1. Mostrare che, note la metrica $g_{\mu\nu}$ e i coefficienti della connessione affine $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$ in un punto, è sempre possibile trovare un sistema di coordinate localmente minkowskiane.

2. Dimostrare che il vettore tangente a una geodetica, quando trasportato parallelamente lungo la geodetica, rimane parallelo a sè stesso.

3. Ricavare la relazione che esiste tra i simboli di Christoffel e il tensore metrico.

4. Ricavare il tensore di Riemann calcolando come varia un vettore quando lo si trasporta parallelamente lungo un cammino chiuso infinitesimale. Dimostrare che l'oggetto cosí ottenuto è un tensore.

5. Dimostrare che il tensore di Riemann dà il commutatore delle derivate covarianti.

6. Dimostrare le identità di Bianchi ricordando che in un riferimento localmente inerziale il tensore di Riemann diventa

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{1}{2}\left[g_{\alpha\nu,\beta\mu} - g_{\alpha\mu,\beta\nu} + g_{\beta\mu,\alpha\nu} - g_{\beta\nu,\alpha\mu}\right].$$

7. Definire il tensore energia-impulso per un sistema di particelle non interagenti in Relatività Speciale, discutere il significato delle componenti e mostrare che e' un tensore.

8. Dimostrare che in Relatività Speciale il tensore energia-impulso per un sistema di particelle soddisfa la legge di conservazione $T^{\alpha\beta}{}_{,\beta} = 0$.

9. Dato il generico tensore energia-impulso $T^{\alpha\beta}$ spiegare perché l'equazione $T^{\alpha\beta}{}_{,\beta} = 0$, valida in spaziotempo piatto è una legge di conservazione, mentre $T^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = 0$, valida in spaziotempo curvo, non lo è.

10. Discutere l'equazione delle geodetiche nel limite newtoniano.

11. Ricavare le equazioni di Einstein sapendo che, nel limite newtoniano, le equazioni delle geodetiche mostrano che

$$g_{00} = -(1 + 2\frac{\Phi}{c^2}),$$

dove Φ è il potenziale newtoniano soluzione dell'equazione di Laplace

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho.$$

12. Discutere il problema dell'invarianza di gauge delle equazioni di Einstein.

13. Ricavare l'equazione di Killing e mostrare che si può scrivere nella forma

$$\xi_{\mu;\nu} + \xi_{\nu;\mu} = 0.$$

Mostrare che se lo spaziotempo ammette un campo di vettori di Killing, si possono scegliere le coordinate in modo da sfruttare le simmetrie ad essi associate.

14. Mostrare che se una metrica ammette dei vettori di Killing si possono associare quantità conservate al moto geodetico e al tensore energia-impulso.

15. Definire cos'è un campo vettoriale ortogonale a una famiglia di ipersuperfici e mostrare come l'esistenza di un campo vettoriale che goda di questa proprietà consente di semplificare la forma del tensore metrico.

16. Ricavare la forma generale che deve avere la metrica che descrive uno spaziotempo statico e a simmetria sferica.

17. Data la metrica che descrive uno spaziotempo statico e a simmetria sferica

$$ds^2 = -e^{2\nu}(dx^0)^2 + e^{2\lambda}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2),$$

e date le equazioni di Einstein che deve soddisfare

$$\begin{aligned}
&a) \quad G_{00} = \frac{1}{r^2}e^{2\nu}\frac{d}{dr}\left[r(1-e^{-2\lambda})\right] \qquad (1)\\
&b) \quad G_{rr} = -\frac{1}{r^2}e^{2\lambda}\left[(1-e^{-2\lambda})\right] + \frac{2}{r}\nu_{,r}\\
&c) \quad G_{\theta\theta} = r^2e^{-2\lambda}\left[\nu_{,rr} + \nu_{,r}^2 + \frac{\nu_{,r}}{r} - \nu_{,r}\lambda_{,r} - \frac{\lambda_{,r}}{r}\right]\\
&d) \quad G_{\varphi\varphi} = \sin^2\theta G_{\theta\theta}
\end{aligned}$$

ricavare la soluzione di Schwarzschild.

18. Discutere la natura delle ipersuperfici in Relatività Generale e, data la metrica di Schwarzschild

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2m}{r}\right)} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2,$$

spiegare perché la superficie $r = 2m$ è un orizzonte degli eventi.

19. Derivare e discutere il redshift gravitazionale delle linee spettrali.

20. Data la metrica di Schwarzschild

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2m}{r}\right)} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2$$

derivare le equazioni delle geodetiche per particelle di massa nulla, e discutere i vari tipi di orbita.

21. Data la metrica di Schwarzschild

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2m}{r}\right)} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2$$

derivare le equazioni delle geodetiche per particelle massive e discutere i vari tipi di orbita.

22. Utilizzando le equazioni delle geodetiche per particelle di massa nulla nella metrica di Schwarzschild

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \quad \dot{t} = \frac{E}{\left(1 - \dfrac{2m}{r}\right)}$$
$$\dot{\phi} = \frac{L}{r^2}, \quad \dot{r}^2 = E^2 - \frac{L^2}{r^2}\left(1 - \frac{2m}{r}\right)$$

derivare e discutere il fenomeno della deflessione della luce nelle vicinanze di un corpo massivo.

23. Utilizzando le equazioni delle geodetiche per particelle massive nella metrica di Schwarzschild

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \quad \dot{t} = \frac{E}{\left(1 - \dfrac{2m}{r}\right)}$$

$$\dot{\phi} = \frac{L}{r^2}, \quad \dot{r}^2 = E^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)\left(1 + \frac{L^2}{r^2}\right)$$

derivare e discutere il fenomeno della precessione del perielio.

24. Descrivere il moto di una particella massiva che cada radialmente in un buco nero di Schwarzschild. Discutere il problema sia dal punto di vista di un osservatore all'infinito, che di un osservatore solidale con la particella.

25. Ricavare l'equazione della deviazione geodetica.

26. Mostrare che le equazioni di Einstein

$$\left\{\Box_F h_{\mu\nu} - \left[\frac{\partial^2}{\partial x^\lambda \partial x^\mu} h^\lambda_\nu + \frac{\partial^2}{\partial x^\lambda \partial x^\nu} h^\lambda_\mu - \frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x^\nu} h^\lambda_\lambda\right]\right\} = -\frac{16\pi G}{c^4}\left(T^{pert}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T^{pert\ \lambda}_{\lambda}\right) \tag{2}$$

per la metrica

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \qquad |h_{\mu\nu}| << 1,$$

con un'opportuna scelta di gauge e ponendo $\bar{h}_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} h^\lambda{}_\lambda$, si possono scrivere nella forma

$$\begin{cases} \Box_F \bar{h}_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} T^{pert}_{\mu\nu} \\ \frac{\partial}{\partial x^\mu} \bar{h}^\mu{}_\nu = 0\,. \end{cases} \tag{3}$$

27. Si dimostri che le equazioni delle onde gravitazionali nel vuoto ammettono soluzioni di onda piana.
Scegliendo la gauge in maniera opportuna (spiegando anche che, con tale scelta, la condizione di gauge armonica rimane soddisfatta), si dimostri che le onde gravitazionali sono trasverse, a traccia nulla e hanno due soli stati di polarizzazione.

28. Discutere le conseguenze dell'equazione della deviazione geodetica su un sistema di particelle in presenza di un'onda gravitazionale piana del tipo
$$h_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h_{zz} \end{pmatrix}$$
con $h_{yy} = -h_{zz} = 2A_+ \cos\omega(t - \frac{x}{c})$.
Si ricordi che
$$R_{iklm} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 h_{im}}{\partial x^k \partial x^l} + \frac{\partial^2 h_{kl}}{\partial x^i \partial x^m} - \frac{\partial^2 h_{il}}{\partial x^k \partial x^m} - \frac{\partial^2 h_{km}}{\partial x^i \partial x^l}\right) + O(h^2),$$

29. Discutere le conseguenze dell'equazione della deviazione geodetica su un sistema di particelle in presenza di un'onda gravitazionale piana del tipo
$$h_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h_{yz} \\ 0 & 0 & h_{zy} & 0 \end{pmatrix}$$
con $h_{yz} = h_{zy} = 2A_\times \cos\omega(t - \frac{x}{c})$.
Si ricordi che
$$R_{iklm} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 h_{im}}{\partial x^k \partial x^l} + \frac{\partial^2 h_{kl}}{\partial x^i \partial x^m} - \frac{\partial^2 h_{il}}{\partial x^k \partial x^m} - \frac{\partial^2 h_{km}}{\partial x^i \partial x^l}\right) + O(h^2),$$