PRIMA ESERCITAZIONE

1 Trasformazione di vettori e 1-forme per cambiamenti di coordinate

Consideriamo lo spazio di Minkowski in coordinate cartesiane $\{x^\mu\} \equiv (x^0, x^1, x^2, x^3)$. La sua metrica è

$$ds^2 = -(dx^0)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \tag{1}$$

con

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \tag{2}$$

Consideriamo le coordinate polari $\{x^{\alpha'}\} \equiv (x^{0'}, r, \theta, \phi)$, definite nell'insieme

$$r > 0, \quad 0 < \theta < \pi, \quad 0 < \phi < 2\pi \tag{3}$$

in termini delle coordinate cartesiane mediante la *trasformazione di coordinate*

$$x^\mu = x^\mu(x^{\alpha'}) \ : \quad \begin{cases} x^0 &= x^{0'} \\ x^1 &= r\sin\theta\cos\phi \\ x^2 &= r\sin\theta\sin\phi \\ x^3 &= r\cos\theta \end{cases} . \tag{4}$$

Passando dalle coordinate cartesiane alle coordinate polari, i vettori di base $\vec{e}_{(\mu)} \equiv \frac{\vec{\partial}}{\partial x^\mu}$ e le 1-forme di base $\tilde{\omega}^{(\mu)} \equiv dx^\mu$ si trasformano secondo le

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}^{(\mu)} &= \Lambda^\mu{}_{\alpha'} \tilde{\omega}^{(\alpha')} \\ \vec{e}_{(\mu)} &= \Lambda^{\alpha'}{}_\mu \vec{e}_{(\alpha')} \end{aligned} \tag{5}$$

con

$$\begin{aligned} \Lambda^\mu{}_{\alpha'} &\equiv \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\alpha'}} \\ \Lambda^{\alpha'}{}_\mu &\equiv \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\mu} . \end{aligned} \tag{6}$$

Sottolineiamo che per $\frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\alpha'}}$ si intendono le derivate delle funzioni di trasformazione di coordinate $x^\mu(x^{\alpha'})$, nel nostro caso le (4), e per $\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\mu}$ le derivate delle trasformazioni di coordinate inverse $x^{\alpha'}(x^\mu)$.

Definiamo la matrice Λ di componenti $\Lambda^\mu{}_{\alpha'}$

$$\Lambda = (\Lambda^\mu{}_{\alpha'}) = \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\alpha'}} \right) . \tag{7}$$

In questa definizione, per convenzione, l'indice di riga è l'indice alto (in questo caso μ), mentre l'indice di colonna è l'indice basso (in questo caso α') (ricordiamo che nel prodotto righe per colonne tra due matrici $A \cdot B = C$ con $C_{ik} = A_{ij}B_{jk}$, gli indici che si contraggono sono l'indice di colonna della matrice di sinistra e l'indice di riga della matrice di destra).

Consideriamo la matrice che ha come componenti le $\Lambda^{\alpha'}_{\ \mu}$, con la stessa convenzione sugli indici di riga e di colonna. Poichè

$$\Lambda^{\mu}_{\ \alpha'}\Lambda^{\alpha'}_{\ \nu} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\alpha'}}\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\nu}} = \delta^{\mu}_{\nu}\,, \tag{8}$$

e questo è un prodotto righe per colonne in quanto si contrae l'indice di colonna della prima matrice e l'indice di riga della seconda, ne segue che la matrice di componenti $\Lambda^{\alpha'}_{\ \mu}$ è quella matrice che, moltiplicata per Λ, dà l'identità, ovvero è l'inversa:

$$\Lambda^{-1} = \left(\Lambda^{\alpha'}_{\ \mu}\right) = \left(\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\mu}}\right)\,. \tag{9}$$

Quindi, per determinare le derivate $\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\mu}}$ non è necessario invertire le funzioni $x^{\mu}(x^{\alpha'})$, ricavando le $x^{\alpha'}(x^{\mu})$, e poi derivare queste ultime rispetto agli x^{μ}: basta calcolare la matrice Λ e invertirla.

Nel caso della trasformazione di coordinate (4), derivando le $x^{\mu}(x')$ si trova

$$\begin{aligned}\Lambda &= (\Lambda^{\mu}_{\ \alpha'}) = \left(\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\alpha'}}\right)\\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \sin\theta\cos\phi & r\cos\theta\cos\phi & -r\sin\theta\sin\phi\\ 0 & \sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi\\ 0 & \cos\theta & -r\sin\theta & 0\end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{10}$$

La matrice inversa è

$$\begin{aligned}\Lambda^{-1} &= \left(\Lambda^{\alpha'}_{\ \mu}\right)\\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \sin\theta\cos\phi & \sin\theta\sin\phi & \cos\theta\\ 0 & \frac{1}{r}\cos\theta\cos\phi & \frac{1}{r}\cos\theta\sin\phi & -\frac{1}{r}\sin\theta\\ 0 & -\frac{\sin\phi}{r\sin\theta} & \frac{\cos\phi}{r\sin\theta} & 0\end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{11}$$

In generale un campo vettoriale (che spesso per brevità di notazione verrà impropriamente detto "vettore", così come i campi di 1-forme verranno spesso impropriamente detti "1-forme") $\vec{V}$ si esprime nei due sistemi di coordinate $\{x^{\mu}\}$ e $\{x^{\alpha'}\}$ rispettivamente come

$$\vec{V} = V^{\mu}(x)\vec{e}_{(\mu)} = V^{\alpha'}(x')\vec{e}_{(\alpha')} \tag{12}$$

per cui le componenti di $\vec{V}$ nelle due basi, $V^\mu(x)$ e $V^{\alpha'}(x')$, si trasformano secondo la

$$V^\mu(x) = \Lambda^\mu{}_{\alpha'} V^{\alpha'}(x'(x)) \,. \tag{13}$$

Per un campo di $1 - forme$ $\tilde{\sigma}$, analogamente,

$$\tilde{\sigma} = \sigma_\mu(x)\tilde{\omega}^{(\mu)} = \sigma_{\alpha'}(x')\tilde{\omega}^{(\alpha')} \tag{14}$$

e

$$\sigma_\mu(x) = \Lambda^{\alpha'}{}_\mu \sigma_{\alpha'}(x'(x)) \,. \tag{15}$$

È da notare che per trasformare un campo di vettori o 1-forme (o, più in generale, un campo tensoriale) non è sufficiente applicare gli operatori Λ, Λ^{-1}, bisogna anche esprimere le vecchie coordinate nelle nuove coordinate. Consideriamo ad esempio un campo scalare dato nelle coordinate x^μ, $\Phi(x)$. Cambiando coordinate

$$\{x^\mu\} \longrightarrow \{x^{\alpha'}\} \,, \tag{16}$$

il campo scalare si trasforma come segue:

$$\Phi(x) \longrightarrow \Phi'(x') \equiv \Phi(x(x')) \tag{17}$$

dove $x(x')$ sono le trasformazioni di coordinate, in questo caso le (4). Ad esempio, se in coordinate cartesiane

$$\Phi(x) = (x^1)^2 + (x^2)^2 \,, \tag{18}$$

in coordinate polari il campo diventa

$$\Phi'(x') \equiv \Phi(x(x')) = (x^1(r,\theta,\phi))^2 + (x^2(r,\theta,\phi))^2 = r^2 \sin^2\theta \,, \tag{19}$$

per cui la sua forma funzionale cambia, anche se il valore assunto dal campo scalare in un dato punto della varietà è lo stesso.

Consideriamo un campo vettoriale $\vec{V}$ che, in coordinate cartesiane $\{x^\mu\}$, abbia la forma

$$\{V^\mu(x)\} = (V^0, V^1, V^2, V^3) = \left((x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2, -x^2, x^1, 0\right) \,, \tag{20}$$

ovvero, in notazione geometrica,

$$\vec{V} = \left((x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2\right) \vec{e}_{(0)} - x^2 \vec{e}_{(1)} + x^1 \vec{e}_{(2)} \,. \tag{21}$$

Le componenti in coordinate polari del campo vettoriale $\vec{V}$ saranno

$$\begin{aligned} V^{\alpha'}(x') &= \Lambda^{\alpha'}{}_\mu V^\mu\left(x(x')\right) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin\theta\cos\phi & \sin\theta\sin\phi & \cos\theta \\ 0 & \frac{1}{r}\cos\theta\cos\phi & \frac{1}{r}\cos\theta\sin\phi & -\frac{1}{r}\sin\theta \\ 0 & -\frac{\sin\phi}{r\sin\theta} & \frac{\cos\phi}{r\sin\theta} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r^2 \\ -r\sin\theta\sin\phi \\ r\sin\theta\cos\phi \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} r^2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \,. \end{aligned} \tag{22}$$

Notare che abbiamo scritto $\Lambda^{\alpha'}{}_{\mu} V^{\mu}$ come prodotto riga per colonna della matrice Λ per il vettore colonna $\vec{V}$; abbiamo potuto farlo perchè l'indice contratto (o, come si dice, "muto") è in questo caso l'indice μ, che è l'indice di colonna della matrice Λ; se si considera $\vec{V}$ come un vettore colonna, l'indice μ di V^{μ} è l'indice di riga di $\vec{V}$, e abbiamo quindi il prodotto matriciale $\Lambda\, V$.

Consideriamo ora la 1-forma $\tilde{\sigma}$ di componenti (nelle coordinate $\{x^{\mu}\}$)

$$\{\sigma_{\mu}(x)\} = (\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = (0, x^1, x^2, x^3)\,, \tag{23}$$

e calcoliamo le sue componenti in coordinate polari. Esse saranno

$$\sigma_{\alpha'}(x') = \Lambda^{\mu}{}_{\alpha'} \sigma_{\mu}(x(x'))\,. \tag{24}$$

In questo caso l'indice muto è l'indice di riga di Λ. Poichè nel prodotto riga per colonna si contraggono l'indice di colonna della matrice di sinistra e l'indice di riga della matrice di destra, se vogliamo scrivere la (24) come prodotto righe per colonne la Λ deve stavolta essere la matrice di destra, e $\tilde{\sigma}$ deve essere visto come un vettore riga:

$$\begin{aligned}
&\sigma_{\alpha'}(x') = \Lambda^{\mu}{}_{\alpha'} \sigma_{\mu}(x(x')) \\
&= (0, r\sin\theta\cos\phi, r\sin\theta\sin\phi, r\cos\theta) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin\theta\cos\phi & r\cos\theta\cos\phi & -r\sin\theta\sin\phi \\ 0 & \sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\sin\phi & r\cos\theta\cos\phi \\ 0 & \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix} \\
&= (0, r, 0, 0)\,.
\end{aligned} \tag{25}$$

Consideriamo ancora la metrica (1) in coordinate cartesiane

$$ds^2 = -(dx^0)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2\,. \tag{26}$$

Per trasformarla in coordinare polari, potremmo utilizzare la formula di trasformazione del tensore metrico. Ma, per determinare la trasformazione della metrica per un cambiamento di coordinate, esiste un metodo a volte più veloce: è sufficiente sostituire nella (26) la trasformazione delle 1–forme di base $\tilde{\omega}^{(\mu)} = dx^{\mu}$,

$$dx^{\mu} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\alpha'}} dx^{\alpha'} \tag{27}$$

che può essere ottenuta differenziando le $x^{\mu}(x^{\alpha'})$ (nel nostro caso le (4)):

$$\begin{aligned}
dx^0 &= dx^{0'} \\
dx^1 &= \sin\theta\cos\phi dr + r\cos\theta\cos\phi d\theta - r\sin\theta\sin\phi d\phi \\
dx^2 &= \sin\theta\sin\phi dr + r\cos\theta\sin\phi d\theta + r\sin\theta\cos\phi d\phi \\
dx^3 &= \cos\theta dr - r\sin\theta d\theta\,.
\end{aligned} \tag{28}$$

Sostituendo nella (26) si trova la metrica dello spazio piatto in coordinate polari:

$$dx^2 = -(dx^{0'})^2 + dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2\sin\theta^2 d\phi^2\,. \tag{29}$$

2 Trasformazione di tensori per cambiamenti di coordinate

Consideriamo lo spazio-tempo di Minkowski in coordinate cilindriche. Siano $\{x^{\alpha'}\} \equiv (t, r, \phi, z)$ le coordinate cilindriche, $\{x^{\mu'}\} \equiv (t', x', y', z')$ le coordinate cartesiane, legate tra loro dalla trasformazione di coordinate

$$x^{\alpha'} = x^{\alpha'}(x^\mu) \; : \quad \left\{ \begin{array}{ccc} t' & = & t \\ x' & = & r\cos\phi \\ y' & = & r\sin\phi \\ z' & = & z \end{array} \right. . \tag{30}$$

Troviamo la matrice Λ che governa le trasformazioni di tensori per cambiamenti di coordinate, derivando le (30). Nelle nostre convenzioni,

$$\begin{aligned} \Lambda &= (\Lambda^{\mu}{}_{\alpha'}) = \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\alpha'}}\right) \\ \Lambda^{-1} &= \left(\Lambda^{\alpha'}_{\ \mu}\right) = \left(\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\mu}\right) . \end{aligned} \tag{31}$$

La matrice che possiamo calcolare derivando le (30) è Λ^{-1}, dopodichè, invertendola, troviamo Λ:

$$\begin{aligned} \Lambda^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -r\sin\phi & 0 \\ 0 & \sin\phi & r\cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \Lambda &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ 0 & -\frac{1}{r}\sin\phi & \frac{1}{r}\cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \end{aligned} \tag{32}$$

Sia dato il tensore di tipo $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ **nel sistema di coordinate cilindriche**.

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & r & 0 \\ 0 & \sin\phi & 0 & 0 \\ r\cos\phi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \tag{33}$$

Vogliamo trovare le sue componenti nel sistema di coordinate cartesiane. Sarà

$$T_{\alpha'\beta'} = \Lambda^{\mu}{}_{\alpha'}\Lambda^{\nu}{}_{\beta'}T_{\mu\nu} . \tag{34}$$

La (34) può essere calcolata componente per componente:

$$\begin{aligned} T_{0'0'} &= \Lambda^0_{0'}\Lambda^0_{0'}T_{00} + \Lambda^0_{0'}\Lambda^1_{0'}T_{01} + \ldots \\ T_{0'1'} &= \Lambda^0_{0'}\Lambda^0_{1'}T_{00} + \Lambda^0_{0'}\Lambda^1_{1'}T_{01} + \ldots \\ \ldots &= \ldots \end{aligned} \tag{35}$$

ma (per i tensori con al più due indici) è conveniente utilizzare il formalismo matriciale. Definiamo le matrici, che chiameremo (solo per questo calcolo) T e T', costituite dalle componenti dei tensori $T_{\alpha,\beta}$, $T_{\alpha'\beta'}$:

$$T = (T_{\mu\nu})\,, \quad T' = (T_{\alpha'\beta'})\,, \tag{36}$$

dove al solito scegliamo la convenzione secondo la quale l'indice di sinistra è di riga, quello di destra è di colonna, indipendentemente dal fatto che stiano in alto o in basso. Per poter scrivere l'espressione (34)

$$T_{\alpha'\beta'} = \Lambda^{\mu}{}_{\alpha'}\Lambda^{\nu}{}_{\beta'}T_{\mu\nu} \tag{37}$$

come prodotto righe per colonne di matrici, l'indice di colonna di una matrice si deve contrarre con l'indice di riga della matrice successiva, ovvero, nelle nostre convenzioni, gli indici sommati devono essere affiancati. Perciò, ad esempio, $\Lambda^{\nu}{}_{\beta'}T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}\Lambda^{\nu}{}_{\beta'}$ sono le componenti del prodotto righe per colonne $T\Lambda$.

Ma l'indice μ in (37) è indice di riga sia in $T_{\mu\nu}$ sia in $\Lambda^{\mu}{}_{\alpha'}$, quindi, per poter scrivere la (37) come prodotto matriciale, dobbiamo considerare in $\Lambda^{\mu}{}_{\alpha'}$ μ indice di colonna ed α' indice di riga; ciò equivale a considerare la matrice trasposta alla matrice Λ. In altre parole, nella convenzione in cui l'indice di riga sta sempre a sinistra e quello di colonna sempre a destra, data una matrice $A = (A_{ij})$, la sua matrice trasposta $A^T = (A^T_{ij})$ ha per definizione componenti

$$A^T_{ij} \equiv A_{ji}\,, \tag{38}$$

quindi

$$\Lambda^{\mu}{}_{\alpha'} = \Lambda^{T}{}_{\alpha'}{}^{\mu} \tag{39}$$

e la (34) può essere scritta

$$T_{\alpha'\beta'} = \Lambda^{T}{}_{\alpha'}{}^{\mu}\, T_{\mu\nu}\, \Lambda^{\nu}{}_{\beta'} \tag{40}$$

che corrisponde all'espressione matriciale

$$T' = \Lambda^T\, T\, \Lambda\,. \tag{41}$$

Calcolando esplicitamente,

$$\begin{aligned}
T' &= \Lambda^T\, T\, \Lambda \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\frac{1}{r}\sin\phi & 0 \\ 0 & \sin\phi & \frac{1}{r}\cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & r & 0 \\ 0 & \sin\phi & 0 & 0 \\ r\cos\phi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Lambda \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 & r & 0 \\ -\sin\phi\cos\phi & \sin\phi\cos\phi & 0 & 0 \\ \cos^2\phi & \sin^2\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ 0 & -\frac{1}{r}\sin\phi & \frac{1}{r}\cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & \cos\phi - \sin\phi & \sin\phi + \cos\phi & 0 \\ -\sin\phi\cos\phi & \sin\phi\cos^2\phi & \sin^2\phi\cos\phi & 0 \\ \cos^2\phi & \sin^2\phi\cos\phi & \sin^3\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (T_{\alpha'\beta'})
\end{aligned} \tag{42}$$

che sono le componenti del tensore nel riferimento cartesiano $\{x^{\alpha'}\}$. Esse devono però essere espresse in coordinate cartesiane, ovvero sostinuendo

$$\begin{aligned} \cos\phi &= \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} \\ \sin\phi &= \frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} \,. \end{aligned} \tag{43}$$

Analogamente, per un tensore $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ di componenti in coordinate cilindriche $T^{\mu\nu}$, le componenti in coordinate cartesiane sono

$$T^{\alpha'\beta'} = \Lambda^{\alpha'}_{\ \mu} \Lambda^{\beta'}_{\ \nu} T^{\mu\nu} = \Lambda^{\alpha'}_{\ \mu} T^{\mu\nu} \Lambda^{T}{}_{\nu}{}^{\beta'} \tag{44}$$

e, definendo le matrici $T = (T^{\mu\nu})$ e $T' = (T^{\alpha'\beta'})$, possiamo scrivere la (44) in forma matriciale:

$$T' = \Lambda^{-1} T (\Lambda^T)^{-1} \,. \tag{45}$$

Ricordare che $(\Lambda^T)^{-1} \equiv (\Lambda^{-1})^T$, ovvero in questo caso

$$(\Lambda^T)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ 0 & -r\sin\phi & r\cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \,. \tag{46}$$

Per un tensore $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

$$T^{\alpha'}_{\ \beta'} = \Lambda^{\alpha'}_{\ \mu} \Lambda^{\nu}_{\ \beta'} T^{\mu}_{\ \nu} = \Lambda^{\alpha'}_{\ \mu} T^{\mu\nu} \Lambda^{\nu}_{\ \beta'} \tag{47}$$

che, definendo le matrici $T = (T^{\mu}_{\ \nu})$ e $T' = (T^{\alpha'}_{\ \beta'})$, può esssere scritta come

$$T' = \Lambda^{-1} T \Lambda \,. \tag{48}$$