

TERZA ESERCITAZIONE

Innalzamento e abbassamento di indici

Consideriamo lo spazio di Minkowski in coordinate sferiche $\{x^\mu\} = (t, r, \theta, \phi)$. La sua metrica è

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (1)$$

con

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (2)$$

La metrica inversa sarà la matrice inversa:

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Consideriamo il vettore $\vec{V}$ di componenti

$$V^\mu = (r^2, 0, 0, 1) \quad (4)$$

e la 1-forma $\tilde{U}$ di componenti

$$U_\mu = (0, 0, r, r \sin \theta). \quad (5)$$

Abbassiamo l'indice del vettore $\vec{V}$, ottenendo le componenti della 1-forma ad esso associata:

$$V_\mu = g_{\mu\nu} V^\nu = (-r^2, 0, 0, r^2 \sin^2 \theta). \quad (6)$$

Innalziamo l'indice della 1-forma $\tilde{U}$, ottenendo le componenti del vettore ad essa associato:

$$U^\mu = g^{\mu\nu} U_\nu = (0, 0, \frac{1}{r}, \frac{1}{r \sin \theta}). \quad (7)$$

Il prodotto scalare $\tilde{U} \cdot \vec{V}$ può essere calcolato in diversi modi:

$$\tilde{U} \cdot \vec{V} = U_\mu V^\mu = g_{\mu\nu} U^\mu V^\nu = g^{\mu\nu} U_\mu V_\nu = r \sin \theta. \quad (8)$$

Consideriamo ora lo spazio di Minkowski in coordinate cilindriche $\{x^\mu\} = (t, r, \phi, z)$. La sua metrica è

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\phi^2 + dz^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (9)$$

con

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

La metrica inversa sarà la matrice inversa:

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Consideriamo il tensore $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ di componenti

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & r & 0 \\ 0 & \sin \phi & 0 & 0 \\ r \cos \phi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Innalziamo il primo indice.

$$\begin{aligned} T^\mu_\nu = g^{\mu\sigma} T_{\sigma\nu} &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & r & 0 \\ 0 & \sin \phi & 0 & 0 \\ r \cos \phi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & -r & 0 \\ 0 & \sin \phi & 0 & 0 \\ \frac{1}{r} \cos \phi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (13)$$

Notare che nel prodotto righe per colonne abbiamo scritto a sinistra la metrica e a destra il tensore T perchè in questo modo l'indice sommato (in questo caso σ) è affiancato.

Innalziamo il secondo indice.

$$\begin{aligned} T_\mu^\nu = g^{\nu\sigma} T_{\mu\sigma} = T_{\mu\sigma} g^{\sigma\nu} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & r & 0 \\ 0 & \sin \phi & 0 & 0 \\ r \cos \phi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & \sin \phi & 0 & 0 \\ -r \cos \phi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (14)$$

Notare che nel prodotto righe per colonne stavolta abbiamo scritto a sinistra il tensore T e a destra la metrica perchè in questo modo l'indice sommato (in questo caso σ) è affiancato. Notare inoltre che

$$T_\mu^\nu \neq T^\mu_\nu. \quad (15)$$

Calcoliamo ora la *traccia* del tensore T ; essa può essere calcolata in diversi modi equivalenti:

$$\text{tr}T \equiv g^{\mu\nu}T_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}T^{\mu\nu} = T^\mu_\mu = T_\mu{}^\mu = 1 + \sin\phi. \quad (16)$$

Lunghezze di cammini

Data una varietà differenziabile $\mathcal{M}$, sia dato un cammino $\mathcal{C}$, ovvero una serie connessa di punti sulla varietà, e una sua parametrizzazione, ovvero la curva

$$\lambda \in [0, 1] \rightarrow \{x^\mu(\lambda)\}. \quad (17)$$

L'elemento di lunghezza sulla varietà è

$$ds = \sqrt{ds^2} = \sqrt{g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu} \quad (18)$$

per cui lungo la curva

$$\frac{ds}{d\lambda} = \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}} \quad (19)$$

e la lunghezza finita del cammino è

$$\Delta s = \int_0^1 d\lambda \frac{ds}{d\lambda} = \int_0^1 d\lambda \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}}. \quad (20)$$

Anche se è necessario parametrizzare il cammino per calcolarne la lunghezza, il valore della lunghezza non dipende dalla parametrizzazione scelta.

Consideriamo la varietà differenziabile S^2 data dall'insieme dei punti che costituiscono la sfera di raggio R ; descriviamo questa varietà con le coordinate polari $\{x^\mu\} = (\theta, \phi)$ definite nell'aperto

$$\begin{aligned} 0 < \theta < \pi \\ 0 < \phi < 2\pi \end{aligned} \quad (21)$$

e sia

$$ds^2 = R^2 d\theta^2 + R^2 \sin^2 \theta d\phi^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (22)$$

con

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (23)$$

la metrica in essa definita. Per questa varietà la (20) diventa

$$\Delta s = R \int_0^1 d\lambda \sqrt{\left(\frac{d\theta}{d\lambda}\right)^2 + \sin^2 \theta \left(\frac{d\phi}{d\lambda}\right)^2}. \quad (24)$$

Applichiamo la formula (24) ad alcuni casi concreti.

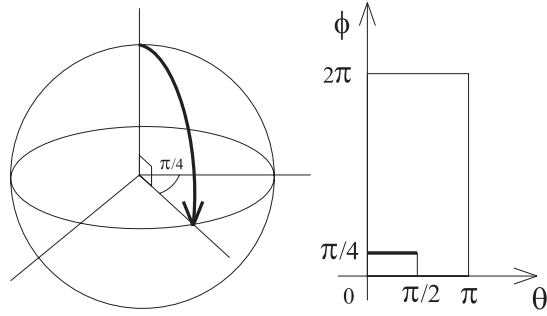


Figure 1: A sinistra rappresentiamo il cammino scelto sulla sfera S^2 , a destra la sua rappresentazione in coordinate polari in $\mathbb{R}^2$, cioè nel piano (θ, ϕ) .

1. Si consideri il cammino in figura 1. Esso va da $(0, \frac{\pi}{4})$ a $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4})$. Scegliamo la parametrizzazione $\lambda \in [0, 1] \rightarrow (\theta(\lambda), \phi(\lambda))$:

$$(\theta(\lambda), \phi(\lambda)) = \left(\frac{\pi}{2}\lambda, \frac{\pi}{4}\right). \quad (25)$$

Indicando con “.” la derivata rispetto a λ , si ha che il vettore tangente è:

$$(\dot{\theta}, \dot{\phi}) = \left(\frac{\pi}{2}, 0\right). \quad (26)$$

La lunghezza del cammino è quindi:

$$\Delta s = R \int_0^1 d\lambda \sqrt{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2} = \frac{\pi}{2}R. \quad (27)$$

2. Si consideri il cammino in figura 2. Esso va da $(\theta_0, 0)$ a $(\theta_0, 2\pi)$.

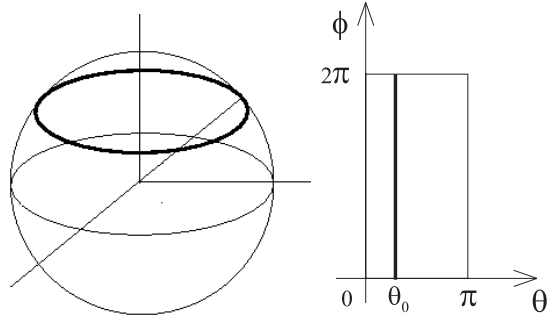


Figure 2: A sinistra rappresentiamo il cammino scelto sulla sfera S^2 , a destra la sua rappresentazione in coordinate polari in $\mathbb{R}^2$, cioè nel piano (θ, ϕ) .

Scegliamo la parametrizzazione $\lambda \in [0, 1]$

$$(\theta(\lambda), \phi(\lambda)) = (\theta_0, 2\pi\lambda) . \quad (28)$$

Il vettore tangente è:

$$(\dot{\theta}, \dot{\phi}) = (0, 2\pi) \quad (29)$$

quindi la lunghezza del cammino è:

$$\Delta s = R \int_0^1 d\lambda \sqrt{\sin^2 \theta_0 (2\pi)^2} = 2\pi R \sin \theta_0 . \quad (30)$$

Se cambiamo la parametrizzazione, ad esempio con $\lambda \in [0, 1]$

$$(\theta(\lambda), \phi(\lambda)) = (\theta_0, 2\pi\lambda^2) . \quad (31)$$

il vettore tangente diventa

$$(\dot{\theta}, \dot{\phi}) = (0, 4\pi\lambda) \quad (32)$$

e la lunghezza del cammino è

$$\Delta s = R \int_0^1 d\lambda \sqrt{\sin^2 \theta_0 (4\pi)^2 \lambda^2} = R \sin \theta_0 4\pi \int_0^1 \lambda d\lambda = 2\pi R \sin \theta_0 . \quad (33)$$

Come si vede, la lunghezza non dipende dalla parametrizzazione.

3. Si consideri il cammino in figura 3. Esso va da $(0, 0)$ a $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Scegliamo

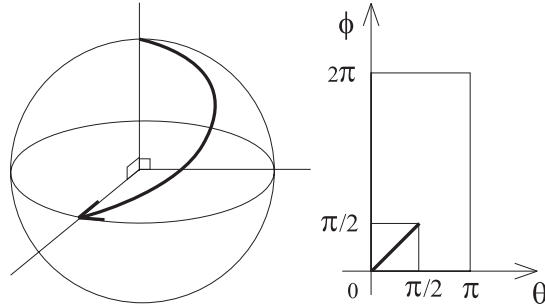


Figure 3: A sinistra rappresentiamo il cammino scelto sulla sfera S^2 , a destra la sua rappresentazione in coordinate polari in $\mathbb{R}^2$, cioè nel piano (θ, ϕ) .

la parametrizzazione $\lambda \in [0, 1]$

$$(\theta(\lambda), \phi(\lambda)) = \left(\frac{\pi}{2}\lambda, \frac{\pi}{2}\lambda\right) . \quad (34)$$

Il vettore tangente è:

$$(\dot{\theta}, \dot{\phi}) = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \quad (35)$$

quindi la lunghezza del cammino è:

$$\Delta s = R \int_0^1 d\lambda \sqrt{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + \sin^2\left(\frac{\pi}{2}\lambda\right) \left(\frac{\pi}{2}\right)^2} = R \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\alpha \sqrt{1 + \sin^2\alpha} . \quad (36)$$

Questo integrale è piuttosto difficile da risolvere. In generale, a meno di scegliere percorsi semplici, si ottengono facilmente integrali non banali.