SPAZI TOPOLOGICI: **topologia locale (a cui siamo interessati)**
topologia globale (proprieta' a larga scala,
come quelle che distinguono una sfera da un cono)

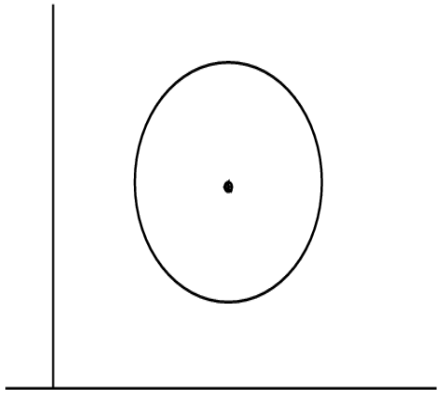
Nozioni preliminari: sia R^n lo spazio n-dimensionale dell'algebra vettoriale

Un punto in R^n e' una n-pla di numeri reali $(x^1, x^2 \ldots x^n)$

Insiemi aperti: dato un punto $y=(y^1, y^2 \ldots y^n)$, un insieme aperto e' l'insieme dei punti **x** tali che

$$|x-y| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x^i - y^i)^2} < r$$

r =numero reale

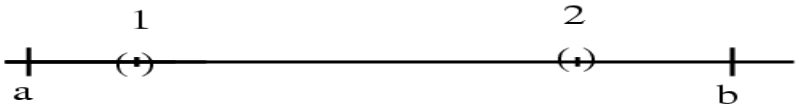


Un insieme aperto include i punti interni ma **NON** il bordo

Un set di punti **S** e' aperto se ogni $x \in$ **S** ha un intorno interamente contenuto In **S**

Abbiamo un'idea intuitiva di spazio continuo: dato un punto di $\mathbf{R^n}$ e' sempre possibile trovare punti di $\mathbf{R^n}$ arbitrariamente vicini ad esso;
inoltre una linea che congiunge due punti di $\mathbf{R^n}$ puo' essere divisa in infiniti segmenti che uniscono ancora punti **di** $\mathbf{R^n}$

Proprieta' di Hausdorff di $\mathbf{R^n}$**:** presi due punti qualsiasi, questi avranno intorni che non si intersecano

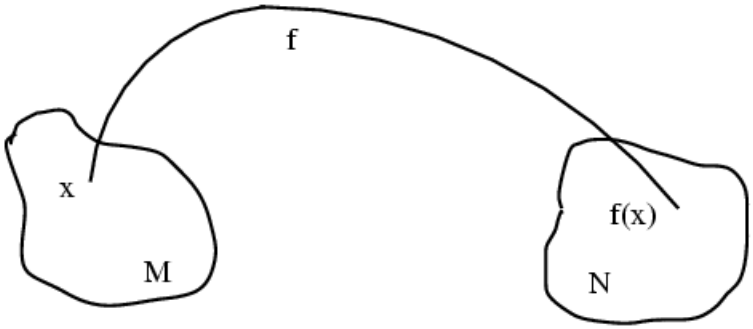


Uno SPAZIO TOPOLOGICO e' un insieme di punti che soddisfano le seguenti proprieta':

1) **Se O_1 e O_2 sono due insiemi aperti, la loro intersezione e' un insieme aperto**

2) **l'unione di insiemi aperti e' un insieme aperto**

Una mappa ***f*** da uno spazio **M** a uno spazio **N** e' una regola che associa a ogni elemento $x \in M$ un unico elemento di **N** $y = f(x)$

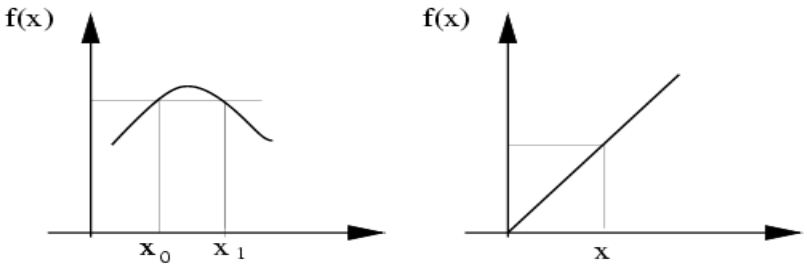


M e **N** non sono necessariamente diversi

ESEMPIO: $y = x^3$, $x \in R^1$ e $y \in R^1$

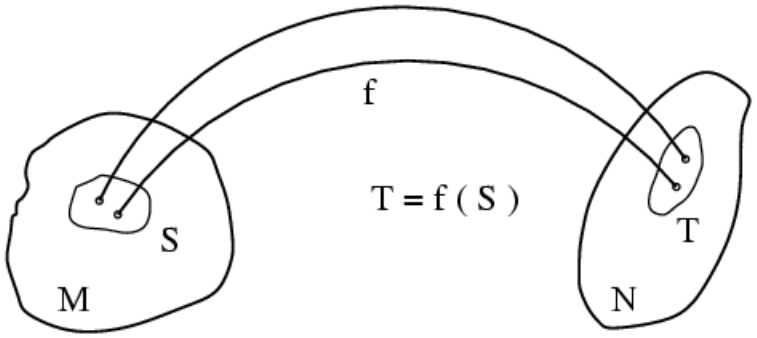
$\forall\, x$ una mappa da' un unico $f(x)$ ma non e' necessariamente vero il viceversa

mappa 'molti a uno' **mappa 'uno a uno'**



Se ***f*** e' una mappa da **M** a **N**, per ogni insieme $S \in M$ ci sara' un' ***immagine*** $T \in N$,

cioe' l'insieme di tutti I punti che ***f*** mappa da **S** su **N**



S e' l'***immagine inversa*** di **T**

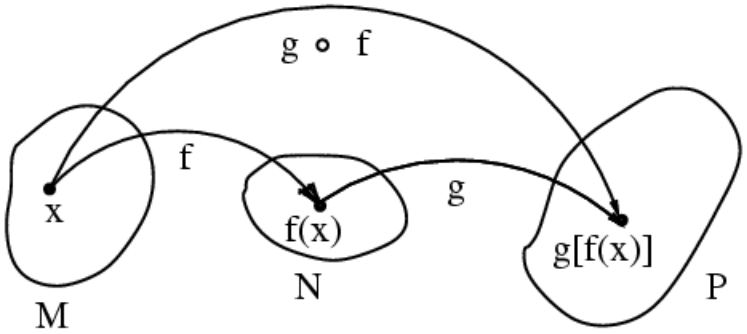
$$S = f^{-1}(T)$$

la mappa inversa e' possibile solo se la mappa e' **'uno a uno'**

f mappa **M** su **N**, ⇒ $f : M \longrightarrow N$,

f mappa un punto $x \in M$ su $y \in N$, ⇒ $f : x \longmapsto y$

COMPOSIZIONE DI MAPPE



Date due mappe

$f : M \longrightarrow N,$

$g : N \longrightarrow P,$

Esiste una mappa ***g o f*** che mappa I punti di **M** su **P**

$g \circ f : M \longrightarrow P$

ESEMPIO:

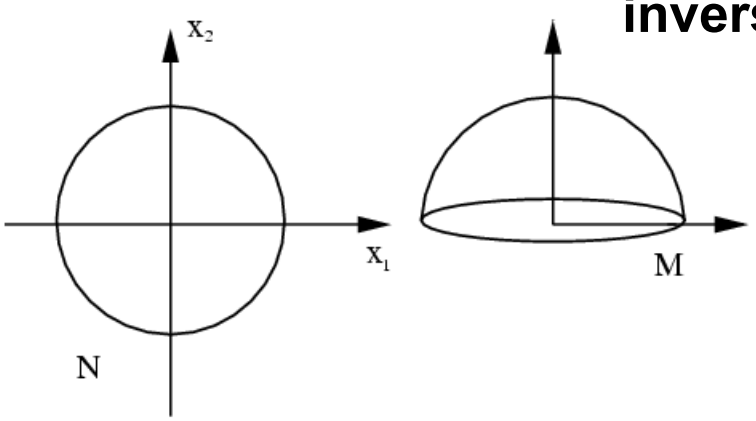
$f : x \longmapsto y \qquad y = x^3,$

$g : y \longmapsto z \qquad z = y^2,$

$g \circ f : x \longmapsto z \qquad z = x^6,$

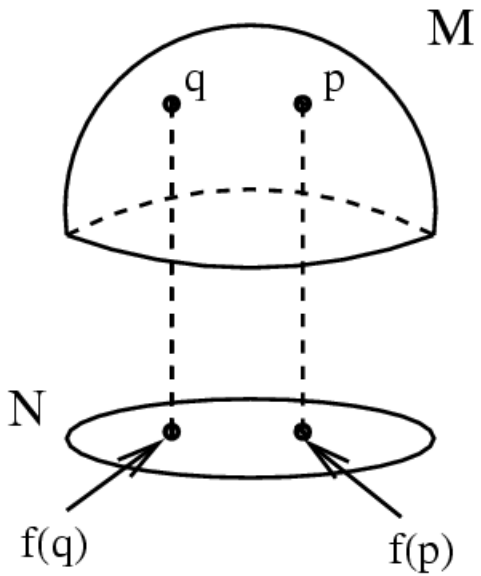
Mappa di M in (into) N : se e' definita per tutti I punti di M (l'immagine di M è contenuta in N)

Mappa di M su (onto) N : se e' in piu' ogni punto di N ha un'immagine inversa in M (non necessariamente unica)



ESEMPIO:
Sia **N** l'insieme aperto di $\mathbf{R^2}$

$$x_1^{\,2} + x_2^{\,2} < 1$$



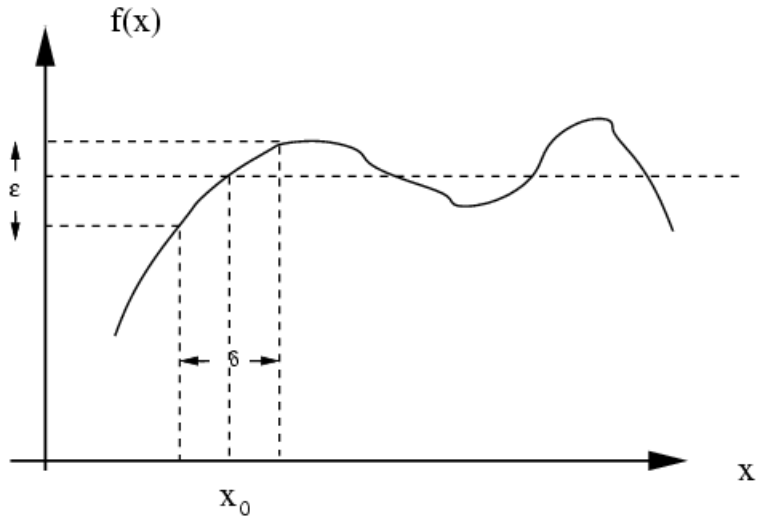
Sia **M** la superficie di una semisfera appartenente alla sfera unitaria $\theta < \frac{\pi}{2}$

ESISTE un mapping uno-a-uno
f di **M** onto **N**

Una mappa $f : M \longrightarrow N$,

e' continua in $x \in M$, se qualsiasi insieme aperto di **N** che contiene ***f*** **(x), contiene l'immagine di un aperto di M**

M e N devono essere spazi topologici, altrimenti la nozione di mappa continua non ha senso



Questa definizione e' piu' generale di quella che impariamo a analisi I perche' non pone limitazioni su ε **e su** δ

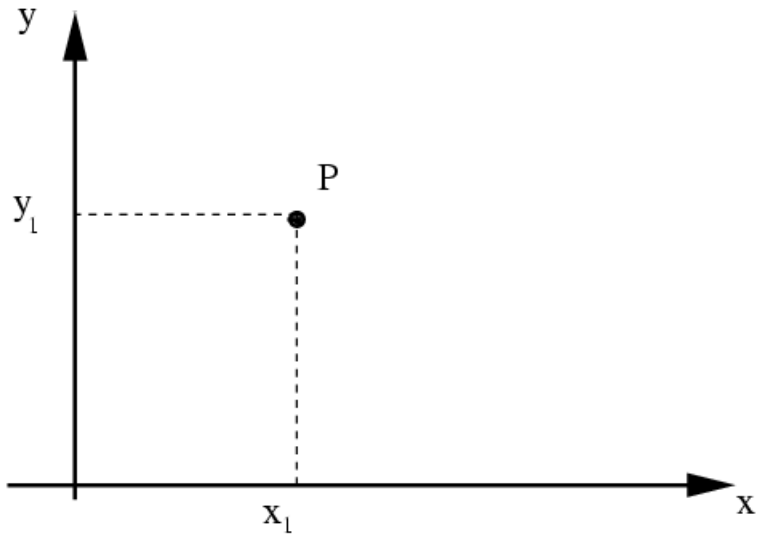
Una mappa si dice differenziabile di classe C^k, se $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ e' una funzione, definita in un aperto di $S \in R^n$, **continua con le sue derivate di ordine minore o uguale a k**

La nozione di MANIFOLD e' cruciale per definire un sistema di coordinate:

Un **MANIFOLD** e' un insieme di punti **M** tale che ciascun punto ha un intorno aperto che ammette una mappa 1-1 continua **SU (ONTO)** un insieme aperto di $\mathbf{R^n}$ **,** dove **n** e' la dimensione del manifold

(ricordare che un punto in R^n e' una n-pla di numeri reali $(x^1, x^2 \ldots x^n)$)

prendiamo un punto P e lo mappiamo sul punto $(x^1, x^2) \in \mathbf{R^2}$
e questa operazione puo' essere fatta per ogni intorno di P



Quindi un manifold deve essere:
-uno **spazio topologico continuo**
- e a ciascun punto associamo una n-pla di numeri reali,cioe'
un sistema di coordinate

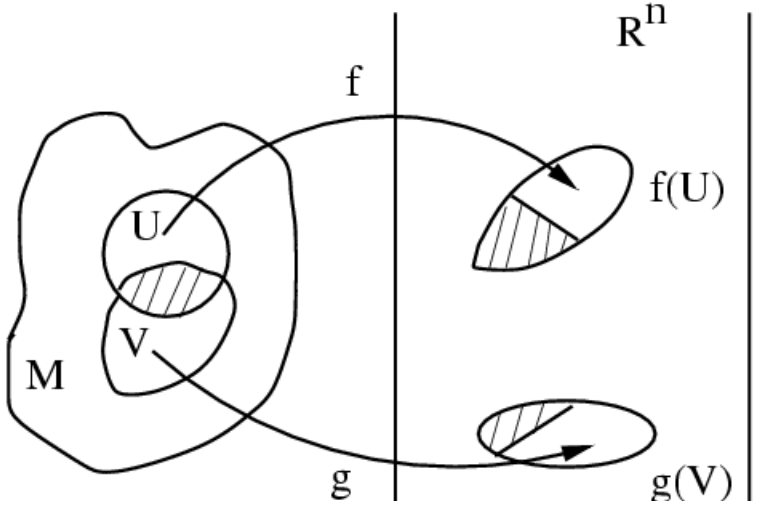
Attenzione: la definizione di MANIFOLD riguarda solo insiemi aperti di **M** e di $\mathbf{R^n}$, perche' non vogliamo restringere la topologia globale di **M**

Attenzione: non abbiamo ancora introdotto NESSUNA nozione geometrica (angoli, lunghezze etc.)

L'unica condizione che stiamo imponendo e' che la topologia locale di **M** Sia la stessa di $\mathbf{R}^n$

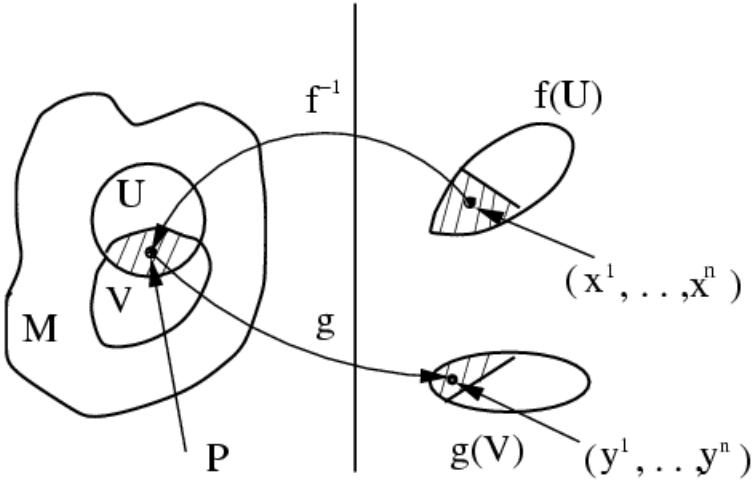
Definizione di sistema di coordinate:

E' una coppia formata da un aperto di **M** e la sua mappa su un aperto di R^n ; tali aperti non includono necessariamente TUTTO **M**



Per esempio, **(U,*f*)** e **(V ,*g*)** sono due distinti **sistemi di coordinate o carte**

U∩ V e' un aperto (intersezione di due aperti) e corrisponde a due diversi sistemi di coord. Quindi deve esserci una relazione tra I due!



- Prendo un punto nell'immagine di **U∩ V** sotto la mappa ***f***
- la mappa ***f*** ha un'inversa f^{-1} che porta in P
- usando la mappa ***g*** vado nell'immagine di **U∩ V** sotto il mapping ***g***

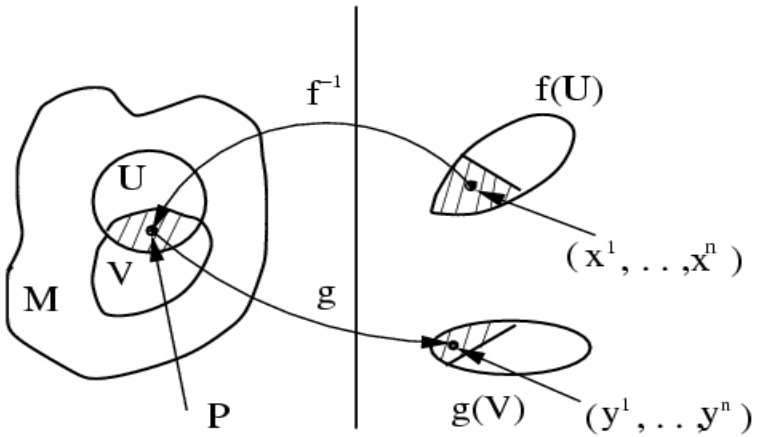
$$g \circ f^{-1} : R^n \longrightarrow R^n$$

Trasformazione di coordinate

$g \circ f^{-1} : R^n \longrightarrow R^n$

Il risultato di questa operazione e' una relazione funzionale tra i due sistemi di coordinate

$$\begin{cases} y^1 = y^1(x^1,\ldots x^n) \\ \ldots \\ \ldots \\ y^n = y^n(x^1,\ldots x^n) \end{cases}$$



Se le funzioni $\{y^i\}$ sono differenziabili fino all'ordine k, allora tra le carte **(U,*f*)** e **(V ,*g*)** si dice che c'e' una relazione di classe $\mathbf{C^k}$

Se si puo' costruire un sistema di carte tale che ciascun punto di **M** appartenga almeno a un aperto di **M,** e se tra tutte le carte c'e' una relazione di classe $\mathbf{C^k}$ **allora il MANIFOLD e' di classe** $\mathbf{C^k}$

Se k=1 il MANIFOLD si dice DIFFERENZIABILE

La nozione di MANIFOLD DIFFERENZIABILE e' importante perche' consente di aggiungere "strutture" al manifold, cioe' possiamo definire vettori, tensori, forme differenziali ecc.

Per completare la definizione di trasformazione di coordinate:

date $y^i = y^i(x^1,\ldots x^n)$

Se lo Jacobiano della trasformazione

$$J = \frac{\partial(y^1,\ldots y^n)}{\partial(x^1,\ldots x^n)} = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial y^1}{\partial x^1} & \ldots\ldots\ldots & \frac{\partial y^1}{\partial x^n} \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ \frac{\partial y^n}{\partial x^1} & \ldots\ldots\ldots & \frac{\partial y^n}{\partial x^n} \end{pmatrix}$$

e' NON NULLO in un punto P, allora il teorema della funzione inversa assicura che la mappa *f* e' 1-1 e SU un intorno di P.

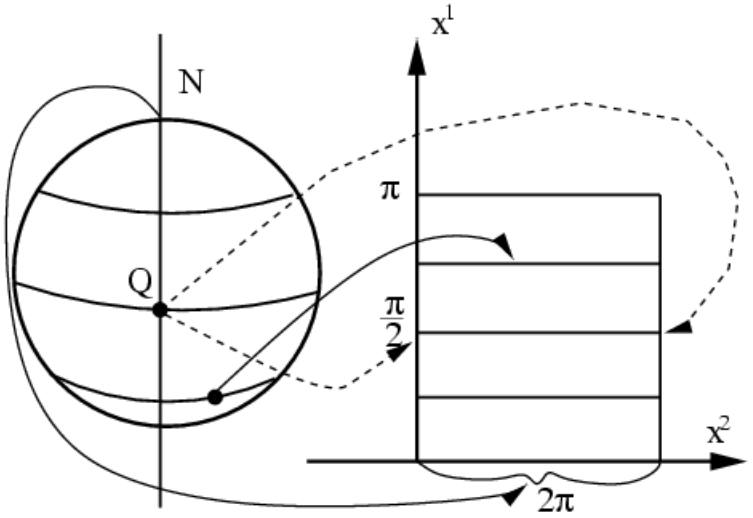
Se J=0 la trasformazione e' singolare

Consideriamo la 2-sfera $\mathbf{S^2}$: insieme dei punti di $\mathbf{R^3}$ tali che

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = \cos t$$

Supponiamo di voler "mappare" la sfera su $\mathbf{R^2}$ usando **una sola** carta, per es. se usiamo coord. sferiche $\theta = x^1, \qquad \varphi = x^2$

La sfera viene mappata sul rettangolo $0 \le x^1 \le \pi, \qquad 0 \le x^2 \le 2\pi$



Il polo nord θ =0 e' mappato sulla linea

$$x^1 = 0, \qquad 0 \le x^2 \le 2\pi$$

Quindi la mappa non esiste!

Inoltre, tutti i punti del semicerchio φ =0 vanno in $x^2 = 0, \qquad x^2 = 2\pi$

Di nuovo la mappa non esiste!

Per evitare questi problemi dobbiamo imitare il mapping a insiemi aperti

$$0 < x^1 < \pi, \qquad 0 < x^2 < 2\pi$$

Questo mapping non preserva lunghezze e angoli

Non possiamo coprire la sfera con una sola carta