# Matrici

Una *matrice* è una tabella di numeri, reali o complessi. In generale

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{1}$$

è una matrice $m \times n$ ($m$ per $n$), ovvero con $m$ righe ed $n$ colonne. $m$ ed $n$ sono detti dimensioni della matrice. La componente $(i, j)$ della matrice è l'elemento che si trova sulla $i$-esima riga (dall'alto) e sulla $j$-esima colonna (da sinistra). Ad esempio,

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 8 \\ 2 & 7 & 11 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

è una matrice $3 \times 3$. La sua componente $(2, 3)$ è- 11. In generale, una matrice $n \times n$ è detta *matrice quadrata*.

# Prodotto di matrici

Il prodotto di due matrici è ben definito solo se il numero di colonne della prima matrice è uguale al numero di righe della seconda. Se $A$ è una matrice $m \times n$ ($m$ righe, $n$ colonne) e $B$ è una matrice $n \times p$ ($n$ righe, $p$ colonne), allora il loro prodotto $AB$ è la matrice $m \times p$ ($m$ righe, $p$ colonne) data da

$$(AB)_{ij} = A_{i1} * B_{1j} + A_{i2} * B_{2j} + ... + A_{in} * B_{nj} \tag{3}$$

per ogni coppia $i, j$.

Ad esempio:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ = & \begin{pmatrix} (1 \times 3 + 0 \times 2 + 2 \times 1) & (1 \times 1 + 0 \times 1 + 2 \times 0) \\ (-1 \times 3 + 3 \times 2 + 1 \times 1) & (-1 \times 1 + 3 \times 1 + 1 \times 0) \end{pmatrix} \\ = & \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} . \end{aligned} \tag{4}$$

# Determinante di una matrice quadrata

Sia $A = (A_{ij})$ una matrice quadrata.

- Se A è una matrice $1 \times 1$, allora $\det(A) = A_{11}$.
- Se A è una matrice $2 \times 2$, allora $\det(A) = A_{11}A_{22} - A_{21}A_{12}$ .

- Se A è una matrice $3 \times 3$, allora

$$\begin{aligned} \det(A) &= A_{11}A_{22}A_{33} + A_{13}A_{21}A_{32} + A_{12}A_{23}A_{31} \\ &\quad -A_{13}A_{22}A_{31} - A_{11}A_{23}A_{32} - A_{12}A_{21}A_{33}. \end{aligned} \tag{5}$$

Per una matrice quadrata generica $n \times n$, è possibile calcolare il determinante in termini di una espansione lungo una riga o una colonna a scelta, utilizzando la formula di Laplace, che è efficiente per matrici relativamente piccole. Ad esempio, espandendo lungo la riga $i$, abbiamo

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} A_{ij}(-1)^{i+j} M_{ij} \tag{6}$$

dove $M_{ij}$ è il *minore* $i, j$, definito come il determinante della matrice che risulta da $A$ rimuovendone la riga $i$ e la colonna $j$.

# Matrice inversa

Supponiamo che $A = (A_{ij})$ sia una matrice quadrata. La sua matrice inversa è la matrice, denotata con $A^{-1}$, tale che

$$A\, A^{-1} = A^{-1}\, A = I \tag{7}$$

dove $I$ è la *matrice unità*, di componenti

$$I_{ij} = \delta_{ij}\,. \tag{8}$$

Riscrivendo la (7) in componenti.

$$\sum_k A_{ik} A^{-1}_{kj} = \delta_{ij}\,. \tag{9}$$

La matrice inversa può essere calcolata, componente per componente, mediante la seguente formula:

$$A^{-1}_{ij} = \frac{1}{detA}\,(M_{ij})^T\,(-1)^{i+j} \tag{10}$$

dove $M_{ij}$ è il *minore* $ij$, definito nella sezione precedente, e il simbolo $(\ )^T$ denota la *matrice trasposta*, definita da

$$B^T_{ij} \equiv B_{ji}\,. \tag{11}$$