

QUINTA ESERCITAZIONE

Consideriamo lo spazio-tempo descritto, nel riferimento O , dalle coordinate $\{x^\mu\} = (t, r, \theta, \phi)$, con metrica

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \frac{1}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (1)$$

dove $M > 0$ è una costante. Sia dato il vettore $\vec{V}$ di componenti

$$V^\mu = \left(\sqrt{1 - \frac{2M}{r}}, r, 0, 0 \right). \quad (2)$$

Calcolare simboli di Christoffel.

Calcolare

$$V^t_{;t}; \quad V^t_{;r}; \quad V^\theta_{;r}; \quad V^\theta_{;\theta}. \quad (3)$$

I simboli di Christoffel possono essere calcolati dalle formule

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} = g^{\mu\nu}\Gamma_{\alpha\beta\nu} \quad (4)$$

dove abbiamo definito per comodità di calcolo i simboli di Christoffel con indici bassi

$$\Gamma_{\alpha\beta\nu} \equiv \frac{1}{2}(g_{\alpha\nu,\beta} + g_{\beta\nu,\alpha} - g_{\alpha\beta,\nu}). \quad (5)$$

Le derivate non nulle delle componenti del tensore metrico sono

$$\begin{aligned} g_{tt,r} &= -\frac{2M}{r^2} & g_{rr,r} &= -\frac{2M}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-2} & g_{\theta\theta,r} &= 2r \\ g_{\phi\phi,r} &= 2r \sin^2 \theta & g_{\phi\phi,\theta} &= 2r^2 \sin \theta \cos \theta \end{aligned} \quad (6)$$

quindi i simboli di Christoffel non nulli con indici bassi sono

$$\begin{aligned} \Gamma_{tt r} &= \frac{1}{2}(g_{tr,t} + g_{tr,t} - g_{tt,r}) = -\frac{1}{2}g_{tt,r} = \frac{M}{r^2} \\ \Gamma_{tr t} &= \Gamma_{rt t} = \frac{1}{2}(g_{tt,r} + g_{rt,t} - g_{tr,t}) = \frac{1}{2}g_{tt,r} = -\frac{M}{r^2} \\ \Gamma_{rr r} &= \frac{1}{2}(g_{rr,r} + g_{rr,r} - g_{rr,r}) = \frac{1}{2}g_{rr,r} = -\frac{M}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-2} \\ \Gamma_{\theta\theta,r} &= -\frac{1}{2}g_{\theta\theta,r} = -r \\ \Gamma_{\theta r,\theta} &= \Gamma_{r\theta,\theta} = \frac{1}{2}g_{\theta\theta,r} = r \\ \Gamma_{\phi\phi,r} &= -\frac{1}{2}g_{\phi\phi,r} = -r \sin^2 \theta \\ \Gamma_{\phi r,\phi} &= \Gamma_{r\phi\phi} = \frac{1}{2}g_{\phi\phi,r} = r \sin^2 \theta \\ \Gamma_{\phi\phi,\theta} &= -\frac{1}{2}g_{\phi\phi,\theta} = -r^2 \sin \theta \cos \theta \\ \Gamma_{\phi\theta,\phi} &= \Gamma_{\theta\phi\phi} = \frac{1}{2}g_{\phi\phi,\theta} = r^2 \sin \theta \cos \theta. \end{aligned} \quad (7)$$

Contraendo con la metrica inversa

$$g^{\mu\nu} = \text{diag} \left(-\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}, \left(1 - \frac{2M}{r}\right), r^{-2}, r^{-2} \sin^{-2} \theta \right), \quad (8)$$

si trova l'insieme dei simboli di Christoffel non nulli:

$$\begin{aligned} \Gamma_{tt}^r &= \frac{M}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \\ \Gamma_{rt}^t = \Gamma_{tr}^t &= \frac{M}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{rr}^r &= -\frac{M}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \\
\Gamma_{\theta\theta}^r &= -(r - 2M) \\
\Gamma_{\phi\phi}^r &= -(r - 2M) \sin^2 \theta \\
\Gamma_{\theta r}^\theta = \Gamma_{r\theta}^\theta &= \frac{1}{r} \\
\Gamma_{\phi r}^\phi = \Gamma_{r\phi}^\phi &= \frac{1}{r} \\
\Gamma_{\phi\phi}^\theta &= -\sin \theta \cos \theta \\
\Gamma_{\phi\theta}^\phi &= \cot \theta.
\end{aligned} \tag{9}$$

Si ha

$$\begin{aligned}
V^t_{;t} &= V^t_{,t} + \Gamma_{t\mu}^t V^\mu = \Gamma_{tr}^t V^r = \frac{M}{r \left(1 - \frac{2M}{r}\right)} \\
V^t_{;r} &= V^t_{,r} + \Gamma_{r\mu}^t V^\mu = V^t_{,r} + \Gamma_{rt}^t V^t = \frac{2M}{r^2 \sqrt{1 - \frac{2M}{r}}} \\
V^\theta_{;r} &= V^\theta_{,r} + \Gamma_{r\mu}^\theta V^\mu = 0 \\
V^\theta_{;\theta} &= V^\theta_{,\theta} + \Gamma_{\theta\mu}^\theta V^\mu = \Gamma_{\theta r}^\theta V^r = 1.
\end{aligned} \tag{10}$$