

La 2-sfera come varietà differenziabile

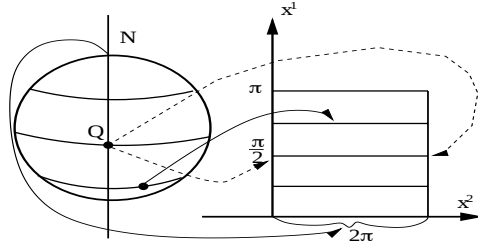
Un esempio di varietà differenziabile è la 2-sfera (in $\mathbb{R}^3$):

$$S^2 = \{(\xi, \eta, \zeta) \in \mathbb{R}^3 \mid \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1\} . \quad (1)$$

S^2 può essere descritta attraverso la mappa polare:

$$\begin{cases} \xi = \sin \theta \cos \phi \\ \eta = \sin \theta \sin \phi \\ \zeta = \cos \theta \end{cases} \quad (2)$$

che è una applicazione da $\mathbb{R}^2$ a S^2 .



Tale carta non copre tutta la varietà, è definita nell'insieme:

$$\begin{aligned} 0 < \theta < \pi \\ 0 < \phi < 2\pi . \end{aligned} \quad (3)$$

Esiste quindi una semicirconferenza massima in cui la mappa non è definita. Osserviamo che se, contro la stessa definizione di varietà differenziabile, definissimo θ nell'intervallo chiuso $[0, \pi]$, ci sarebbero dei problemi: il polo nord sarebbe mappato sull'intero segmento ($\theta = 0, 0 \leq \phi \leq 2\pi$); e se definissimo $\phi \in [0, 2\pi]$, avremmo che lo stesso semicerchio è mappato sia in ($0 \leq \theta \leq \pi, \phi = 0$), sia in ($0 \leq \theta \leq \pi, \phi = 2\pi$); queste non sono applicazioni uno a uno.

Si può dimostrare che problemi simili avvengono comunque si tenti di ricoprire la sfera con una carta: per farlo, servono due carte; ad esempio si può prendere un'altra mappa polare con le coordinate θ', ϕ' definite in modo che le semicirconferenze in cui le due mappe non sono definite non si intersechino.

Come abbiamo detto, uno spazio continuo è una varietà differenziabile se è possibile definire un insieme di mappe che ricoprono la varietà (insieme detto atlante) e tali che il cambiamento di coordinate fra una mappa e l'altra sia invertibile e differenziabile (ossia un diffeomorfismo).

Verifichiamo se la sfera è una varietà differenziabile. Che sia uno spazio continuo (e quindi verifichi il criterio di Hausdorff: ogni coppia di punti ammette

intorni disgiunti) si può verificare molto semplicemente utilizzando la definizione (1), potete farlo da soli a casa; meno ovvio è verificare se possiamo definire un atlante, tale che i cambiamenti di coordinate siano diffeomorfismi.

Per verificare questa proprietà non utilizziamo la mappa polare, ma una mappa che rende i calcoli molto più semplici, la mappa stereografica. Essa consiste nell'associare ad ogni punto la sua proiezione da un polo sul piano equatoriale, come in figura 1. Considerando la proiezione a partire dal polo

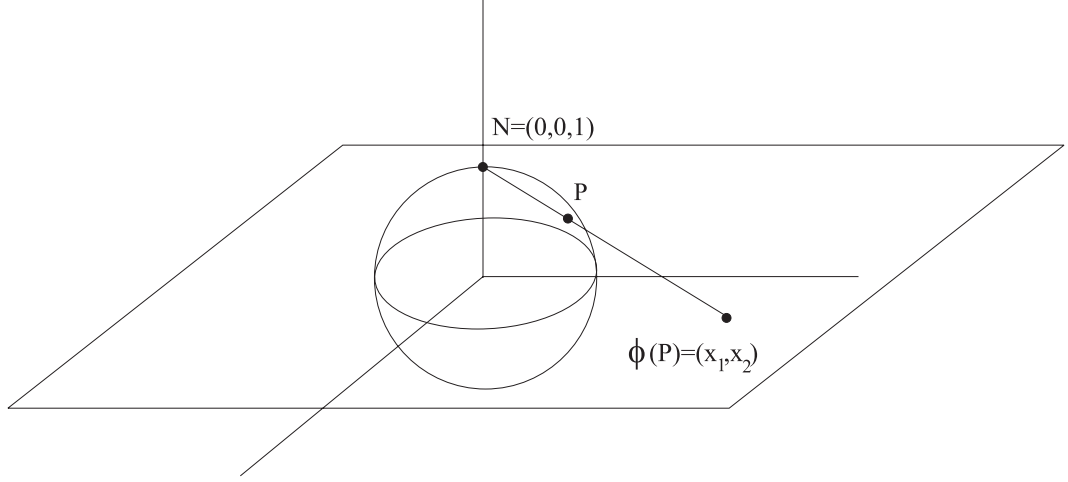


Figure 1: Proiezione stereografica dal polo nord

nord, si ottiene la mappa $\phi : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$:

$$\phi : \begin{cases} x_1 = \frac{\xi}{1-\zeta} \\ x_2 = \frac{\eta}{1-\zeta} \end{cases} . \quad (4)$$

Per convincersene si può considerare la sezione della sfera che contiene l'asse x_1 , come in figura 2. Considerando la similitudine fra i due triangoli $NO\phi(P)$

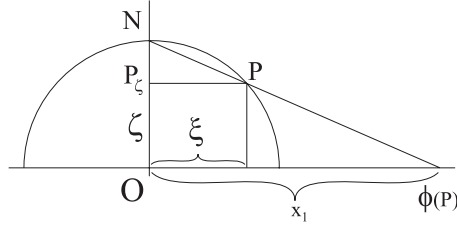


Figure 2: Coordinate della proiezione stereografica dal polo nord

e $NP_\xi P$ si ha:

$$\frac{x_1}{\xi} = \frac{1}{1-\zeta} \quad (5)$$

e quindi si ritrova l'espressione data per x_1 ; lo stesso vale per x_2 . Questa carta definita in:

$$U_\phi = S^2 - \{N\} \quad (6)$$

perchè il polo nord non viene mappato in alcun punto del piano equatoriale; quindi la carta non copre tutta la varietà. Si considera quindi anche la proiezione stereografica dal polo sud:

$$\psi : \begin{cases} y_1 = \frac{\xi}{1+\zeta} \\ y_2 = \frac{\eta}{1+\zeta} \end{cases} . \quad (7)$$

La mappa ψ è definita in

$$U_\psi = S^2 - \{S\} . \quad (8)$$

Le due mappe ricoprono la varietà, ovvero costituiscono un atlante:

$$U_\phi \cup U_\psi = S^2 . \quad (9)$$

Nell'insieme in cui entrambe sono definite

$$U_\phi \cap U_\psi = S^2 - \{N, S\} \quad (10)$$

è definito il cambiamento di coordinate $y_i = y_i(x_j)$. Verifichiamo che questo cambiamento di coordinate sia invertibile e differenziabile, ovvero sia un diffeomorfismo. Si ha:

$$x_1^2 + x_2^2 = \frac{\xi^2 + \eta^2}{(1-\zeta)^2} = \frac{1-\zeta^2}{(1-\zeta)^2} = \frac{1+\zeta}{1-\zeta} \quad (11)$$

$$y_1^2 + y_2^2 = \frac{1-\zeta^2}{(1+\zeta)^2} = \frac{1-\zeta}{1+\zeta} \quad (12)$$

quindi il cambiamento di coordinate è

$$y_1 = \frac{\xi}{1-\zeta} \frac{1-\zeta}{1+\zeta} = \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} \quad (13)$$

$$y_2 = \frac{\eta}{1-\zeta} \frac{1-\zeta}{1+\zeta} = \frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2} . \quad (14)$$

Calcoliamo lo Jacobiano del cambiamento di coordinate.

$$\frac{\partial y_1}{\partial x_1} = \frac{x_1^2 + x_2^2 - 2x_1^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} = \frac{x_2^2 - x_1^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} \quad (15)$$

$$\frac{\partial y_1}{\partial x_2} = \frac{\partial y_2}{\partial x_1} = -2 \frac{x_1 x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} \quad (16)$$

$$\frac{\partial y_2}{\partial x_2} = \frac{x_1^2 - x_2^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} \quad (17)$$

$$J = \frac{1}{(x_1^2 + x_2^2)^4} \begin{vmatrix} x_2^2 - x_1^2 & -2x_1x_2 \\ -2x_1x_2 & x_1^2 - x_2^2 \end{vmatrix} = \quad (18)$$

$$= \frac{1}{(x_1^2 + x_2^2)^4} \left(- (x_1^2 - x_2^2)^2 - 4x_1^2x_2^2 \right) = \frac{-(x_1^2 + x_2^2)^2}{(x_1^2 + x_2^2)^4} = -\frac{1}{(x_1^2 + x_2^2)^2}. \quad (19)$$

J finito e non nullo in $U_\phi \cap U_\psi$, quindi il cambiamento di coordinate è un diffeomorfismo. Questo completa la verifica che la sfera è una varietà differenziabile.