendo $d_2 = \sqrt{2\pi}$, si ha

$$\begin{aligned} G(\xi, \eta) = \left(1 + \eta^2\right)^{-\frac{3}{4}} \Bigg[& \Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\ {}_1F_1\left(\frac{3}{4}; \frac{1}{2}; -\frac{Y^2}{4}\right) + \\ & + Y\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)\ {}_1F_1\left(\frac{5}{4}; \frac{3}{2}; -\frac{Y^2}{4}\right)\Bigg], \end{aligned} \tag{4.53}$$

il cui grafico è riportato in Figura 4.4.

4.2.3 Stima dell'errore

Prima di procedere è bene soffermarsi un attimo per domandarsi quale sia l'errore commesso nell'approssimare la soluzione esatta del problema di Cauchy con la (4.46). Si dimostra che l'errore è dell'ordine t^{-1}.

Si consideri ad esempio il caso $(m, n) = (2, 2)$. La soluzione (4.46) può essere scritta nella forma

$$w \simeq \epsilon G(\xi - w^2\tau, \eta) \tag{4.54}$$

attraverso il cambio di variabili

$$w = u\sqrt{t}, \qquad \xi = x + \frac{1}{4t}y^2, \qquad \eta = \frac{y}{2t}, \qquad \tau = \ln t. \tag{4.55}$$

Per stimare l'errore si scrive la w nella forma

$$w = \epsilon G(\xi - w^2\tau, \eta) + H(\xi, \eta, \tau) \tag{4.56}$$

in cui H rappresenta la correzione di cui si vuole stimare la grandezza. Inserendo la (4.56) all'interno della dKP con $(n, m) = (2, 2)$ si ottiene un'equazione per il termine H,

$$\left(\frac{H_\tau + \epsilon^2 G^2 H_\xi}{1 + 2\tau\epsilon^2 G_\zeta G}\right)_\xi + \frac{1}{4t}\left(\frac{\epsilon G_\eta}{1 + 2\tau\epsilon^2 G_\zeta G}\right)_\eta = 0 \tag{4.57}$$

con $\zeta = \xi - w^2\tau$. Dalla definizione di τ nella (4.55) e ricordando la (4.41) risulta che $\tau = O(\epsilon^{-2})$: si definisce quindi $\tau = \tilde{\tau}/\epsilon^2$. Ponendo anche $H = \epsilon t^{-1}\tilde{H}$ l'equazione precedente assume la forma

$$\left(\frac{-\tilde{H}}{1 + 2\tilde{\tau} G_\zeta G}\right)_\xi + \frac{1}{4}\left(\frac{G_\eta}{1 + 2\tilde{\tau} G_\zeta G}\right)_\eta = 0\,, \tag{4.58}$$

cioè un'equazione di ordine 1 per la funzione $\tilde{H}$. Quindi la u sarà

$$u = \frac{1}{\sqrt{t}}w = \frac{1}{\sqrt{t}}(\epsilon G + H) \simeq \frac{\epsilon}{\sqrt{t}}(G + \frac{1}{t}\tilde{H}) \tag{4.59}$$

che mostra come la correzione al termine dominante G sia di ordine $1/t$.

4.3 Studio della rottura

Per determinati valori di n e m la soluzione del problema di Cauchy va incontro a rottura ad un tempo t_b dato dalla (4.41). Si vuole adesso studiare come avviene la rottura dell'onda, prendendo in esame il caso $(n, m) = (2, 2)$, in quanto gli altri sono già stati studiati in [39].

Si riscrive per comodità la soluzione approssimata (4.49) come

$$\begin{aligned} w &\sim \epsilon G(\zeta, \eta) \\ \xi &= \epsilon^2 F(\zeta, \eta)\tau + \zeta, \qquad F(\zeta, \eta) := (G(\zeta, \eta))^2\,, \end{aligned} \tag{4.60}$$

avendo utilizzato il cambio di variabili (4.55) e $\zeta = \xi - w^2\tau$. In questo modo la funzione w soddisfa l'equazione di Riemann $w_\tau + w^2 w_\xi = 0$; si ha quindi l'evoluzione di un'onda localizzata nel piano (ξ, η) rispetto all'equazione di Riemann $1+1$-dimensionale.

Risolvendo la seconda delle (4.60) rispetto a ζ e sostituendo il risultato nella prima si ottiene l'espressione della soluzione $w \sim \epsilon G(\zeta(\xi, \eta, \tau), \eta)$. Ovviamente, affinché questo sia possibile si deve poter invertire la seconda delle (4.60) rispetto a ζ, il che si traduce nella richiesta che la derivata rispetto a ζ di quest'equazione sia diversa da zero. Viceversa, si ottengono singolarità. Si definisce quindi la **varietà delle singolarità** $\mathcal{S}$ come

$$\mathcal{S} \equiv 1 + \epsilon^2 F_\zeta \tau = 0. \tag{4.61}$$

Poiché

$$\nabla_{(\zeta,\eta)} w = \frac{\epsilon \nabla_{(\xi,\eta)} G(\zeta, \eta)}{1 + \epsilon^2 F_\zeta \tau}, \tag{4.62}$$

sulla varietà $\mathcal{S}$ la (4.62) diventa infinita e ha luogo la rottura dell'onda, in analogia con quanto esposto nel paragrafo (2.1.2). Dalla (4.61) si ricava il primo tempo di rottura ed i parametri caratteristici corrispondenti $\vec{\zeta}_b = (\zeta_b, \eta_b)$:

$$\tau_b = -\frac{1}{\epsilon^2 F_\zeta(\zeta_b, \eta_b)} := \inf\left(-\frac{1}{\epsilon^2 F_\zeta(\zeta, \eta)}\right) > 0, \qquad F_\zeta < 0 \tag{4.63}$$

caratterizzato dalle equazioni:

$$F_{\zeta\zeta} = F_{\zeta\eta} = 0 \tag{4.64}$$

$$\alpha \equiv F_{\zeta\zeta\zeta} F_{\zeta\eta\eta} - (F_\zeta)^2_{\zeta\eta} > 0, \qquad F_{\zeta\zeta\zeta} > 0. \tag{4.65}$$

Per comodità di scrittura nelle (4.64) e (4.65) è stato sottinteso che le funzioni sono calcolate nel punto di rottura (ζ_b, η_b) e si adotterà questa convenzione anche nel seguito laddove non altrimenti specificato.

Per studiare il comportamento dell'onda vicino al punto di rottura si sviluppano le equazioni (4.60) per

$$\xi = \xi_b + \xi', \quad \eta = \eta_b + \eta', \quad \zeta = \zeta_b + \zeta', \quad \tau = \tau_b + \tau', \tag{4.66}$$

dove $\xi', \eta', \zeta', \tau'$ sono piccoli. Tenendo conto che

$$\xi_b = \epsilon^2 \tau_b F + \zeta_b \tag{4.67}$$

e utilizzando le (4.63)-(4.64), la seconda delle (4.60) assume la forma della cubica

$$\zeta'^3 + a(\eta')\zeta'^2 + b(\eta', \tilde{\tau})\zeta' - \gamma X(\eta', \xi', \tilde{\tau}) = 0 \tag{4.68}$$

in cui

$$\begin{array}{l}\gamma = \frac{6|F_\zeta|}{F_{\zeta\zeta\zeta}} \\ a(\eta') = \frac{3}{F_{\zeta\zeta\zeta}} F_{\zeta\zeta\eta}\eta', \\ b(\eta', \tilde{\tau}) = \frac{3}{F_{\zeta\zeta\zeta}} \left(F_{\zeta\eta\eta}\eta'^2 + 2F_\zeta\tilde{\tau}\right) \\ X(\xi', \eta', \tilde{\tau}) = \xi' - \frac{F_\eta}{|F_\zeta|}\eta' - \frac{F}{|F_\zeta|}\tilde{\tau} - \frac{1}{2|F_\zeta|}F_{\eta\eta}\eta'^2 - \frac{F_\eta}{|F_\zeta|}\tilde{\tau}\eta' - \frac{1}{6|F_\zeta|}F_{\eta\eta\eta}\eta'^3\end{array} \tag{4.69}$$

dove

$$\tilde{\tau} \equiv \frac{\tau'}{\tau_b} \tag{4.70}$$

e dove per il massimo bilancio

$$|\zeta'|, |\eta'| = O(|\tilde{\tau}|^{1/2}), \qquad |X| = O(|\tilde{\tau}|^{3/2}). \tag{4.71}$$

Le soluzioni della (4.68) si calcolano dalle formule di Cardano-Tartaglia e hanno l'espressione

$$\begin{array}{rl}\zeta_0'(\xi, \eta, \tilde{\tau}) & = -\frac{a}{3} + (\mathcal{A}_+)^{\frac{1}{3}} + (\mathcal{A}_-)^{\frac{1}{3}}, \\ \zeta_\pm'(\xi', \eta', \tilde{\tau}) & = -\frac{a}{3} - \frac{1}{2}\left((\mathcal{A}_+)^{\frac{1}{3}} + (\mathcal{A}_-)^{\frac{1}{3}}\right) \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\imath\left((\mathcal{A}_+)^{\frac{1}{3}} - (\mathcal{A}_-)^{\frac{1}{3}}\right),\end{array} \tag{4.72}$$

con

$$\mathcal{A}_\pm = R \pm \sqrt{\Delta} \tag{4.73}$$

in cui il discriminante Δ è

$$\Delta = R^2 + Q^3 \tag{4.74}$$

e

$$\begin{aligned}Q(\eta, \tilde{\tau}) = \frac{3b - a^2}{9} &= -\frac{2|F_\zeta|\tilde{\tau}}{F_{\zeta\zeta\zeta}} + \frac{1}{F_{\zeta\zeta\zeta}^2}\left[F_{\zeta\zeta\zeta}F_{\zeta\eta\eta} - F_{\zeta\zeta\eta}\right]\eta'^2 = \\ &= -\frac{2|F_\zeta|\tilde{\tau}}{F_{\zeta\zeta\zeta}} + \frac{\alpha}{F_{\zeta\zeta\zeta}^2}\eta'^2\end{aligned} \tag{4.75}$$

$$R(\xi', \eta', \tilde{\tau}) = \frac{\gamma}{2}X(\eta', \xi', \tilde{\tau}) + \frac{ab}{18} + \frac{a}{3}Q(\eta', \tilde{\tau}), \tag{4.76}$$

dove α è la forma quadratica definita nella (4.65).

Analogamente, si sviluppa la (4.61) nell'intorno del punto di rottura e si ottiene l'espressione

$$\mathcal{S}(\zeta', \eta', \tilde{\tau}) = -\tilde{\tau} + \frac{1}{2|F_\zeta|}\left[2F_{\zeta\zeta\eta}\zeta'\eta' + F_{\zeta\zeta\zeta}\zeta'^2 + F_{\zeta\eta\eta}\eta'^2\right]. \tag{4.77}$$

4.3.1 Prima della rottura, $\tau < \tau_b$

Per tempi precedenti alla rottura, la cubica (4.68) ha soltanto la soluzione reale $\zeta' = \zeta'_0$ come si evince dalle (4.72): $\tau < \tau_b$ e di conseguenza $\tilde{\tau} < 0$, inoltre il parametro Q è positivo grazie alla richiesta di positività del determinante Hessiano (4.65). Quindi esiste una sola soluzione $w = \epsilon G(\zeta_b + \zeta'_0)$.

Per ricavare l'espressione di w prima della rottura dell'onda, si restringe ulteriormente la regione in esame e la cubica (4.68) si riduce all'equazione lineare

$$b\zeta' = \gamma X. \tag{4.78}$$

Poiché

$$w = \epsilon G(\zeta_b + \zeta', \eta_b + \eta') \simeq \epsilon G + \epsilon G_\zeta \zeta', \tag{4.79}$$

ricavando ζ' dalla (4.78), con $b \sim \frac{6F_\zeta}{F_{\zeta\zeta\zeta}}\tilde{\tau}$ e $X \sim \xi' + \frac{F_\eta}{F_\zeta}\eta' + \frac{F}{F_\zeta}\tilde{\tau} = \xi' + \frac{G_\eta}{G_\zeta}\eta' + \frac{G}{2G_\zeta}\tilde{\tau}$, e sostituendolo nella (4.79), si ottiene

$$w \sim \frac{\epsilon G}{2} + \frac{\xi' + \frac{G_\eta}{G_\zeta}\eta'}{2\epsilon G \tau'}. \tag{4.80}$$

Ricordando, dalla (4.79), che $w \sim \epsilon G$, l'equazione (4.80) diventa

$$w^2 \sim \frac{\xi' + \frac{G_\eta}{G_\zeta}\eta'}{\tau'},$$

che implica

$$w \sim \sqrt{\frac{\xi' + \frac{G_\eta}{G_\zeta}\eta'}{\tau'}}. \tag{4.81}$$

Si noti che la soluzione approssimata (4.81) è in realtà una soluzione di similarità **esatta** dell'equazione di Riemann $w_{\tau'} + w^2 w_{\xi'} = 0$. Dalla (4.81) si calcola il gradiente di w

$$\nabla_{\xi,\eta} w \sim \frac{1}{2\sqrt{\tau'\left(\xi' + \frac{G_\eta}{G_\zeta}\right)}}\left(1, \frac{G_\eta}{G_\zeta}\right), \tag{4.82}$$

che come si vede tende ad esplodere per $\tau \to \tau_b$.

Nel limite $\tau \to \tau_b$ si può considerare anche un differente bilancio per le grandezze ξ', η' e τ': se ξ', η' sono dello stesso ordine mentre $\tau' \leq O(|\eta'|)$, la cubica (4.68) si riduce alla $\zeta'^3 = \gamma X$, per cui le espressioni per la soluzione w e per il suo gradiente saranno

$$w \sim \epsilon G(\zeta_b + \sqrt[3]{\gamma X(\xi', \eta', \tilde{\tau}}, \eta_b + \eta') \tag{4.83}$$

$$\nabla_{\xi,\eta} w \sim \frac{1}{3}\frac{\sqrt[3]{\gamma}}{\sqrt[3]{X^2(\xi', \eta', \tilde{\tau})}}\epsilon \nabla_{\xi,\eta} G. \tag{4.84}$$

4.3.2 Alla rottura, $\tau = \tau_b$

La descrizione di quanto avviene per $\tau = \tau_b$ si avvale ancora della cubica (4.68), che se $|\xi'/\eta'| = O(1)$ assume la forma $\zeta'^3 = \gamma X$; in tal caso le (4.83),(4.84) diventano

$$w \sim \epsilon G(\zeta_b + \sqrt[3]{\gamma X(\xi', \eta', 0)}, \eta_b + \eta') \tag{4.85}$$

$$\nabla_{\xi,\eta} w \sim \frac{1}{3} \frac{\sqrt[3]{\gamma}}{\sqrt[3]{X^2(\xi', \eta', 0)}} \epsilon \nabla_{\xi,\eta} G. \tag{4.86}$$

L'espressione di $X(\xi', \eta', 0)$ si legge nella (4.69) ed è $X(\xi', \eta', 0) = \xi' - \frac{F_\eta}{|F_\zeta|}\eta'$ se $\xi' \propto \eta'$ ma $\xi' \neq (G_\eta/G_\zeta)\eta'$, mentre $X(\xi', \eta', 0) = -\frac{1}{2|F_\zeta|}F_{\eta\eta}\eta'^2$ se $\xi' = (G_\eta/G_\zeta)\eta'$.

4.3.3 Dopo la rottura, $\tau > \tau_b$

Per $\tau > \tau_b$ la cubica (4.68) ha tre soluzioni reali e w può assumere quindi i tre valori

$$w_0 = \epsilon G(\zeta_b + \zeta_0', \eta), \qquad w_+ = \epsilon G(\zeta_b + \zeta_+', \eta), \qquad w_- = \epsilon G(\zeta_b + \zeta_-', \eta), \tag{4.87}$$

in analogia con quanto detto al paragrafo 2.1.2.

La varietà singolare $\mathcal{S} = 0$ ha l'espressione

$$2|F_\zeta|\tilde{\tau} = 2F_{\zeta\zeta\eta}\zeta'\eta' + F_{\zeta\zeta\zeta}\zeta'^2 + F_{\zeta\eta\eta}\eta'^2 \tag{4.88}$$

e descrive un paraboloide ellissoidale nello spazio $(\zeta', \eta', \tilde{\tau})$.

Eliminando ζ' dalle (4.88) e (4.68) si ottiene l'equazione per la varietà $\mathcal{S}$ nello spazio (ξ', η', τ'), relazione che coincide con la richiesta che il discriminante Δ nella (4.74) sia nullo, ovvero $R^2 = -Q^3$. La varietà singolare (4.88) separa quindi lo spazio in zone in cui il discriminante Δ è positivo, negativo e nullo: in particolare

1. $\Delta > 0$ all'esterno della varietà singolare, la soluzione reale w è la soluzione monodroma $w = \epsilon G(\zeta_b + \zeta_0', \eta)$;

2. $\Delta < 0$ all'interno della varietà singolare, la soluzione w è a tre valori corrispondenti alla (4.87);

3. $\Delta = 0$ sulla varietà singolare. In questo caso bisogna distinguere due situazioni

- il discriminante si annulla perché $R^2 = -Q^3$: la cubica (4.68) ha tre soluzioni due delle quali coincidenti, cioè ζ'_+ e ζ'_-. Corrispondentemente la w è a due valori $w_0 = \epsilon G(\zeta_b + \zeta'_0, \eta)$ e $w_+ = w_- = \epsilon G(\zeta_b + \zeta'_+, \eta)$;
- il discriminante si annulla perché $Q = 0, R = 0$: la cubica ha tre soluzioni coincidenti e queste hanno luogo sulle cuspidi della varietà singolare, le cui coordinate nel piano (ξ', η') sono individuate dalle condizioni $Q = 0$ e $R = 0$ e sono

$$(\xi', \eta')_\pm = \pm\sqrt{-\frac{2|F_\zeta|F_{\zeta\zeta\zeta}}{\alpha}} \left(\frac{G_\eta}{G_\zeta}, 1\right) \sqrt{\tilde{\tau}} \tag{4.89}$$

  dove α è la forma quadratica definita nella (4.65). Si noti che, in $1+1$ dimensioni, non è possibile avere tre soluzioni coincidenti.

Tutta l'analisi svolta si trasferisce in modo diretto alla dKP (4.48), grazie all'invertibilità delle trasformazioni (4.55) per $t \neq 0$:

$$u = \frac{1}{\sqrt{t}} w, \qquad x = \xi - \eta^2 e^\tau, \qquad y = 2\eta e^\tau, \qquad t = e^\tau. \tag{4.90}$$

In particolare, le coordinate spazio-temporali del punto di rottura sono

$$t_b = e^{\tau_b}, \qquad (x_b, y_b) = \left(\xi_b - \eta_b^2 e^{\tau_b}, 2\eta_b e^{\tau_b}\right) \tag{4.91}$$

sul fronte d'onda parabolico $\xi_b = x + \frac{y^2}{4t_b}$.

4.3.4 Esempio

Come esempio, si consideri la funzione $G(\xi, \eta)$ data dalla (4.53) e graficata in Figura 4.4. L'evoluzione è descritta dal sistema (4.60). La velocità di propagazione è positiva ed entrambi i picchi evolveranno verso destra (si veda il paragrafo 2.1.3).

Il tempo ed i parametri di rottura si ricavano grazie alle formule (4.63), (4.64), (4.65) e risultano

$$\tau_b \sim 14.3, \qquad \zeta_b \sim 1.61, \qquad \eta_b \sim 0, \qquad \xi_b \sim 2.51, \tag{4.92}$$

in cui è stato scelto $\epsilon = 0.2$. In Figura 4.5 si riporta l'evoluzione della funzione per quattro valori successivi del tempo τ: si noti come il profilo del picco superiore diventi verticale per $\tau = \tau_b$.

Il cambio di coordinate (4.55) permette di osservare la funzione nello spazio fisico (x, y, t): la Figura 4.6 mostra il fronte d'onda nel punto di rottura

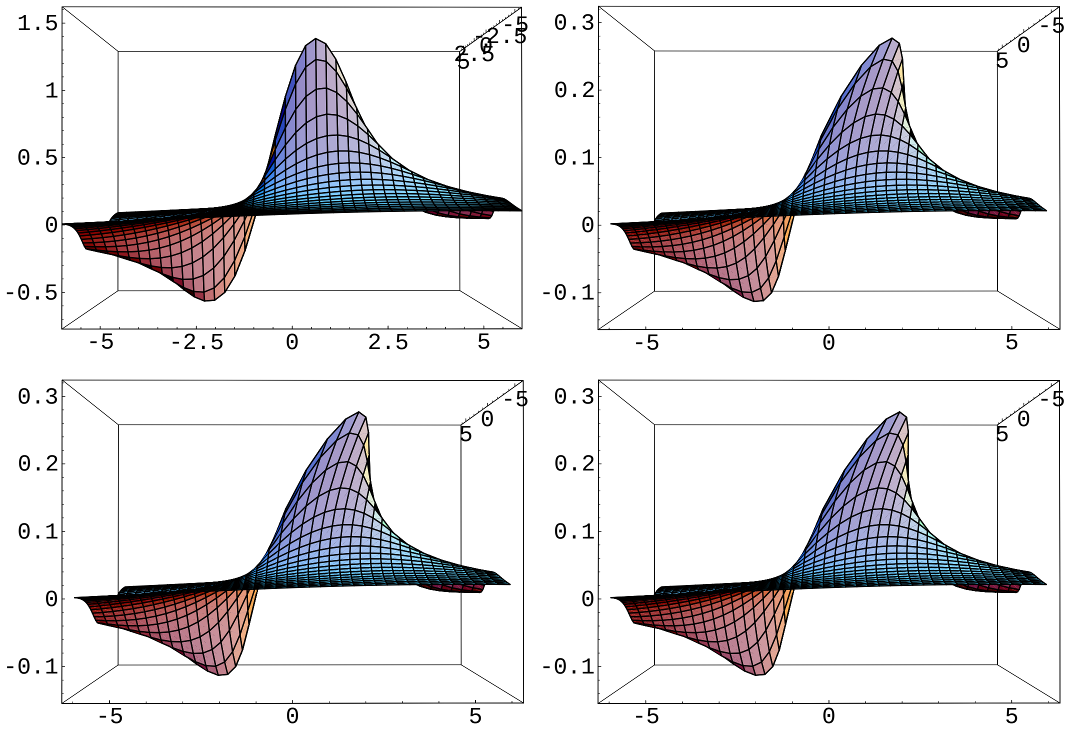

Figura 4.5: Evoluzione di $G(\xi, \eta)$, per $\epsilon = 0.2$, per quattro valori consecutivi del tempo τ: $\tau = 0$, $\tau = \tau_b - 1$, $\tau = \tau_b$ e $\tau = \tau_b + 1.5$.

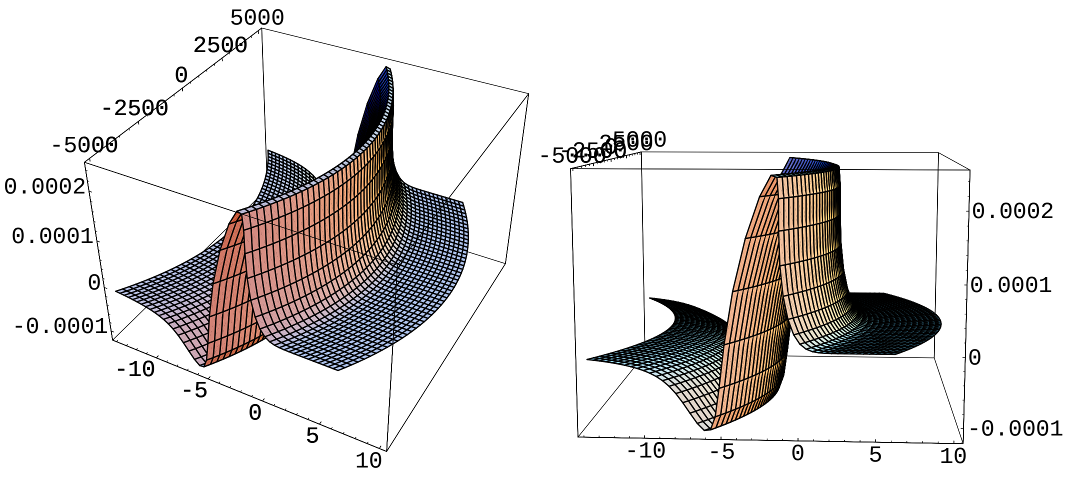

Figura 4.6: Immagini del fronte d'onda parabolico della funzione $G(\xi, \eta)$ data dalla (4.53) per $\epsilon = 0.2$ secondo due prospettive.

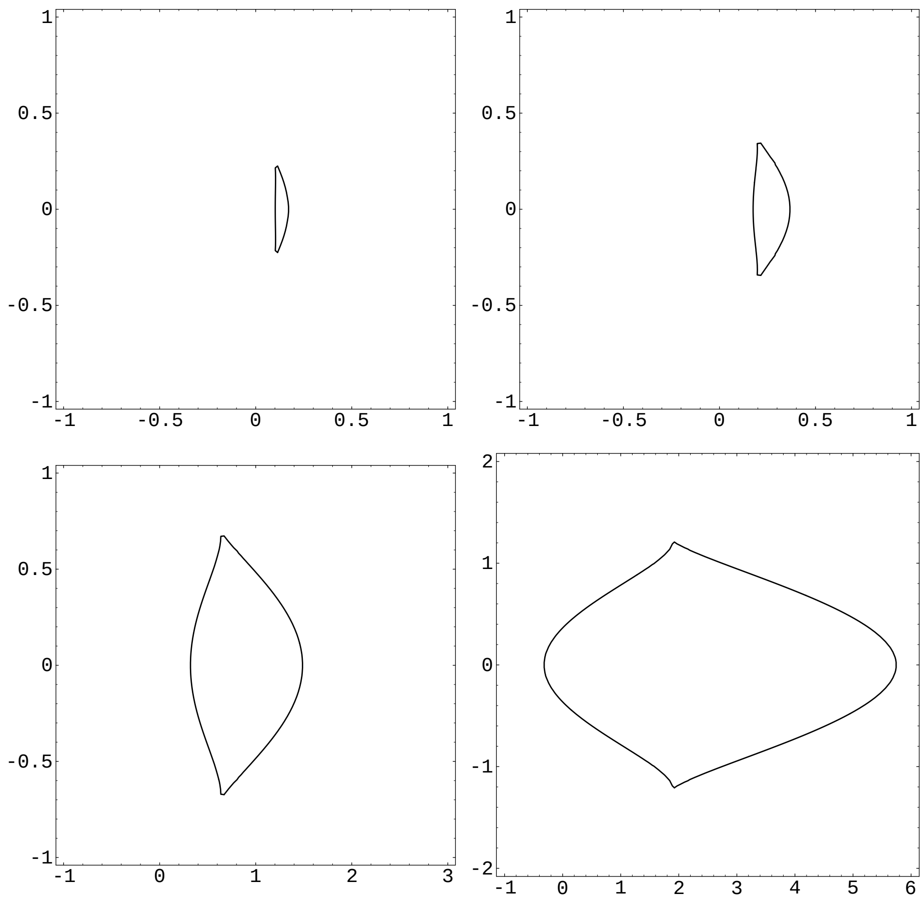

Figura 4.7: Quattro immagini consecutive della regione a tre valori nel piano (ξ', η'), calcolate per $\tilde{\tau} = 0.15$, $\tilde{\tau} = 0.3$, $\tilde{\tau} = 1$ e $\tilde{\tau} = 3$.

(x_b, y_b, t_b). Dalle due immagini si può apprezzare sia la parabolicità del fronte che la verticalità del profilo.

Infine, in Figura 4.7 si mostra l'evoluzione della regione a più valori nel piano (ξ', η') per quattro valori consecutivi della variabile $\tilde{\tau}$ definita in (4.70). Come si osserva, la regione è una curva chiusa delimitata da due cuspidi.

4.4 Regolarizzazione dissipativa e onda d'urto

Per regolarizzare la soluzione dopo il tempo critico τ_b, si può procedere sostituendo la soluzione continua ma polidroma (4.60) con una discontinua ma monodroma: la posizione s della discontinuità è l'incognita da determinare. Poiché $w(\xi, \eta, \tau)$ è soluzione dell'equazione di Riemann $w_\tau + w^2 w_\xi = 0$, le equazioni che descrivono la discontinuità sono ancora le (2.64)-(2.66), che diventano

$$s = \zeta_1 + \epsilon^2 G^2(\zeta_1, \eta)\, \tau = \zeta_2 + \epsilon^2 G^2(\zeta_2, \eta)\, \tau \tag{4.93}$$

$$\frac{\partial s}{\partial \tau} = \frac{\epsilon^2}{3} \left[G^2(\zeta_2, \eta) + G(\zeta_1, \eta) G(\zeta_2, \eta) + G^2(\zeta_1, \eta) \right], \tag{4.94}$$

in cui il pedice 2 indica i valori delle funzioni dietro lo shock e il pedice 1 davanti.

La (4.93) consiste di due equazioni implicite per le ζ_1 e ζ_2, che risolte danno $\zeta_1(s, \eta, \tau)$, $\zeta_2(s, \eta, \tau)$. Sostituendo queste espressioni nella (4.94), si ottiene un'equazione differenziale, non lineare del prim'ordine per s, che, insieme alla condizione iniziale $s|_{\tau_b} = \tau_b$, permette di calcolare $s(\eta, \tau)$, $\zeta_{1,2}(\eta, \tau)$, e quindi la discontinuità. Ricordando quanto detto nel paragrafo 4.3 a pagina 72, dallo sviluppo in serie delle equazioni (4.93) attorno al punto di rottura si ottiene la cubica (4.68): questa fornisce una descrizione esplicita di ciò che accade dopo il tempo critico τ_b. Le relazioni nella (4.93) saranno allora sostituite dalla (4.68), in cui viene fatta la sostituzione $\xi' \to s'$ e dove

$$s'(\eta', \tilde{\tau}) = s - \xi_b. \tag{4.95}$$

Per quanto riguarda i valori ζ_1 e ζ_2, questi saranno scelti tra le tre soluzioni (4.72) in modo che per ζ_2' la $w = \epsilon G(\zeta_b + \zeta_2', \eta)$ abbia il valore massimo e per ζ_1' la $w = \epsilon G(\zeta_b + \zeta_1', \eta)$ abbia il valore minimo. Notando che la funzione w nella zona di interesse ha derivata negativa rispetto a ζ', si avrà che

$$\zeta_1 = \max\{\zeta_0', \zeta_\pm'\} \qquad \zeta_2 = \min\{\zeta_0', \zeta_\pm'\}. \tag{4.96}$$

Per individuare le soluzioni di valore massimo e minimo, si riscrivono le (4.72) nel seguente modo

$$\zeta_0' = -\frac{a}{3} + 2\sqrt[3]{\rho} \cos\left(\frac{\theta}{3}\right), \tag{4.97}$$

$$\zeta_+' = -\frac{a}{3} - \sqrt[3]{\rho} \left(\cos\left(\frac{\theta}{3}\right) + \sqrt{3} \sin\left(\frac{\theta}{3}\right) \right), \tag{4.98}$$

$$\zeta_-' = -\frac{a}{3} - \sqrt[3]{\rho} \left(\cos\left(\frac{\theta}{3}\right) - \sqrt{3} \sin\left(\frac{\theta}{3}\right) \right), \tag{4.99}$$

in cui

$$\rho := \sqrt{R^2 + |\Delta|}, \qquad \theta := \arctan\left(\frac{\sqrt{|\Delta|}}{R} \right). \tag{4.100}$$

Si osserva che, per $0 \leq \theta \leq \pi$, valgono le disuguaglianze

$$-\cos\left(\frac{\theta}{3}\right) - \sqrt{3}\sin\left(\frac{\theta}{3}\right) \leq -\cos\left(\frac{\theta}{3}\right) + \sqrt{3}\sin\left(\frac{\theta}{3}\right) \leq 2\cos\left(\frac{\theta}{3}\right)$$

che implicano

$$\zeta'_+ \leq \zeta'_- \leq \zeta'_0 \Longrightarrow w(\zeta_b + \zeta'_0, \eta) \leq w(\zeta_b + \zeta'_-, \eta) \leq w(\zeta_b + \zeta'_+, \eta), \tag{4.101}$$

essendo w decrescente in ζ. Perciò segue che

$$\zeta'_1(s', \eta', \tau') = \zeta'_0(s', \eta', \tau'), \qquad \zeta'_2(s', \eta', \tau') = \zeta'_+(s', \eta', \tau'). \tag{4.102}$$

Immediatamente dopo la rottura, quindi, il sistema (4.93), (4.94) si riduce all'equazione differenziale non lineare

$$\frac{\partial s'(\eta', \tilde{\tau})}{\partial \tilde{\tau}} = \frac{1}{2}\left|\frac{G(\zeta_b, \eta_b)}{G_\zeta(\zeta_b, \eta_b)}\right| - \frac{1}{2}\left[\zeta'_0(s', \eta', \tilde{\tau}) + \zeta'_+(s', \eta', \tilde{\tau})\right] \tag{4.103}$$

$$s'(\eta', 0) = 0 \tag{4.104}$$

ottenuta sviluppando in serie la (4.94) attorno al punto di rottura e ricordando la definizione $\tilde{\tau} \equiv \tau'/\tau_b$ data in (4.70). Si noti che, nella (4.103), la dipendenza da η' è solo parametrica; quindi la regolarizzazione si realizza, geometricamente, nel seguente modo. Fissato η', si taglia il profilo polidromo con una retta verticale che esclude lobi di ugual area, applicando il criterio introdotto nel capitolo 2. Questa procedura va ripetuta $\forall \eta'$, e fornisce la regolarizzazione dissipativa della $dKP_{2,2}$.

Appendice A

Soluzione generale dell'equazione di Riemann

Si consideri la soluzione

$$u = f(x - c(u)t) \tag{A.1}$$

dell'equazione di Riemann

$$u_t + c(u)u_x = 0. \tag{A.2}$$

Si vuole dimostrare che che la (A.1) è la soluzione generale della (A.2).

Si consideri l'equazione differenziale alle derivate parziali nell'incognita $u = u(x, y)$

$$u_x g_y - u_y g_x = 0 \tag{A.3}$$

in cui $g = g(x, y)$ è una funzione data. Questa può essere interpretata come la richiesta che il determinante Jacobiano

$$\frac{\partial(u, g)}{\partial(x, y)}$$

di u, g rispetto ad x, y sia nullo, come segue dalla definizione stessa di determinante Jacobiano. L'annullarsi di un determinante implica che gli elementi che lo compongono siano dipendenti, quindi nel caso della (A.3) tra u e g esiste una relazione del tipo

$$u = f(g(x, y)), \tag{A.4}$$

per f arbitraria.

Viceversa, ogni funzione u di forma (A.4) soddisfa la (A.3), come si verifica facilmente

$$u_x g_y - u_y g_x = f' g_x g_y - f' g_y g_x = 0.$$

Quindi si può affermare che la soluzione generale della (A.3) è la (A.4).

Lo stesso risultato si ottiene se anche g dipende dall'incognita u, cioè per l'equazione

$$u_x g_y(x,y,u) - u_y g_x(x,y,u) = 0, \qquad g = g(x,y,u), \tag{A.5}$$

dove g_y indica la derivazione parziale rispetto alla sola variabile y. Anche in questo caso lo Jacobiano di u, g rispetto ad x, y si annulla per ogni u, g tali che $u(x,y)$ e $g = g(x,y,u(x,y))$:

$$u_x g_y - u_y g_x = u_x(g_y + g_u u_y) - u_y(g_x + g_u u_x) = 0.$$

Dunque la soluzione della (A.5) è della forma

$$u(x,y) = f(g(x,y,u)), \tag{A.6}$$

con f arbitraria.

Un caso particolare della (A.5) è l'equazione differenziale

$$\alpha(u)u_x - \beta(u)u_y = 0, \tag{A.7}$$

ottenuta scegliendo $g = \alpha(u)y + \beta(u)x$, la cui soluzione generale è

$$u = f(\alpha(u)y + \beta(u)x) \tag{A.8}$$

come si verifica mediante sostituzione nella (A.7). In questa casisitica rientra l'equazione di Riemann (A.2), ponendo $y = t$, $\beta(u) = 1$ e $\alpha(u) = -c(u)$. La soluzione generale è quindi la relazione implicita

$$u = f(x - c(u)t) \tag{A.9}$$

come è stato trovato nel paragrafo 2.1.1 utilizzando il metodo delle caratteristiche.

Appendice B

Valutazione asintotica di integrali: metodo di Laplace, metodo della fase stazionaria e metodo del punto di sella

In questa appendice si vuole dare una valutazione asintotica di integrali del tipo

$$I(x) = \int_a^b e^{xf(z)} g(z)\,\mathrm{d}z$$

nel limite $x \to \infty$.

Se la funzione $f(z)$ è reale o immaginaria pura ed il cammino di integrazione è un intervallo dell'asse reale, i metodi di risoluzione sono rispettivamente il metodo di Laplace ed il metodo della fase stazionaria[1] [54, 55].

B.1 Il metodo di Laplace

Si consideri l'integrale

$$I(x) = \int_a^b e^{xf(t)} g(t)\,\mathrm{d}t, \qquad x, f(t) \in \mathbb{R}. \tag{B.1}$$

Se all'interno dell'intervallo di integrazione $f(t)$ ha un massimo in un punto t_0, per grandi valori di x tale massimo è un picco molto pronunciato. Ci si

[1] Se invece $f(z)$ è complessa ed il cammino di integrazione è una curva γ del piano complesso, si utilizza il metodo del punto di sella [54, 55], che li generalizza.

aspetta quindi che nel limite $x \to \infty$ i contributi all'integrale provengano essenzialmente dall'intorno di t_0. Sviluppando $f(t)$ nell'intorno di t_0

$$f(z) = f(z_0) + \frac{f''(t_0)}{2}(t-t_0)^2 + O[(t-t_0)^3]$$

l'integrale (B.1) assume la forma

$$\begin{aligned} I(x) &\sim g(t_0)e^{xf(t_0)} \int_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} e^{\frac{\pi}{2}f''(t_0)(t-t_0)^2}\mathrm{d}t \sim \\ &\sim g(t_0)e^{xf(t_0)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{\pi}{2}f''(t_0)(t-t_0)^2}\mathrm{d}t = \\ &= \sqrt{\frac{-2\pi}{xf''(t_0)}}g(t_0)e^{xf(t_0)}, \qquad x \to \infty. \end{aligned} \tag{B.2}$$

Nell'estendere l'integrale all'infinito si assume che solo l'intorno del punto di massimo sia rilevante.

Se all'interno dell'intervallo di integrazione esistono più punti di massimo t_j, $j = 1, \ldots, m$ allora si suddivide l'intervallo originale in intervalli che contengano un solo punto di massimo e per ognuno di questi si applica il metodo di Laplace, ottenendo

$$I(x) \sim \sum_{j=1}^{m} \sqrt{\frac{-2\pi}{xf''(t_j)}}g(t_j)e^{xf(t_j)}, \qquad x \to \infty. \tag{B.3}$$

Il contributo dei punti di massimo è dominante rispetto ai contributi degli estremi dell'intervallo di integrazione. Infatti sviluppando $f(t)$ nell'intorno di a

$$f(t) = f(a) + f'(a)(t-a) + O[(t-a)^2]$$

l'integrale assume la forma

$$\begin{aligned} I(x) &\sim \int_a^b e^{x[f(a)+f'(a)(t-a)]}g(a)\mathrm{d}t \sim \\ &\sim g(a)e^{xp(a)} \int_a^{+\infty} e^{x[f'(a)(t-a)]} = \frac{g(a)e^{xf(a)}}{xf'(a)}, \qquad x \to \infty. \end{aligned} \tag{B.4}$$

Come si vede, gli estremi di integrazione danno un contributo dell'ordine $O(x^{-1})$ mentre il punto di massimo è dell'ordine $O(x^{-1/2})$. Nel limite $x \to \infty$ quest'ultimo è dominante.

B.2 Il metodo della fase stazionaria

Si consideri l'integrale

$$I(x) = \int_a^b e^{\imath x\phi(t)} g(t)\,\mathrm{d}t, \qquad x, \phi(t) \in \mathbb{R}. \tag{B.5}$$

Per grandi valori di x, l'integrando oscilla rapidamente dando luogo a contributi che si cancellano reciprocamente su quasi tutto l'intervallo di integrazione. Fanno eccezione i contributi provenienti dagli intorni degli estremi dell'intervallo di integrazione a e b (se sono finiti) e l'intorno di eventuali punti stazionari della funzione $\phi(t)$. Infatti negli estremi di integrazione i contributi non si cancellano per mancanza di simmetria, mentre in un punto stazionario t_0, cioè tale che $\phi'(t_0) = 0$, la fase oscilla più lentamente.

Quali sono i contributi all'integrale degli estremi di integrazione e dei punti stazionari?

Nell'intorno degli estremi di integrazione, ad esempio di a, l'integrando si può esprimere come

$$\exp\{\imath x[\phi(a) + (t-a)\phi'(a)]\}\, g(a)$$

pertanto un integrale indefinito è

$$\frac{\exp\{\imath x[\phi(a) + (t-a)\phi'(a)]\}\, g(a)}{\imath x\phi'(a)}, \qquad \phi'(a) \neq 0. \tag{B.6}$$

Nel limite $t \to a$ la precedente diventa

$$\frac{e^{\imath x\phi(a)}}{\imath x\phi'(a)} \tag{B.7}$$

ed il contributo all'integrale (B.5) dovuto all'estremo inferiore a di integrazione è

$$-\frac{e^{\imath x\phi(a)}}{\imath x\phi'(a)}. \tag{B.8}$$

Analogamente si ricava il contributo all'integrale dell'estremo b

$$\frac{e^{\imath x\phi(b)}}{\imath x\phi'(b)}. \tag{B.9}$$

Nell'intorno del punto stazionario $t_0 \in (a, b)$, invece, l'integrando si approssima come

$$\exp\left\{\imath x[\phi(t_0) + \frac{1}{2}(t-t_0)^2\phi''(t_0)]\right\} g(t_0), \qquad \phi''(t_0), g(t_0) \neq 0$$

poiché in un punto stazionario $\phi'(t_0) = 0$. Quindi se $x \to \infty$

$$\begin{aligned} I(x) &\sim g(0)e^{\imath x\phi(t_0)} \int_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} e^{\imath \frac{x}{2}\phi''(t_0)(t-t_0)^2} \mathrm{d}t \sim \\ &\sim g(0)e^{\imath x\phi(t_0)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\imath \frac{x}{2}\phi''(t_0)(t-t_0)^2} \mathrm{d}t = \\ &= \sqrt{\frac{2\pi}{x|\phi''(t_0)|}}\, g(t_0)\, e^{\imath[x\phi(t_0)+\mathrm{sgn}(\phi''(t_0))\frac{\pi}{4}]}, \qquad x \to \infty \end{aligned} \tag{B.10}$$

in cui nell'estendere gli estremi di integrazione fino all'infinito si considera che solo l'intorno del punto stazionario dia contributo.

Se nell'intervallo di integrazione esistono più punti stazionari $t_j, j = 1, \dots, m$ allora si suddivide l'intervallo $[a, b]$ in intervalli contenenti ciascuno un solo t_j. Per ognuno di tali punti si ha un contributo del tipo (B.10) e quindi

$$I(x) \sim \sum_{j=1}^{m} \sqrt{\frac{2\pi}{x|\phi''(t_j)|}}\, g(t_j)\, e^{\imath[x\phi(t_j)+\mathrm{sgn}(\phi''(t_j))\frac{\pi}{4}]}, \qquad x \to \infty. \tag{B.11}$$

Si nota confrontando le (B.8), (B.9) e (B.10) che il contributo proveniente dai punti stazionari è dominante rispetto al contributo degli estremi di integrazione, essendo la (B.10) di ordine $O(x^{-1/2})$ mentre (B.8), (B.9) di ordine $O(x^{-1})$.

B.2.1 Il metodo della fase stazionaria e la soluzione (4.43)

Nel paragrafo 4.2.1 si utilizza il metodo della fase stazionaria per calcolare l'integrale

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}_0(k_1, \vec{k}_\perp) \exp\left[\imath(k_1 x + \vec{k}_\perp \cdot \vec{y} - \frac{k_\perp^2}{k_1} t)\right] \mathrm{d}k_1 \mathrm{d}\vec{k}_\perp. \tag{B.12}$$

Come è stato detto, il metodo della fase stazionaria si utilizza per valutare asintoticamente un integrale della forma (B.5). In questo caso l'uso del metodo è giustificato se ci si trova nella condizione tale che $1 \ll t \ll O(\tau^{-1}(\epsilon^{-m}))$.

Si definiscano le velocità $v_1, \dots, v_n$ come

$$\frac{x-\xi}{t} =: v_1 = O(1), \qquad \frac{y_j}{t} = v_{j+1} = O(1), \quad j = 1, \dots, n-1. \tag{B.13}$$

La fase di (B.12) assume quindi la forma

$$(k_1x + \vec{k}_\perp \cdot \vec{y} - \frac{k_\perp^2}{k_1}t) = k_1x + k_{\perp 1}y_1 + \cdots + k_{\perp(n-1)}y_{n-1} +$$

$$-\frac{\left(k_{\perp 1}^2 + \cdots + k_{\perp(n-1)}^2\right)t}{k_1} = k_1(v_1t + \xi) + \sum_{j=1}^{n-1}\left(k_{\perp j}v_{j+1} - \frac{k_{\perp j}^2}{k_1}\right)t. \tag{B.14}$$

L'integrale è un integrale multiplo nelle variabili k_1 e $k_{\perp n}$. Si considerino gli integrali nei vettori d'onda trasversi $k_\perp$. Per applicare il metodo della fase stazionaria si definiscono

$$\phi_j(k_{\perp j}) := k_{\perp j}v_{j+1} - \frac{k_{\perp j}^2}{k_1}, \qquad j = 1, \ldots, n-1 \tag{B.15}$$

e si calcolano i punti in cui tali fasi sono stazionarie

$$\phi_j' = v_{j+1} - \frac{2k_{\perp j}}{k_1} = 0 \Rightarrow k_{\perp 1} = \frac{v_{j+1}k_1}{2}, \qquad \phi'' = -\frac{2}{k_1} \tag{B.16}$$

per $j = 1, \ldots n-1$. Quindi, considerando ad esempio l'integrale in dk_1, si ottiene

$$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}k_{\perp 1} e^{\imath\left(k_{\perp 1}v_2 - \frac{k_{\perp 1}^2}{k_1}\right)t}\hat{u}_0(k_1, \vec{k}_\perp) \sim \sqrt{\frac{2\pi|k_1|}{2t}}e^{\imath\left(\frac{v_2^2}{4}k_1t - \frac{\pi}{4}\mathrm{sgn}(k_1)\right)}\hat{u}_0(k_1, \frac{v_1k_1}{2} + \cdots). \tag{B.17}$$

Un contributo analogo a questo si ha per ognuno degli $n-1$ integrali in d$k_{\perp j}$: la (B.12) assume la forma

$$u(x, \vec{y}, t) \sim \frac{\epsilon}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}k_1 \left(\frac{\pi|k_1|}{t}\right)^{\frac{n-1}{2}} e^{\imath\left(k_1(\xi + v_1t) + \frac{v_\perp^2}{4}k_1t - \frac{\pi}{4}(n-1)\mathrm{sgn}(k_1)\right)}\hat{u}_0(k_1, \frac{\vec{v}k_1}{2})$$

dove $v_\perp^2 = v_2^2 + \cdots + v_n^2$. Quindi si giunge all'espressione

$$u(x, \vec{y}, t) \sim \frac{\epsilon}{(2\pi)^n}\left(\frac{\pi}{t}\right)^{\frac{n-1}{2}}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}k_1|k_1|^{\frac{n-1}{2}}\hat{u}_0\left(k_1, \frac{\vec{v}k_1}{2}\right) \cdot$$
$$\cdot e^{\imath k_1\left[\left(\frac{\vec{v}_\perp^2}{4} + v_1\right)t + \xi\right]}e^{-\imath(n-1)\frac{\pi}{4}\mathrm{sgn}(k_1)}. \tag{B.18}$$

Per il lemma di Riemann-Lebesgue, l'integrale (B.18) avrà il massimo contributo quando l'integrando non avrà oscillazioni rapide, cioè quando

$$\frac{\vec{v}_\perp^2}{4} + v_1 = 0$$

da cui, ricordando le definizioni di $v_1, \ldots, v_n$ nella (B.13), si trova che

$$\xi = x + \frac{1}{4t} \sum_{i=1}^{n-1} y_i^2. \tag{B.19}$$

La (B.19) è il paraboloide invariante (4.4) dell'equazione dKP_n. Ciò significa che asintoticamente la soluzione della dKP_n con non linearità arbitraria nel caso di piccoli dati iniziali è concentrata sul paraboloide (B.19).

Appendice C

Il problema RH

In questa appendice si introduce brevemente il problema di Riemann-Hilbert (RH) [56, 12].

Per enunciare il problema RH, sono necessarie alcune definizioni.

Definizione: funzione sezionalmente olomorfa: Una funzione $f(k)$ è detta *sezionalmente olomorfa* se è analitica (olomorfa) su tutto il piano complesso k ad eccezione di discontinuità di salto che si verificano quando f si avvicina a curve, orientate e continue a tratti, che dividono in sezioni il piano. Cioè, se il piano k può essere diviso in sezioni delimitate da curve continue a tratti, all'interno delle quali $f(k)$ è analitica e *sulle* quali la funzione possiede discontinuità di salto, f è detta sezionalmente olomorfa. I valori limite che f assume per k tendente ai due lati delle curve vengono indicati con $f^{\pm}$.

Definizione: grado all'infinito di una funzione sezionalmente olomorfa: Si definisce grado all'infinito di una funzione $f(k)$ sezionalmente olomorfa l'intero n tale che

$$f(k) = ck^n[1 + O(1/k)], \qquad |k| \to \infty \tag{C.1}$$

dove c è una costante non nulla.

Una rappresentazione di una funzione f sezionalmente olomorfa è fornita dal valore del salto di discontinuità $f^+ - f^-$ della funzione sul bordo delle sezioni attraverso le **formule di Plemelj-Sakhotski**. Si consideri una curva Γ, continua e con tangente continua, orientata nel piano complesso k. Sia $g(s)$ una funzione holderiana su Γ, cioè

$$|g(s') - g(s)| < \gamma|s' - s|^{\alpha}, \gamma > 0, \quad 0 < \alpha \leq 1. \tag{C.2}$$

Allora la funzione

$$f(k) = \frac{1}{2\pi\imath} \int_{\Gamma} \mathrm{d}s \frac{g(s)}{s-k} \tag{C.3}$$

è olomorfa in tutto il piano complesso ad eccezione della curva Γ, su cui è discontinua. Le **formule di Plemelj-Sakhotski** forniscono i valori di $f(k)$ al bordo di Γ:

$$f^{\pm}(s) = \frac{1}{2\pi\imath}\mathcal{P}\int_{\Gamma} \mathrm{d}s' \frac{g(s')}{s'-s} \pm \frac{1}{2}g(s), \qquad s \in \Gamma, \tag{C.4}$$

in cui il simbolo $\mathcal{P}$ indica il valor principale dell'integrale e $f^{+}(s)$ $(f^{-}(s))$ sono rispettivamente i limiti di $f(k)$ dalle regioni che si trovano a sinistra (destra) della curva orientata Γ.

Da queste formule segue che il valore del salto di discontinuità di f su Γ è

$$f^{+}(s) - f^{-}(s) = g(s), \qquad s \in \Gamma. \tag{C.5}$$

Un esempio di semplice problema RH scalare, allora, può essere formulato come segue.

Dati

- una curva orientata Γ, continua e con tangente continua,
- una funzione $g(s)$ holderiana su Γ,
- un polinomio $P(k)$ di grado n,
- un insieme di numeri complessi k_m, R_m, $m = 1, 2, \ldots, N$,

trovare la funzione $f(k)$ olomorfa in $\mathbb{C}$, ad eccezione del contorno Γ e dei poli semplici $\{k_m\}$, corrispondenti ai residui R_m, che all'∞ si comporta come $P(k)$ e la cui discontinuità attraverso Γ è data dalla (C.5). E' facile mostrare che la soluzione di questo problema esiste unica, ed è data dalla formula esplicita

$$f(k) = P(k) + \sum_{m=1}^{N} \frac{R_m}{k-k_m} + \frac{1}{2\pi\imath}\int_{\Gamma} \mathrm{d}s \frac{g(s)}{s-k}, \qquad k \notin \Gamma. \tag{C.6}$$

Tutto quanto detto finora si applica anche a funzioni vettoriali complesse. Si può definire, ad esempio, il seguente problema RH matriciale.

Dati

- una curva orientata Γ, continua con tangente continua,
- una funzione matriciale $G(s)$ NxN e non singolare, con elementi holderiani su Γ,
- un vettore N-dimensionale $h(s)$, con componenti holderiane su Γ,

- un intero n,

allora il problema RH

$$f^+(s) = G(s)f^-(s) + h(s), \qquad s \in \Gamma \tag{C.7}$$

consiste nel trovare il vettore N-dimensionale $f(k)$, funzione olomorfa nel piano complesso eccezion fatta per $k = \infty$, con grado n (se $n > 0$) all'∞ e tale che, sulla curva Γ, assume i valori limite f^+, f^- che soddisfano alla (C.7). In questo caso la soluzione non è esplicita, ma è caratterizzata da un sistema di equazioni integrali di Fredholm.

Bibliografia

[1] G.B.Whitham, *Linear and nonlinear waves*, John Wiley & Sons, 1974

[2] R.Courant and D.Hilbert, *Methods of mathematical physics*, John Wiley & Sons, 1962

[3] P.Bassanini, A.R.Elcrat, *Theory and applications of partial differential equations*, Plenum Press, 1997

[4] P.D.Lax, *Hyperbolic systems of conservation laws and the mathematical theory of shock waves*, SIAM, Philadelphia, 1973

[5] R.Courant and K.O.Friedrichs, *Supersonic flow and shock waves*, Interscience Publishers, New York, 1948

[6] J.Smoller, *Shock waves and reaction-diffusion Equation*, Springer-Verlag, New York, 1983

[7] M.Abramowitz and I.A.Stegun ed., *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables*, Dover Publications, New York, 1972

[8] A.Erdelyi, W.Magnus, F.Oberhettinger, F.G.Tricomi, *Higher transcendental functions*, volume I, McGraw-Hill, 1953

[9] M.S.Longuet-Higgins and E.D.Cokelet, *The deformation of steep surface waves on water I. A numerical method of computation*, Proc. Roy. Soc. Lond., A 350, 1-26 (1976)

[10] D.J.Korteweg, G.de Vries, *On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves*, Phil.Mag., 39, 422-443, 1895

[11] A.C.Newell, *Solitons in mathematics and physics*, Society for Industrial and Applied Mathematics, 1985

[12] A.Degasperis, *Nonlinear wave equations solvable by the spectral tranform*, in *Nonlinear topics in ocean physics*, edito da A.R.Osborne, North-Holland, 1991, pagg.701-767

[13] S.Novikov, S.V.Manakov, L.P.Pitaevskii, V.E.Zakharov, *Theory of solitons*, Consultant Bureau, 1984

[14] E.M. de Jager, *On the origin of the Korteweg-de Vries equation*, arXiv:math/0602661

[15] R.K.Dodd, J.C.Eilbeck, J.D.Gibbon, H.C.Morris, *Solitons and nonlinear wave equations*, Academic Press, London, 1982

[16] M.J.Ablowitz and P.A.Clarkson, *Solitons, nonlinear evolution equations and inverse scattering*, Cambridge University Press, 1991

[17] N.J.Zabusky, M.D.Kruskal, *Interaction of solitons in a collisionless plasma and the recurrence of initial states*, Phys. Rev. Lett., 15, 240-243

[18] C.S.Gardner, J.M.Greene, M.D.Kruskal, R.M.Miura, *Method for solving the Korteweg-de Vries equation*, Phys. Rev. Lett, 19, 1095, 1967

[19] A.V.Gurevich e L.P.Pitaevskii, Sov. Phys. JETP 38, 291, 1974

[20] P.Lax e C.Levermore, Commun. Pure Appl. Math., 36, 253, 1983

[21] B.Dubrovin, *On hamiltonian perturbations of hyperbolic systems of conservation laws, II: universality of critical behaviour*, Comm. Math. Phys., 267, 2006, no.1 117-139

[22] B.Dubrovin, T.Grava, C.Klein, *On universality of critical behaviour in the focusing nonlinear Schoedinger equation, elliptic umbilic catastrophe and the tritronquée solution to the Painlevé-I equation*, J. Nonl. Sci., Vol.19(1), 57-94, 2009

[23] T.Grava, C.Klein, *Numerical solution of the small dispersion limit of Korteweg-de Vries and Whitham equations*, Communications on pure and applied mathematics, LX, 1623-1664, (2007)

[24] T.Grava e C.Klein, *Numerical study of the small dispersion limit of the Korteweg-de Vries equation and asymptotic solutions*, arXiv:1202.0962

[25] J.D.Cole, *On a quasilinear parabolic equation occurring in aerodynamics*, Quart. Appl. Math., 9, 225-236, 1950

[26] E.Hopf, *The partial differential equation $u_t + uu_x = \mu u_{xx}$*, Comm. Pure Appl. Math., 3, 201-230

[27] F.Calogero, *Why are certain nonlinear PDEs both widely applicable and integrable?*, in *What is integrability?*, a cura di V.E.Zakharov (Springer-Verlag, Berlino, 1991)

[28] F.Calogero, *C-integrable nonlinear partial differential equations*, in *Important developments in soliton theory*, a cura di A.S.Fokas, V.E.Zakharov, Springer-Verlag, 1993

[29] S.V.Manakov and P.M.Santini, *The Cauchy problem on the plane for the dispersionless Kadomtsev-Petviashvili equation*, arXiv:nlin/0604023v1

[30] S.V.Manakov and P.M.Santini, *On the solutions of the* **dKP** *equation: nonlinear Riemann Hilbert problem, longtime behaviour, implicit solutions and wave breaking*, arXiv:0707.1802v3

[31] S.V.Manakov and P.M.Santini, *On the wave breaking of solutions of the dispersionless Kadomtsev-Petviashvili equation at finite time*, Teor. Mat. Phys., 172:2(2012), 1118-1126

[32] S.V.Manakov and P.M.Santini, *Inverse scattering problem for vector fields and the Heavenly equation*, arXiv:nlin/0512043

[33] S.V.Manakov and P.M.Santini, *Inverse scattering problem for vector fields and the Cauchy problem for the Heavenly equation*, arXiv:nlin/0604024

[34] S.V.Manakov e P.M.Santini, *Solvable vector nonlinear Riemann problems, exact implicit solutions of dispersionless PDEs and wave breaking*, arXiv:1011.2619

[35] R.Timman, *Unsteady motion in transonic flow*, Symposium Transsonicum, Aachen 1962, Ed.K.Oswatitsch, Springer 394-401

[36] B.B.Kadomtsev and V.I.Petviashvili, *On the stability of solitary waves in weakly dispersing media*, Soviet Physics-Doklady, Vol.15, N.6 (1970)

[37] E.A.Zabolotskaya and R.V.Khokhlov, *Quasi-plane waves in the nonlinear acoustics of confined beams*, Soviet Physics- Acoustics, Vol.15, N.1, (1969)

[38] J.Gibbons e Y.Kodama, *Exact solutions of the Zabolotskaya-Khokhlov equation*, in *Nonlinear evolution equations: integrability and spectral methods*, a cura di A.Degasperis, A.P.Fordy, M.Lakshmanan, Manchester University Press, 1990

[39] S.V.Manakov and P.M.Santini, *On the dispersionless Kadomtsev-Petviashvili equation in $n+1$ dimensions: exact solutions, the Cauchy problem for small initial data and wave breaking*, J. Phys. A: Math. Theor. 44 (2011) 405203

[40] J.Kevorkian, J.D.Cole, *Multiple scale and singular perturbation methods*, Springer-Verlag, New York, 1996

[41] A.Nayfeh, *Introduction to perturbation techniques*, Wiley Interscience, New York, 1993

[42] A.Degasperis, M.Procesi, *Asymptotic integrability* in *International workshop on symmetry and perturbation theory*, a cura di A.Degasperis, G.Gaeta, World Scientific, 1998

[43] A.Degasperis, *Onde non lineari e solitoni*, dispense del corso, Università degli studi di Roma, La Sapienza

[44] L.D.Landau, E.M.Lifshitz, *Mechanique des fluides*, Edizioni Mir, Mosca, 1971

[45] G.Gallavotti, *Foundations of fluid dynamics*, Springer-Verlag, 2005

[46] D.Pines, *The many-body problem*, W.A.Benjamin, New York, 1961

[47] D.Bohm and D.Pines, *A collective description of electron interactions: III. Coulomb interactions in a degenerate electron gas*, Phys. Rev., 92, 609-625 (1953)

[48] R.W.Boyd, *Nonlinear optics*, Academic Press, 1992

[49] P.N.Butcher, D.Cotter, *The elements of nonlinear optics*, Cambridge University Press, 1990

[50] G.S.He, S.H.Liu, *Physics of nonlinear optics*, World Scientific Publishing, 1999

[51] G.R.Fowles, *Introduction to modern optics*, Dover Publication, 1989

[52] A.Erdelyi, W.Magnus, F.Oberhettinger, F.G.Tricomi, *Higher transcendental functions*, volume II, McGraw-Hill, 1953

[53] V.I.Smirnov, *Corso di matematica superiore III*, parte seconda, Editori Riuniti, 1978

[54] C.Bernardini, O.Ragnisco, P.M.Santini, *Metodi matematici della fisica*, La Nuova Italia Scientifica, Roma, 1993

[55] F.W.J.Olver, *Asymptotics and special functions*, Academic Press, New York and London, 1974

[56] N.I.Muskhelishvili, *Singular integral equations*, Springer, 1977