QUINTA ESERCITAZIONE

Esercizio

Consideriamo lo spazio-tempo descritto, nel riferimento O, dalle coordinate $\{x^\mu\} = (t, r, \theta, \phi)$, con metrica

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \frac{1}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \tag{1}$$

dove $M > 0$ è una costante. I simboli di Christoffel non nulli sono

$$\begin{aligned}
\Gamma^{\ r}_{tt} &= \frac{M}{r^2}\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \\
\Gamma^{\ t}_{rt} = \Gamma^{\ t}_{tr} &= \frac{M}{r^2}\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \\
\Gamma^{\ r}_{rr} &= -\frac{M}{r^2}\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \\
\Gamma^{\ r}_{\theta\theta} &= -(r - 2M) \\
\Gamma^{\ r}_{\phi\phi} &= -(r - 2M)\sin^2\theta \\
\Gamma^{\ \theta}_{\theta r} = \Gamma^{\ \theta}_{r\theta} &= \frac{1}{r} \\
\Gamma^{\ \phi}_{\phi r} = \Gamma^{\ \phi}_{r\phi} &= \frac{1}{r} \\
\Gamma^{\ \theta}_{\phi\phi} &= -\sin\theta\cos\theta \\
\Gamma^{\ \phi}_{\phi\theta} &= \cot\theta\,.
\end{aligned} \tag{2}$$

Sia dato il vettore $\vec{V}$ di componenti

$$V^\mu = \left(\sqrt{1 - \frac{2M}{r}}, r, 0, 0\right)\,. \tag{3}$$

1. Calcolare
$$V^t_{\ ;t}\,; \quad V^t_{\ ;r}\,; \quad V^\theta_{\ ;r}\,; \quad V^\theta_{\ ;\theta}\,. \tag{4}$$

2. Dato il riferimento O' di coordinate $\{x^{\alpha'}\} = (t', r', \theta', \phi')$ date da
$$x^\mu(x^{\alpha'}) \ : \quad \begin{cases} t = t' \\ r = r'\left(1 + \frac{M}{2r'}\right)^2 \\ \theta = \theta' \\ \phi = \phi' \end{cases} \tag{5}$$
determinare la metrica nel riferimento O'.

3. Calcolare le quantità

$$\Lambda^{\mu}{}_{\alpha'} \equiv \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\alpha'}} \qquad ; \qquad \Lambda^{\alpha'}{}_{\mu} \equiv \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\mu}}\,. \tag{6}$$

4. Determinare le componenti del vettore $\vec{V}$ (3) nel riferimento O'.

Soluzione

1. Si ha

$$\begin{aligned}
V^{t}{}_{;t} &= V^{t}{}_{,t} + \Gamma^{\,t}_{t\mu}V^{\mu} = \Gamma^{\,t}_{tr}V^{r} = \frac{M}{r\left(1-\frac{2M}{r}\right)} \\
V^{t}{}_{;r} &= V^{t}{}_{,r} + \Gamma^{\,t}_{r\mu}V^{\mu} = V^{t}{}_{,r} + \Gamma^{\,t}_{rt}V^{t} = \frac{2M}{r^2\sqrt{1-\frac{2M}{r}}} \\
V^{\theta}{}_{;r} &= V^{\theta}{}_{,r} + \Gamma^{\,\theta}_{r\mu}V^{\mu} = 0 \\
V^{\theta}{}_{;\theta} &= V^{\theta}{}_{,\theta} + \Gamma^{\,\theta}_{\theta\mu}V^{\mu} = \Gamma^{\,\theta}_{\theta r}V^{r} = 1\,.
\end{aligned} \tag{7}$$

2. Trasformiamo dr^2. Si ha

$$r = r'\left(1+\frac{M}{2r'}\right)^2 = r' + M + \frac{M^2}{4r'} \tag{8}$$

quindi

$$dr = \left(1-\frac{M^2}{4r'^2}\right)dr' = \left(1+\frac{M}{2r'}\right)\left(1-\frac{M}{2r'}\right)dr' \tag{9}$$

e

$$dr^2 = \left(1+\frac{M}{2r'}\right)^2\left(1-\frac{M}{2r'}\right)^2 dr'^2\,. \tag{10}$$

Ora esprimiamo le componenti $g_{\mu\nu}$ nelle nuove coordinate. Si ha

$$\begin{aligned}
1-\frac{2M}{r} &= 1-\frac{2M}{r'\left(1+\frac{M}{2r'}\right)^2} = \frac{1}{r'\left(1+\frac{M}{2r'}\right)^2}\left(r' + M + \frac{M^2}{4r'} - 2M\right) \\
&= \frac{1}{r'\left(1+\frac{M}{2r'}\right)^2}\left(r' - M + \frac{M^2}{4r'}\right) = \frac{\left(1-\frac{M}{2r'}\right)^2}{\left(1+\frac{M}{2r'}\right)^2}
\end{aligned} \tag{11}$$

e

$$r^2 = r'^2\left(1+\frac{M}{2r'}\right)^4\,. \tag{12}$$

Mettendo tutto assieme,

$$ds^2 = -\frac{\left(1-\frac{M}{2r'}\right)^2}{\left(1+\frac{M}{2r'}\right)^2}dt'^2 + \left(1+\frac{M}{2r'}\right)^4\left[dr'^2 + r'^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\phi^2)\right]\,. \tag{13}$$

3. Dalla (9) si ha che

$$\frac{\partial r}{\partial r'} = \left(1 - \frac{M^2}{4r'^2}\right) \tag{14}$$

quindi

$$\Lambda^{\mu}{}_{\alpha'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(1 - \frac{M^2}{4r'^2}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{15}$$

e le $\Lambda^{\alpha'}{}_{\mu}$ si ottengono invertendo la (15):

$$\Lambda^{\alpha'}{}_{\mu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(1 - \frac{M^2}{4r'^2}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{16}$$

4. Prima di tutto esprimiamo le componenti V^μ nelle coordinate $x^{\alpha'}$; usando la (11),

$$V^\mu = \left(\sqrt{1 - \frac{2M}{r}}, r, 0, 0\right) = \left(\frac{1 - \frac{M}{2r'}}{1 + \frac{M}{2r'}}, r'\left(1 + \frac{M}{2r'}\right)^2, 0, 0\right). \tag{17}$$

Le componenti di $\vec{V}$ nel riferimento O' saranno

$$\begin{aligned} V^{\alpha'} &= \Lambda^{\alpha'}{}_{\mu} V^\mu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(1 - \frac{M^2}{4r'^2}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1-\frac{M}{2r'}}{1+\frac{M}{2r'}} \\ r'\left(1 + \frac{M}{2r'}\right)^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1-\frac{M}{2r'}}{1+\frac{M}{2r'}} \\ r'\frac{1+\frac{M}{2r'}}{1-\frac{M}{2r'}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{18}$$

Esercizio

Sia dato lo spazio-tempo descritto, nel riferimento O, dalle coordinate $\{x^\mu\} = (u, v, r, \phi)$, di metrica

$$ds^2 = -2uvdudv + (u+v)^2 dr^2 + r^2 d\phi^2. \tag{19}$$

Avremo

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -uv & 0 & 0 \\ -uv & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (u+v)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \end{pmatrix} \tag{20}$$

e

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{uv} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{uv} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{(u+v)^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{r^2} \end{pmatrix} . \tag{21}$$

Calcoliamo Γ^u_{uu} .

$$\Gamma^u_{uu} = \frac{1}{2} g^{u\alpha}(g_{u\alpha,u} + g_{\alpha u,\alpha} - g_{uu,\alpha}) = g^{uv} g_{uv,u} = \left(-\frac{1}{uv}\right)(-v) = \frac{1}{u} . \tag{22}$$

Trasporto parallelo

Lungo una curva di parametro λ, di vettore tangente

$$U^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda} , \tag{23}$$

il vettore V^μ è trasportato parallelamente se soddisfa le **equazioni del trasporto parallelo**

$$U^\nu V^\mu_{;\nu} = U^\nu \left[V^\mu_{,\nu} + \Gamma^\mu_{\nu\alpha} V^\alpha\right] = 0 \tag{24}$$

ovvero

$$\frac{dV^\mu}{d\lambda} + \Gamma^\mu_{\nu\alpha} U^\nu V^\alpha = 0 \tag{25}$$

dove si è usato il fatto che

$$U^\nu \frac{\partial V^\mu}{\partial x^\nu} = \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{\partial V^\mu}{\partial x^\nu} = \frac{dV^\mu}{d\lambda} . \tag{26}$$

Quando il cammino è la *linea coordinata* α, ovvero quando tutte le coordinate tranne x^α sono costanti lungo il percorso, possiamo scegliere la stessa x^α come parametro della curva. In tal caso il vettore tangente è il vettore di base $\vec{e}_{(\alpha)}$:

$$U^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\alpha} = \delta^\mu_\alpha . \tag{27}$$

In questo caso, l'equazione del trasporto parallelo assume una forma particolarmente semplice:

$$U^\nu V^\mu_{;\nu} = \delta^\nu_\alpha V^\mu_{;\nu} = V^\mu_{;\alpha} = 0 \tag{28}$$

ovvero

$$V^\mu_{,\alpha} + \Gamma^\mu_{\alpha\nu} V^\nu = 0 . \tag{29}$$

Sfera

Si consideri la sfera S^2 di raggio unitario, in coordinate polari:

$$\{x^\mu\} = (\theta, \phi) \tag{30}$$

$$ds^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \tag{31}$$

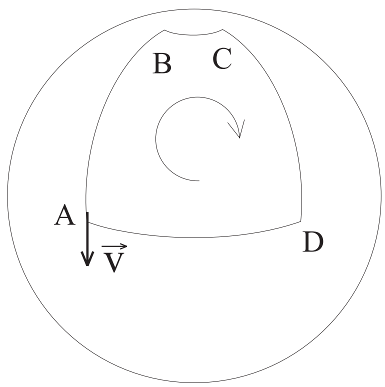
$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2\theta \end{pmatrix} . \tag{32}$$

I suoi simboli di Christoffel non nulli sono

$$\begin{aligned}\Gamma^{\phi}_{\phi\theta} &= \cot\theta \\ \Gamma^{\theta}_{\phi\phi} &= -\sin\theta\cos\theta\,.\end{aligned} \tag{33}$$

Trasporto parallelo sulla sfera

Studiamo il trasporto parallelo sulla sfera lungo il cammino in figura (notare che tale cammino è definito in maniera tale da evitare il polo nord, dove la mappa polare non è definita).



Come dimostreremo, trasportando lungo tale cammino il vettore $\vec{V}$, da A in A, esso viene ruotato di 90^o. Dimostriamolo. I quattro punti in figura hanno coordinate $x^\mu = (\theta, \phi)$:

$$A = \left(\frac{\pi}{2}, 0\right) \tag{34}$$

$$B = (\varepsilon, 0) \tag{35}$$

$$C = \left(\varepsilon, \frac{\pi}{2}\right) \tag{36}$$

$$D = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \tag{37}$$

dove ε è un parametro che assumiamo piccolo, e che alla fine della dimostrazione faremo tendere a zero.

Trasportiamo parallelamente lungo il cammino in figura il vettore inizialmente in A con componenti

$$V^\mu = (V^\theta, V^\phi) = (1, 0)\ . \tag{38}$$

Le equazioni del trasporto parallelo sono

$$\frac{dV^\alpha}{d\lambda} + \Gamma^\alpha_{\gamma\beta} V^\gamma U^\beta = 0 \tag{39}$$

con

$$U^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{d\lambda} \tag{40}$$

vettore tangente alla curva $\lambda \to x^\mu(\lambda)$; sostituendo i simboli di Christoffel dati in (33),

$$\begin{aligned} \frac{dV^\theta}{d\lambda} &= U^\phi V^\phi \sin\theta\cos\theta \\ \frac{dV^\phi}{d\lambda} &= -\left(U^\theta V^\phi + V^\theta U^\phi\right)\cot\theta \,. \end{aligned} \tag{41}$$

Osserviamo che i cammini AB, BC, CD, DA sono linee coordinate; le equazioni del trasporto parallelo possono quindi essere espresse in forma più semplice:

- per le linee coordinate θ,

  $$V^\mu_{;\theta} = V^\mu_{,\theta} + \Gamma^\mu_{\theta\nu}V^\nu = 0 \tag{42}$$

  ovvero

  $$\begin{aligned} V^\theta_{,\theta} &= 0 \\ V^\phi_{,\theta} &= -\cot\theta V^\phi \,; \end{aligned} \tag{43}$$

- per le linee coordinate ϕ,

  $$V^\mu_{;\phi} = V^\mu_{,\phi} + \Gamma^\mu_{\phi\nu}V^\nu = 0 \tag{44}$$

  ovvero

  $$\begin{aligned} V^\theta_{,\phi} &= \sin\theta\cos\theta V^\phi \\ V^\phi_{,\phi} &= -\cot\theta V^\theta \,. \end{aligned} \tag{45}$$

1. Il tratto da $A = (\pi/2, 0)$ a $B = (\varepsilon, 0)$ è una linea coordinata θ, quindi valgono le (43). La prima delle (43) ci dice che V^θ e costante, quindi $V^\theta(\theta) = V^\theta(\pi/2) = 1$.

   L'equazione per V^ϕ è della forma

   $$\begin{aligned} \frac{dV^\phi}{d\theta} &= -\cot\theta V^\phi \\ V^\phi\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 0 \,. \end{aligned} \tag{46}$$

   Questo è un problema di Cauchy (una equazione differenziale del primo ordine e un dato iniziale), quindi ammette un'unica soluzione. $V^\phi(\theta) \equiv 0$ è soluzione, quindi è l'unica soluzione.

   Questo risultato vale anche in casi piu' generali: se la derivata di una grandezza (in questo caso V^ϕ) è proporzionale alla grandezza stessa, e nel punto iniziale (in questo caso $\theta = \pi/2$) la grandezza vale 0, essa continua a valere 0 anche successivamente.

Possiamo concludere che $V^\mu(\theta)$ è costante nel tratto AB, e in B si ha ancora:

$$V^\mu = (1, 0) \ . \tag{47}$$

2. Il tratto da $B = (\varepsilon, 0)$ a $C = (\varepsilon, \pi/2)$ è una linea coordinata ϕ con $\theta = \epsilon$, quindi valgono le (45), che per $\varepsilon \ll 1$ diventano

$$\frac{dV^\theta}{d\phi} = \sin\varepsilon\cos\varepsilon V^\phi = \varepsilon V^\phi + \mathcal{O}\left(\varepsilon^3\right) \tag{48}$$

$$\frac{dV^\phi}{d\phi} = -\cot\varepsilon V^\theta = -\frac{1}{\varepsilon}V^\theta + \mathcal{O}\left(\varepsilon\right) \ . \tag{49}$$

Come si vede, non si può prendere $\varepsilon \to 0$, ovvero arrivare al polo nord, perchè le equazioni vi divergono. Dalla (49) si trova che

$$V^\phi = \frac{1}{\varepsilon}V^\theta_{,\phi} + \mathcal{O}\left(\varepsilon\right) \ , \tag{50}$$

mentre derivando la (48) rispetto a ϕ si ha

$$\frac{d^2V^\theta}{d\phi^2} = -V^\theta + \mathcal{O}\left(\varepsilon^2\right) . \tag{51}$$

La soluzione generale di questa equazione è

$$V^\theta = C_1\cos\phi + C_2\sin\phi + \mathcal{O}\left(\varepsilon^2\right) \tag{52}$$

e dalla (50)

$$V^\phi = -\frac{C_1}{\varepsilon}\sin\phi + \frac{C_2}{\varepsilon}\cos\phi + \mathcal{O}\left(\varepsilon\right) \ . \tag{53}$$

con C_1, C_2 costanti di integrazione determinate dalle condizioni iniziali in $\phi = 0$, dove

$$\begin{aligned} V^\theta &= C_1 + \mathcal{O}\left(\varepsilon^2\right) = 1 \\ V^\phi &= -\frac{C_2}{\varepsilon} + \mathcal{O}\left(\varepsilon\right) = 0 \end{aligned} \tag{54}$$

per cui $C_1 = 1 + \mathcal{O}\left(\varepsilon^2\right)$, $C_2 = \mathcal{O}\left(\varepsilon\right)$ e

$$\begin{aligned} V^\theta &= \cos\phi + \mathcal{O}\left(\varepsilon^2\right) \\ V^\phi &= -\frac{1}{\varepsilon}\sin\phi + \mathcal{O}\left(\varepsilon\right) \ . \end{aligned} \tag{55}$$

Ponendo $\phi = \pi/2$ si trova V^μ nel punto C:

$$V^\mu = \left(\mathcal{O}\left(\varepsilon^2\right), -\frac{1}{\varepsilon} + \mathcal{O}\left(\varepsilon\right)\right) \ . \tag{56}$$

3. Il tratto da $C = (\varepsilon, \pi/2)$ a $D = (\pi/2, \pi/2)$ è una linea coordinata θ, quindi valgono le (43). Quindi V^θ è costante,

$$V^\theta(\theta) \equiv \mathcal{O}\left(\varepsilon^2\right) \tag{57}$$

mentre V^ϕ soddisfa

$$\begin{aligned} \frac{dV^\phi}{d\theta} &= -\cot\theta V^\phi \\ V^\phi(\theta = \epsilon) &= -\frac{1}{\varepsilon} + \mathcal{O}\left(\varepsilon\right) . \end{aligned} \tag{58}$$

La soluzione di questo sistema è

$$V^\phi = -\frac{1}{\sin\theta} + \mathcal{O}\left(\varepsilon\right) \tag{59}$$

quindi in D, ove $\theta = \pi/2$,

$$V^\mu = \left(\mathcal{O}\left(\varepsilon^2\right), -1 + \mathcal{O}\left(\varepsilon\right)\right) . \tag{60}$$

4. Il tratto da $D = (\pi/2, \pi/2)$ a $A = (\pi/2, 0)$ è una linea coordinata ϕ, quindi valgono le (45),

$$\frac{dV^\theta}{d\phi} = \sin\theta\cos\theta V^\phi \tag{61}$$

$$\frac{dV^\phi}{d\phi} = -\cot\theta V^\theta . \tag{62}$$

In entrambe le equazioni il secondo membro si annulla, perchè sul percorso da D ad A si ha sempre $\theta = \frac{\pi}{2}$. Quindi in A il vettore è

$$V^\mu = \left(\mathcal{O}\left(\varepsilon^2\right), -1 + \mathcal{O}\left(\varepsilon\right)\right) . \tag{63}$$

Nel limite $\varepsilon \to 0$

$$V^\mu = (0, -1) \tag{64}$$

mentre in A alla partenza era:

$$V^\mu = (1, 0) \; : \tag{65}$$

il trasporto parallelo lungo questo cammino chiuso ha ruotato il vettore di 90^o in senso orario.