

CORSO DI RELATIVITA' GENERALE

Docente: Valeria Ferrari stanza 253, II piano Vecchio edificio Fisica

E-mail valeria.ferrari@roma1.infn.it

Ricevimento: martedì' dalle 14 alle 15

Leonardo Gualtieri

Stanza 202c, II piano Vecchio edificio Fisica

E-mail leonardo.gualtieri@roma1.infn.it

Ricevimento: martedì' dalle 15 alle 16

Tutte le informazioni sul corso si troveranno sul sito
http://www.roma1.infn.it/teongrav/teaching2014_15.html

cliccando su Relativita' Generale

sul sito troverete tutte le informazioni relative al corso

Testi consigliati

Dispense e programma del corso sono disponibili sul sito

**B. Schutz, *A first Course in General Relativity*
Cambridge University Press**

PRE-REQUISITO FONDAMENTALE PER SEGUIRE QUESTO CORSO:

CONOSCERE LA RELATIVITÀ SPECIALE

Ripassate le trasformazioni di Lorentz!!!

Finalita' del corso:

Lo scopo del corso e' di introdurre le nozioni di base della teoria moderna della gravitazione e delle sue piu' importanti implicazioni in campo astrofisico

PROGRAMMA del CORSO:

- ⊙ La teoria newtoniana della gravita' e il ruolo del principio di equivalenza nella formulazione della teoria Einsteiniana della gravita';
- ⊙ l'equazione delle geodetiche come conseguenza del Principio di equivalenza
- ⊙ Gli strumenti matematici per costruire la teoria della gravita':
varietà differenziabili, vettori, 1-forme, tensori. Come descriviamo il campo gravitazionale: il tensore metrico, trasporto parallelo e derivata covariante. Tensore di curvatura e identità di Bianchi
- ⊙ Tensore energia-impulso, principio di covarianza generale, leggi di conservazione
- ⊙ Le equazioni di Einstein per il campo gravitazionale. Simmetrie, vettori di Killing e leggi di conservazione
- ⊙ Campo gravitazionale all'esterno di una distribuzione di massa statica e a simmetria sferica: la soluzione di Schwarzschild; il concetto di buco nero, l'orizzonte degli eventi
- ⊙ Fenomeni che avvengono nelle vicinanze di corpi massivi: redshift gravitazionale, deflessione della luce e precessione del perielio.
- ⊙ Soluzioni ondose delle equazioni di Einstein. Le equazioni della deviazione geodetica

A partire da quest'anno l'esame sara' solo orale

PERO'

**ci sara' un esonero il 20 Novembre sulla parte "tecnica" del corso
(grosso modo I primi 5 capitoli delle dispense)**

**Esempi di esoneri e compiti d'esame degli anni passati si
trovano sul sito**

**Chi supera l'esonero, all'orale non dovra' rispondere su questa parte del programma.
Chi non lo supera, all'orale dovra' rispondere anche su questa parte del programma.**

L'esonero e' valido solo per l'anno accademico in corso.

l'esonero non avra' un voto:

o si supera o non si supera

PROVA ORALE:

Tutti gli studenti che devono sostenere l'esame orale devono presentarsi all'ora e nel giorno di convocazione indicati sotto.

Verranno suddivisi in gruppi di 6-8 persone che dovranno presentarsi all'orario che verra' comunicato loro in loco.

A ogni studente verra' assegnata una domanda dell'elenco che si trova sul sito del corso.

Gli studenti si siederanno nei banchi e scriveranno quanto sanno sulla domanda (equazioni e dimostrazioni), avendo a disposizione circa 20 minuti. Trascorso questo tempo verranno chiamati in successione e sosterranno l'esame orale, che vertera' sulla domanda assegnata e su ulteriori approfondimenti degli argomenti svolti a lezione.

Durante l'intero svolgimento dell'esame gli studenti non possono consultare testi o appunti e non devono parlare tra loro.

Data Appello	Data Inizio	Data Fine	
Prenotazione	Prenotazione		
06/11/2014	20/10/2014	31/10/2014	riservato fuoricorso
03/02/2015	15/01/2015	27/01/2015	
25/02/2015	10/02/2015	18/02/2015	
19/05/2015	06/05/2015	13/05/2015	riservato fuoricorso
24/06/2015	03/06/2015	17/06/2015	
08/09/2015	17/08/2015	02/09/2015	
05/11/2015	20/10/2015	31/10/2015	riservato fuoricorso

La Relatività Generale è la teoria fisica della gravitazione

basata sul

Principio di Equivalenza tra gravitazione e inerzia

e

Sul Principio di Covarianza Generale

Perché la teoria newtoniana diventa inappropriata a descrivere il campo gravitazionale?

Perché c'è bisogno di un tensore per descrivere il campo gravitazionale?

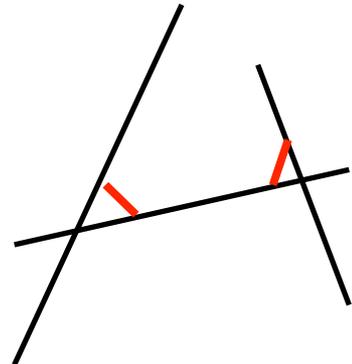
**Qual è il ruolo del
Principio di Equivalenza e del
Principio di Covarianza Generale
nella formulazione delle equazioni di Einstein?**

L' arena della fisica pre-relativistica è lo spazio piatto della geometria euclidea

I postulati di Euclide (~325-265 ac)

Risulti postulato che:

- 1) si possa tracciare una retta da un punto qualsiasi ad ogni altro punto;**
- 2) si possa prolungare indefinitamente una linea retta ;**
- 3) si possa descrivere un cerchio con un centro qualsiasi e un raggio qualsiasi;**
- 4) tutti gli angoli retti siano uguali fra di loro;**
- 5) se una retta che interseca due altre rette forma, dalla stessa parte, angoli inferiori a due angoli retti, le due rette, se estese indefinitamente, si incontrano da quella parte dove gli angoli sono inferiori a due angoli retti.**



Gauss 1824 (Germania)

Bolay 1832 (Austria)

Lobachevski 1826 (Russia)

Scoprirono indipendentemente una geometria che soddisfa tutti i postulati di Euclide **eccetto il quinto**

Spazio bi-dimensionale a curvatura negativa

Rappresentazione analitica scoperta da Felix Klein nel 1870

Per ogni coppia di numeri reali (x_1, x_2) tali che

$x_1^2 + x_2^2 < 1$ definiamo la distanza

$$d(x, X) = a \cosh^{-1} \left[\frac{1 - x_1 X_1 - x_2 X_2}{\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2} \sqrt{1 - X_1^2 - X_2^2}} \right]$$

a = lunghezza di scala

L'indipendenza logica del quinto postulato di Euclide era così dimostrata

Nel 1827 Gauss pubblica le
Disquisitiones generales circa superficies curvas

In cui distingue tra

Proprietà **interne o intrinseche** di una superficie
e

Proprietà **esterne o estrinseche**

La proprietà **intrinseca** fondamentale è la **distanza** tra due punti; la geometria intrinseca di un cono o un cilindro è piatta, ma non lo è quella di una sfera

La geometria intrinseca di una superficie considera solo le relazioni tra punti che stanno sulla superficie

Le proprietà **estrinseche** hanno a che vedere con l'**embedding** della superficie in uno spazio a dimensione più alta: es. curvatura estrinseca

Noi ci occuperemo essenzialmente delle proprietà intrinseche

Seguendo Gauss, selezioniamo quegli spazi metrici per cui, **data una qualsiasi regione di spazio sufficientemente piccola**, e' possibile scegliere un sistema di coordinate

(ξ^1, ξ^2) tale che la distanza tra il punto $P = (\xi^1, \xi^2)$ e il punto

$$P' = (\xi^1 + d\xi^1, \xi^2 + d\xi^2)$$

soddisfi il teorema di Pitagora

$$ds^2 = (d\xi^1)^2 + (d\xi^2)^2$$

ATTENZIONE: d'ora in avanti, quando diro' "distanza" tra due punti , intendero' distanza tra due punti infinitamente vicini

Le coordinate (ξ^1, ξ^2) si dicono "localmente euclidee"

ATTENZIONE: la possibilità di definire un sistema di coordinate localmente euclidee è una proprietà **LOCALE**, vale cioè solo nell'intorno di un punto, a meno che l'intero spazio non sia euclideo.

Supponiamo ora di cambiare il sistema di coordinate: come si trasforma la distanza?

$$\xi^1 = \xi^1(x^1, x^2) \quad \rightarrow \quad d\xi^1 = \frac{\partial \xi^1}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial \xi^1}{\partial x^2} dx^2$$

$$\xi^2 = \xi^2(x^1, x^2) \quad \rightarrow \quad d\xi^2 = \frac{\partial \xi^2}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial \xi^2}{\partial x^2} dx^2$$

$$ds^2 = (d\xi^1)^2 + (d\xi^2)^2 \quad \text{diventa}$$

$$\begin{aligned} ds^2 &= \left[\left(\frac{\partial \xi^1}{\partial x^1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi^2}{\partial x^1} \right)^2 \right] (dx^1)^2 + \left[\left(\frac{\partial \xi^1}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi^2}{\partial x^2} \right)^2 \right] (dx^2)^2 \\ &+ 2 \left[\left(\frac{\partial \xi^1}{\partial x^1} \right) \left(\frac{\partial \xi^1}{\partial x^2} \right) + \left(\frac{\partial \xi^2}{\partial x^1} \right) \left(\frac{\partial \xi^2}{\partial x^2} \right) \right] dx^1 dx^2 \\ &= g_{11} (dx^1)^2 + g_{22} (dx^2)^2 + 2g_{12} dx^1 dx^2 \\ &= \sum_{\alpha=1,2} \sum_{\beta=1,2} g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \equiv g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \end{aligned}$$

Nello scrivere l'ultima uguaglianza abbiamo usato la convenzione di Einstein

Riepilogando: nel sistema di coordinate localmente euclideo (ξ^1, ξ^2)
la distanza tra due punti è data da

$$ds^2 = (d\xi^1)^2 + (d\xi^2)^2$$

In un sistema di coordinate generico (x^1, x^2)

$$ds^2 = \sum_{\alpha=1,2} \sum_{\beta=1,2} g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \equiv g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$$

$$g_{11} = \left[\left(\frac{\partial \xi^1}{\partial x^1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi^2}{\partial x^1} \right)^2 \right]$$

$$g_{22} = \left[\left(\frac{\partial \xi^1}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi^2}{\partial x^2} \right)^2 \right]$$

$$g_{12} = \left[\left(\frac{\partial \xi^1}{\partial x^1} \right) \left(\frac{\partial \xi^1}{\partial x^2} \right) + \left(\frac{\partial \xi^2}{\partial x^1} \right) \left(\frac{\partial \xi^2}{\partial x^2} \right) \right]$$

$$g_{21} = g_{12}$$

**nel sistema di coord. euclideo possiamo
anche scrivere**

$$ds^2 = (d\xi^1)^2 + (d\xi^2)^2 \equiv \eta_{\alpha\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta$$

$$\eta_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
g_{11} &= \left[\left(\frac{\partial \xi^1}{\partial x^1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi^2}{\partial x^1} \right)^2 \right] \\
g_{22} &= \left[\left(\frac{\partial \xi^1}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi^2}{\partial x^2} \right)^2 \right] \\
g_{12} &= \left[\left(\frac{\partial \xi^1}{\partial x^1} \right) \left(\frac{\partial \xi^1}{\partial x^2} \right) + \left(\frac{\partial \xi^2}{\partial x^1} \right) \left(\frac{\partial \xi^2}{\partial x^2} \right) \right] \\
g_{21} &= g_{12}
\end{aligned}$$

Le componenti del tensore metrico contengono le derivate prime delle coordinate 'localmente euclidee' rispetto alle coordinate generiche

ESEMPIO: passiamo da coordinate localmente euclidee (ξ^1, ξ^2) a coord. polari (r, θ) Come calcolo il tensore metrico?

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= r \cos \theta & \rightarrow d\xi^1 &= \cos \theta dr - r \sin \theta d\theta \\
\xi_2 &= r \sin \theta & \rightarrow d\xi^2 &= \sin \theta dr + r \cos \theta d\theta
\end{aligned}
\quad (r, \theta) = (x^1, x^2)$$

$$ds^2 = (d\xi^1)^2 + (d\xi^2)^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta, \quad \alpha, \beta = 1, 2$$

$$g_{11} = 1, \quad g_{22} = r^2, \quad g_{12} = 0.$$

$$g_{11} = \left[\left(\frac{\partial \xi^1}{\partial x^1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi^2}{\partial x^1} \right)^2 \right]$$

$$g_{22} = \left[\left(\frac{\partial \xi^1}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi^2}{\partial x^2} \right)^2 \right]$$

$$g_{12} = \left[\left(\frac{\partial \xi^1}{\partial x^1} \right) \left(\frac{\partial \xi^1}{\partial x^2} \right) + \left(\frac{\partial \xi^2}{\partial x^1} \right) \left(\frac{\partial \xi^2}{\partial x^2} \right) \right]$$

$$g_{21} = g_{12}$$

Le componenti del tensore metrico contengono le derivate prime delle coordinate ‘localmente euclidee’ rispetto alle coordinate generiche

QUESTI CONCETTI SI GENERALIZZANO IMMEDIATAMENTE AL CASO DI SPAZI DI DIMENSIONI MAGGIORI

Passiamo da (x^1, x^2) a $(x^{1'}, x^{2'})$: come cambia il tensore metrico?

$$\begin{aligned} x^{1'} &= x^1(x^1, x^2) \\ x^{2'} &= x^2(x^1, x^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g'_{11} \equiv g_{1'1'} &= \left[\left(\frac{\partial \xi^1}{\partial x^{1'}} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi^2}{\partial x^{1'}} \right)^2 \right] \\ &= \left[\left(\frac{\partial \xi^1}{\partial x^1} \frac{\partial x^1}{\partial x^{1'}} + \frac{\partial \xi^1}{\partial x^2} \frac{\partial x^2}{\partial x^{1'}} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi^2}{\partial x^1} \frac{\partial x^1}{\partial x^{1'}} + \frac{\partial \xi^2}{\partial x^2} \frac{\partial x^2}{\partial x^{1'}} \right)^2 \right] \\ &= \left[\left(\frac{\partial \xi^1}{\partial x^1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi^2}{\partial x^1} \right)^2 \right] \left(\frac{\partial x^1}{\partial x^{1'}} \right)^2 + \left[\left(\frac{\partial \xi^1}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi^2}{\partial x^2} \right)^2 \right] \left(\frac{\partial x^2}{\partial x^{1'}} \right)^2 \\ &\quad + 2 \left(\frac{\partial \xi^1}{\partial x^1} \frac{\partial \xi^1}{\partial x^2} + \frac{\partial \xi^2}{\partial x^1} \frac{\partial \xi^2}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial x^1}{\partial x^{1'}} \frac{\partial x^2}{\partial x^{1'}} \right) \end{aligned}$$

$$g_{11} = \left[\left(\frac{\partial \xi^1}{\partial x^1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi^2}{\partial x^1} \right)^2 \right]$$

$$g_{22} = \left[\left(\frac{\partial \xi^1}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi^2}{\partial x^2} \right)^2 \right]$$

$$g_{12} = \left[\left(\frac{\partial \xi^1}{\partial x^1} \right) \left(\frac{\partial \xi^1}{\partial x^2} \right) + \left(\frac{\partial \xi^2}{\partial x^1} \right) \left(\frac{\partial \xi^2}{\partial x^2} \right) \right]$$

$$g_{21} = g_{12}$$

Passiamo da (x^1, x^2) a $(x^{1'}, x^{2'})$: come cambia il tensore metrico?

$$\begin{aligned} x^{1'} &= x^1(x^1, x^2) \\ x^{2'} &= x^2(x^1, x^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g'_{11} \equiv g_{1'1'} &= \left[\left(\frac{\partial \xi^1}{\partial x^{1'}} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi^2}{\partial x^{1'}} \right)^2 \right] \\ &= \left[\left(\frac{\partial \xi^1}{\partial x^1} \frac{\partial x^1}{\partial x^{1'}} + \frac{\partial \xi^1}{\partial x^2} \frac{\partial x^2}{\partial x^{1'}} \right)^2 + \left[\left(\frac{\partial \xi^2}{\partial x^1} \frac{\partial x^1}{\partial x^{1'}} + \frac{\partial \xi^2}{\partial x^2} \frac{\partial x^2}{\partial x^{1'}} \right)^2 \right] \\ \mathbf{g}_{11} &= \left[\left(\frac{\partial \xi^1}{\partial x^1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi^2}{\partial x^1} \right)^2 \right] \left(\frac{\partial x^1}{\partial x^{1'}} \right)^2 + \left[\left(\frac{\partial \xi^1}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi^2}{\partial x^2} \right)^2 \right] \left(\frac{\partial x^2}{\partial x^{1'}} \right)^2 \\ &\quad + 2 \left(\frac{\partial \xi^1}{\partial x^1} \frac{\partial \xi^1}{\partial x^2} + \frac{\partial \xi^2}{\partial x^1} \frac{\partial \xi^2}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial x^1}{\partial x^{1'}} \frac{\partial x^2}{\partial x^{1'}} \right) \end{aligned}$$

$$g_{11} = \left[\left(\frac{\partial \xi^1}{\partial x^1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi^2}{\partial x^1} \right)^2 \right]$$

$$g_{22} = \left[\left(\frac{\partial \xi^1}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi^2}{\partial x^2} \right)^2 \right]$$

$$g_{12} = \left[\left(\frac{\partial \xi^1}{\partial x^1} \right) \left(\frac{\partial \xi^1}{\partial x^2} \right) + \left(\frac{\partial \xi^2}{\partial x^1} \right) \left(\frac{\partial \xi^2}{\partial x^2} \right) \right]$$

$$g_{21} = g_{12}$$

Passiamo da (x^1, x^2) a $(x^{1'}, x^{2'})$: come cambia il tensore metrico?

$$\begin{aligned} x^{1'} &= x^1(x^1, x^2) \\ x^{2'} &= x^2(x^1, x^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g'_{11} \equiv g_{1'1'} &= \left[\left(\frac{\partial \xi^1}{\partial x^{1'}} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi^2}{\partial x^{1'}} \right)^2 \right] \\ &= \left[\left(\frac{\partial \xi^1}{\partial x^1} \frac{\partial x^1}{\partial x^{1'}} + \frac{\partial \xi^1}{\partial x^2} \frac{\partial x^2}{\partial x^{1'}} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi^2}{\partial x^1} \frac{\partial x^1}{\partial x^{1'}} + \frac{\partial \xi^2}{\partial x^2} \frac{\partial x^2}{\partial x^{1'}} \right)^2 \right] \\ \mathbf{g}_{11} &= \left[\left(\frac{\partial \xi^1}{\partial x^1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi^2}{\partial x^1} \right)^2 \right] \left(\frac{\partial x^1}{\partial x^{1'}} \right)^2 + \left[\left(\frac{\partial \xi^1}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi^2}{\partial x^2} \right)^2 \right] \left(\frac{\partial x^2}{\partial x^{1'}} \right)^2 \\ &\quad + 2 \left(\frac{\partial \xi^1}{\partial x^1} \frac{\partial \xi^1}{\partial x^2} + \frac{\partial \xi^2}{\partial x^1} \frac{\partial \xi^2}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial x^1}{\partial x^{1'}} \frac{\partial x^2}{\partial x^{1'}} \right) \quad \mathbf{g}_{22} \end{aligned}$$

$$g_{11} = \left[\left(\frac{\partial \xi^1}{\partial x^1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi^2}{\partial x^1} \right)^2 \right]$$

$$g_{22} = \left[\left(\frac{\partial \xi^1}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi^2}{\partial x^2} \right)^2 \right]$$

$$g_{12} = \left[\left(\frac{\partial \xi^1}{\partial x^1} \right) \left(\frac{\partial \xi^1}{\partial x^2} \right) + \left(\frac{\partial \xi^2}{\partial x^1} \right) \left(\frac{\partial \xi^2}{\partial x^2} \right) \right]$$

$$g_{21} = g_{12}$$

Passiamo da (x^1, x^2) a $(x^{1'}, x^{2'})$: come cambia il tensore metrico?

$$\begin{aligned} x^{1'} &= x^1(x^1, x^2) \\ x^{2'} &= x^2(x^1, x^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g'_{11} \equiv g_{1'1'} &= \left[\left(\frac{\partial \xi^1}{\partial x^{1'}} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi^2}{\partial x^{1'}} \right)^2 \right] \\ &= \left[\left(\frac{\partial \xi^1}{\partial x^1} \frac{\partial x^1}{\partial x^{1'}} + \frac{\partial \xi^1}{\partial x^2} \frac{\partial x^2}{\partial x^{1'}} \right)^2 + \left[\left(\frac{\partial \xi^2}{\partial x^1} \frac{\partial x^1}{\partial x^{1'}} + \frac{\partial \xi^2}{\partial x^2} \frac{\partial x^2}{\partial x^{1'}} \right)^2 \right] \\ \mathbf{g}_{11} &= \left[\left(\frac{\partial \xi^1}{\partial x^1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi^2}{\partial x^1} \right)^2 \right] \left(\frac{\partial x^1}{\partial x^{1'}} \right)^2 + \left[\left(\frac{\partial \xi^1}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi^2}{\partial x^2} \right)^2 \right] \left(\frac{\partial x^2}{\partial x^{1'}} \right)^2 \\ &\quad + 2 \left(\frac{\partial \xi^1}{\partial x^1} \frac{\partial \xi^1}{\partial x^2} + \frac{\partial \xi^2}{\partial x^1} \frac{\partial \xi^2}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial x^1}{\partial x^{1'}} \frac{\partial x^2}{\partial x^{1'}} \right) \end{aligned}$$

\mathbf{g}_{22}

\mathbf{g}_{12}

$$\begin{aligned} g_{11} &= \left[\left(\frac{\partial \xi^1}{\partial x^1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi^2}{\partial x^1} \right)^2 \right] \\ g_{22} &= \left[\left(\frac{\partial \xi^1}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi^2}{\partial x^2} \right)^2 \right] \\ g_{12} &= \left[\left(\frac{\partial \xi^1}{\partial x^1} \right) \left(\frac{\partial \xi^1}{\partial x^2} \right) + \left(\frac{\partial \xi^2}{\partial x^1} \right) \left(\frac{\partial \xi^2}{\partial x^2} \right) \right] \\ g_{21} &= g_{12} \end{aligned}$$

Passiamo da (x^1, x^2) a $(x^{1'}, x^{2'})$: come cambia il tensore metrico?

$$\begin{aligned} x^{1'} &= x^1(x^1, x^2) \\ x^{2'} &= x^2(x^1, x^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g'_{11} \equiv g_{1'1'} &= \left[\left(\frac{\partial \xi^1}{\partial x^{1'}} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi^2}{\partial x^{1'}} \right)^2 \right] \\ &= \left[\left(\frac{\partial \xi^1}{\partial x^1} \frac{\partial x^1}{\partial x^{1'}} + \frac{\partial \xi^1}{\partial x^2} \frac{\partial x^2}{\partial x^{1'}} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi^2}{\partial x^1} \frac{\partial x^1}{\partial x^{1'}} + \frac{\partial \xi^2}{\partial x^2} \frac{\partial x^2}{\partial x^{1'}} \right)^2 \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_{11} &= \left[\left(\frac{\partial \xi^1}{\partial x^1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi^2}{\partial x^1} \right)^2 \right] \left(\frac{\partial x^1}{\partial x^{1'}} \right)^2 + \left[\left(\frac{\partial \xi^1}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi^2}{\partial x^2} \right)^2 \right] \left(\frac{\partial x^2}{\partial x^{1'}} \right)^2 \\ &\quad + 2 \left(\frac{\partial \xi^1}{\partial x^1} \frac{\partial \xi^1}{\partial x^2} + \frac{\partial \xi^2}{\partial x^1} \frac{\partial \xi^2}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial x^1}{\partial x^{1'}} \frac{\partial x^2}{\partial x^{1'}} \right) \end{aligned}$$

\mathbf{g}_{22}

\mathbf{g}_{12}

$$g_{11} = \left[\left(\frac{\partial \xi^1}{\partial x^1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi^2}{\partial x^1} \right)^2 \right] = g_{11} \left(\frac{\partial x^1}{\partial x^{1'}} \right)^2 + g_{22} \left(\frac{\partial x^2}{\partial x^{1'}} \right)^2 + 2g_{12} \left(\frac{\partial x^1}{\partial x^{1'}} \frac{\partial x^2}{\partial x^{1'}} \right)$$

$$g_{22} = \left[\left(\frac{\partial \xi^1}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi^2}{\partial x^2} \right)^2 \right]$$

$$g_{12} = \left[\left(\frac{\partial \xi^1}{\partial x^1} \right) \left(\frac{\partial \xi^1}{\partial x^2} \right) + \left(\frac{\partial \xi^2}{\partial x^1} \right) \left(\frac{\partial \xi^2}{\partial x^2} \right) \right]$$

$$g'_{11} = \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{\beta=1}^2 g_{\alpha\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{1'}} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{1'}} = g_{\alpha\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{1'}} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{1'}}$$

$$g_{21} = g_{12}$$

In generale, quando si passa da un riferimento a un altro

$$g'_{\alpha\beta} \equiv g_{\alpha'\beta'} = g_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\beta'}}$$

Questo è il modo in cui si trasformano i tensori quando si passa da un qualsiasi sistema di coordinate a un'altro

ATTENZIONE: ove ci sono indici ripetuti (in alto e in basso)
è sempre sottintesa la somma

Dato uno spazio metrico in cui la distanza tra due punti infinitamente vicini sia esprimibile tramite il Teorema di Pitagora,

$g_{\alpha\beta}$ permette di esprimere la distanza in qualsiasi altro sistema di coordinate.

VICEVERSA:

Dato uno spazio in cui

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$$

Se lo spazio appartiene alla sottoclasse definita da Gauss, è sempre possibile trovare un sistema di coordinate localmente euclidee tale che

$$ds^2 = (d\xi^1)^2 + (d\xi^2)^2$$

Il tensore metrico determina le proprietà intrinseche di uno spazio metrico

Vogliamo definire una funzione di $g_{\alpha\beta}$ che dipenda dalle derivate prime e seconde del tensore metrico, ma **NON** dipenda dal sistema di coordinate usate

Nel caso di superfici bidimensionali, questa quantità è la **CURVATURA GAUSSIANA**

$$k = \frac{1}{2g} \left[2 \frac{\partial^2 g_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 g_{11}}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 g_{22}}{\partial x_1^2} \right] - \frac{g_{22}}{4g^2} \left[\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x_1} \right) \left(2 \frac{\partial g_{12}}{\partial x_2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial x_1} \right) - \left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x_2} \right)^2 \right] +$$

$$\frac{g_{12}}{4g^2} \left[\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x_1} \right) \left(\frac{\partial g_{22}}{\partial x_2} \right) - 2 \left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x_2} \right) \left(\frac{\partial g_{22}}{\partial x_1} \right) + \right.$$

$$\left. \left(2 \frac{\partial g_{12}}{\partial x_1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x_2} \right) \left(2 \frac{\partial g_{12}}{\partial x_2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial x_1} \right) \right] - \frac{g_{11}}{4g^2} \left[\left(\frac{\partial g_{22}}{\partial x_2} \right) \left(2 \frac{\partial g_{12}}{\partial x_1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x_2} \right) - \left(\frac{\partial g_{22}}{\partial x_1} \right)^2 \right]$$

$$g = g_{11}g_{22} - g_{12}^2$$

determinante della metrica

ATTENZIONE: la curvatura, che descrive le proprietà intrinseche di una geometria bidimensionale è una quantità scalare

Per esempio, in qualsiasi coordinate esprimiamo la metrica della 2-sfera, la curvatura gaussiana sarà sempre

$$k = \frac{1}{a^2}$$

Provare per es. con le coordinate (θ, φ)

$$ds^2 = a^2 d\vartheta^2 + a^2 \sin^2 \vartheta d\varphi^2$$

Invece per la geometria di Gauss-Boly-Lobachevski

$$ds^2 = \frac{a^2(1-x_2^2)}{(1-x_1^2-x_2^2)^2} dx_1^2 + \frac{a^2(1-x_1^2)}{(1-x_1^2-x_2^2)^2} dx_2^2 + \frac{a^2 x_1 x_2}{(1-x_1^2-x_2^2)^2} dx_1 dx_2$$

$$k = -\frac{1}{a^2}$$

k è invariante rispetto a trasformazioni di coordinate

Quanto detto finora si estende a spazi di dimensioni arbitrarie
in particolare
al caso **D=4** lo **spazio-tempo** in cui avvengono i fenomeni fisici

Selezioneremo quegli spazi-tempo in cui, localmente, la distanza tra punti vicini sia data da

$$ds^2 = -d\xi_0^2 + d\xi_1^2 + d\xi_2^2 + d\xi_3^2$$

Spazi-tempo localmente Minkowskiani

IMPORTANTE: se uno spazio ha dimensioni D, le proprietà intrinseche sono descritte da più funzioni scalari. Quante sono necessarie?

$D(D+1)/2$ = componenti indipendenti di $g_{\alpha\beta}$

Possiamo sempre scegliere le coordinate in modo da imporre
D relazioni funzionali tra queste componenti

$C = D(D+1)/2 - D = D(D-1)/2$ quantità

per es. se D=2, C=1

se D=4 C=6

Riemann, 1826-1866

Christoffel

LeviCivita, Ricci

Beltrami

Philosophiae Naturalis Principia Mathematica, Newton 1685

Seconda legge di Newton

$$\vec{F} = m_I \vec{a}$$

Legge della gravitazione universale

$$\vec{F}_G = m_G \vec{g}$$

$$\vec{g} = - \frac{G \sum_i M_{Gi} (\vec{r} - \vec{r}'_i)}{|\vec{r} - \vec{r}'_i|^3}$$

$$\vec{a} = \left(\frac{m_G}{m_I} \right) \vec{g}$$

Se $\mathbf{m}_I = \mathbf{m}_G$

tutti i corpi si muovono in un campo gravitazionale con la stessa accelerazione

- La massa inerziale è uguale alla massa gravitazionale
- Galileo (1564-1642)
- Newton (pendoli)
- Eotvos 1889 (una parte in 10^9)
- Dicke 1964 (una parte in 10^{11})
- Braginski 1972 (una parte in 10^{12})
- Lunar –Laser ranging (una parte in 10^{13})

Tutti questi esperimenti confermano il principio di equivalenza della massa inerziale e della massa gravitazionale

Successi della teoria newtoniana

Moto della luna e maree

Moto dei pianeti

Predizione (1846 Adams e Le Verrier) e scoperta di Nettuno qualche anno dopo

Primi dubbi ‘osservativi’

Le Verrier, 1845 scopre anomalie nel moto di Mercurio

1885 Newcomb conferma: il perielio precede di

43 secondi di arco ogni 100 anni

**Obiezioni filosofiche: la teoria di Newton prevede l'esistenza dei riferimenti inerziali, rispetto a cui valgono le leggi della meccanica
Ma cosa li definisce?**

Newton: esiste uno spazio assoluto rispetto a cui i riferimenti inerziali sono in moto rettilineo uniforme

Leibniz (1646-1716), Mach (1838-1916)

: lo spazio assoluto non è necessario

**Nel 1864 Maxwell formula la teoria dell'elettrodinamica:
La velocità della luce è una costante universale!**

Maxwell: esiste l'etere

Michelson e Morley (1887): l'etere non esiste

Le nuove equazioni non sono invarianti rispetto alle trasformazioni di Galileo, ma lo sono rispetto a quelle di Lorentz (Einstein 1905)

PROBLEMA: cosa fare delle equazioni della gravità?

FINE PRIMA LEZIONE

Riepilogo lezione passata:

Selezioneremo quegli spazi-tempo tali che, data una regione sufficientemente piccola, sia possibile scegliere un sistema di coordinate, che d'ora in avanti indicheremo con $\{\xi^\alpha\}$, tale che la distanza tra il punto $P = (\xi^0, \xi^1, \xi^2, \xi^3)$

e il punto $P' = (\xi^0 + d\xi^0, \xi^1 + d\xi^1, \xi^2 + d\xi^2, \xi^3 + d\xi^3)$

sia data da

$$ds^2 = -(d\xi^0)^2 + (d\xi^1)^2 + (d\xi^2)^2 + (d\xi^3)^2$$

Questa equazione si puo' riscrivere come

$$ds^2 = \sum_{\alpha=0,3} \sum_{\beta=0,3} \eta_{\alpha\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta = \eta_{\alpha\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta \quad \eta_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Spazi-tempo localmente Minkowskiani

Tensore metrico
di Minkowski

Se cambiamo sistema di coordinate, e passiamo dalle coord. localmente minkowskiane $\{\xi^\alpha\}$ alle coordinate generiche $\{x^\alpha\}$

la distanza tra i punti P e P' diventa

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \quad (1)$$

Dove $g_{\alpha\beta}$ e' il tensore metrico espresso nelle nuove coordinate.

NOTARE CHE: ds^2 e' una grandezza scalare, quindi il suo valore e' lo stesso in tutti i sistemi di coordinate. Quando si passa da un sistema all'altro cambia solo la sua espressione

NOTARE CHE: se stiamo usando un sistema di coordinate tali che la distanza tra i punti P e P' sia data dalla (1), e' sempre possibile trovare il sistema di coordinate $\{\xi^\alpha\}$ **localmente minkowskiano**, tale che si abbia

$$ds^2 = -(d\xi^0)^2 + (d\xi^1)^2 + (d\xi^2)^2 + (d\xi^3)^2 \longrightarrow ds^2 = \eta_{\alpha\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta$$

Seconda legge di Newton

$$\vec{F} = m_I \vec{a}$$

Legge della gravitazione universale

$$\vec{F}_G = m_G \vec{g}$$

$$\vec{g} = -G \frac{\sum_i m_{Gi} (\vec{r} - \vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3}$$

$$\vec{a} = \left(\frac{m_G}{m_I} \right) \vec{g}$$

Se

$$m_I = m_G$$

tutti i corpi si muovono in un campo gravitazionale con la stessa accelerazione.

PRINCIPIO di EQUIVALENZA

Consideriamo un corpo che si muove in un campo gravitazionale **costante e uniforme**.
Supponiamo per semplicità che sia soggetto solo alla forza di gravità

$$m_I \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = m_G \vec{g}$$

OSERVAZIONE DI EINSTEIN: Supponiamo di saltare su un ascensore che sta cadendo liberamente nello stesso campo gravitazionale, cioè facciamo la seguente trasformazione di coordinate

$$\vec{x}' = \vec{x} - \frac{1}{2} \vec{g} t^2, \quad t' = t$$

Nel riferimento solidale con l'ascensore il corpo avrà la seguente accelerazione

$$m_I \left\{ \frac{d^2}{dt^2} \left[\vec{x}' + \frac{1}{2} \vec{g} t^2 \right] \right\} = m_G \vec{g} \quad \rightarrow \quad \frac{d^2 \vec{x}'}{dt^2} = 0$$

NOTARE CHE: questo risultato segue da 1) **g è costante e uniforme**

2) **m_I = m_G**

Osservazione di Einstein: se salgo su un ascensore che cade liberamente un corpo in quiete rimane in quiete

dunque questo è un riferimento
localmente inerziale

Perché localmente? - g deve essere costante e uniforme

Poter definire un riferimento in cui è possibile eliminare, nella stessa maniera per tutti i corpi, il campo gravitazionale, è un proprietà esclusiva del campo gravitazionale.

Non è vero per esempio per la forza elettrica!

$$m_I \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = q \vec{E} \rightarrow \vec{a}_{el} = \frac{q}{m_I} \vec{E}$$

supponiamo che il campo elettrico E sia costante e uniforme

passiamo al sistema di riferimento:

$$\vec{x}' = \vec{x} - \frac{1}{2} \vec{a}_{el} t^2$$

$$m_I \left\{ \frac{d^2}{dt^2} \left[\vec{x}' + \frac{1}{2} \vec{a}_{el} t^2 \right] \right\} = q \vec{E} \rightarrow \frac{d^2 \vec{x}'}{dt^2} = 0$$

in questo riferimento l'effetto del campo elettrico è annullato, però il rapporto q/m_I non è lo stesso per tutti i corpi!!

Principio di equivalenza in forma FORTE: In un campo gravitazionale arbitrario, in qualsiasi punto dello **spaziotempo** possiamo scegliere un **riferimento localmente inerziale**

tale che, in un intorno sufficientemente piccolo del punto, **TUTTE** le leggi della fisica assumono la stessa forma che hanno in assenza di gravità, cioè hanno la forma che è prevista dalla **Relatività Speciale**

$$ds^2 = -(d\xi^0)^2 + (d\xi^1)^2 + (d\xi^2)^2 + (d\xi^3)^2$$

Principio di equivalenza in forma DEBOLE: Lo stesso di prima, ma si riferisce alle **sole leggi del moto dei corpi**, invece che a tutte le leggi fisiche

Il principio di equivalenza assomiglia molto all'assioma in base al quale Gauss seleziona le geometrie non-euclidee: in ogni punto dello **spazio** e' possibile scegliere un riferimento **localmente euclideo**, in cui la distanza tra due punti è data dal **teorema di Pitagora**

$$ds^2 = (d\xi^1)^2 + (d\xi^2)^2$$

Ci aspettiamo che il tensore metrico abbia qualcosa a che vedere con il campo gravitazionale

Conseguenze del Principio di Equivalenza

Voglio trovare l'equazione del moto di una particella in caduta libera in un campo gravitazionale

In un rif. localmente inerziale una particella libera ha equazione

$$\frac{d^2 \xi^\alpha}{d\tau^2} = 0$$

In un rif. arbitrario: forza di gravita' + forze inerziali

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \left[\frac{dx^\mu}{d\tau} \cdot \frac{dx^\nu}{d\tau} \right] = 0$$

$$\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \xi^\lambda} \cdot \frac{\partial^2 \xi^\lambda}{\partial x^\mu \partial x^\nu}$$

Simboli di Christoffel o Connessioni Affini

$$\begin{aligned}
 g_{11} &= \left[\left(\frac{\partial \xi^1}{\partial x^1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi^2}{\partial x^1} \right)^2 \right] \\
 g_{22} &= \left[\left(\frac{\partial \xi^1}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi^2}{\partial x^2} \right)^2 \right] \\
 g_{12} &= \left[\left(\frac{\partial \xi^1}{\partial x^1} \right) \left(\frac{\partial \xi^1}{\partial x^2} \right) + \left(\frac{\partial \xi^2}{\partial x^1} \right) \left(\frac{\partial \xi^2}{\partial x^2} \right) \right] \\
 g_{21} &= g_{12}
 \end{aligned}$$

Le componenti del tensore metrico contengono le derivate prime delle coordinate ‘localmente euclidee’ rispetto alle coordinate generiche

Simboli di Christoffel o Connessioni Affini
Contengono le derivate del tensore metrico

$g_{\alpha\beta}$

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \xi^{\lambda}} \cdot \frac{\partial^2 \xi^{\lambda}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}}$$

Analogamente: nei “nostri” spazi localmente Minkowskiani, le componenti del tensore metrico contengono le derivate prime delle coordinate localmente Minkowskiane rispetto alle coordinate generiche, e i simboli di Christoffel contengono le derivate del tensore metrico

In un rif. localmente inerziale una particella libera ha equazione

$$\frac{d^2 \xi^\alpha}{d\tau^2} = 0$$

In un rif. arbitrario: forza di gravita' + forze inerziali

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \left[\frac{dx^\mu}{d\tau} \cdot \frac{dx^\nu}{d\tau} \right] = 0$$

$$\Gamma_{\mu\nu}^\alpha \left[\frac{dx^\mu}{d\tau} \cdot \frac{dx^\nu}{d\tau} \right]$$

In assenza di forze inerziali, in teoria newtoniana questo termine sarebbe \vec{g} cioè il campo gravitazionale, che e' a sua volta la derivata del potenziale gravitazionale

Le connessioni affini sono la generalizzazione del campo grav. newtoniano, il tensore metrico generalizza il potenziale Newtoniano

SOMMARIO:

Il principio di equivalenza ci permette di trovare sempre un rif. in cui, **localmente**, le leggi della fisica sono quelle della Relatività Speciale, e in cui lo spaziotempo è descritto dal tensore metrico di Minkowski, cioè è **piatto**

$$\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1,1,1,1)$$

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} d\xi^\mu d\xi^\nu = -d\xi_0^2 + d\xi_1^2 + d\xi_2^2 + d\xi_3^2$$

$$\frac{d\xi^2}{d\tau^2} = 0$$

Se cambio riferimento $ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$ $g_{\alpha\beta} = \eta_{\mu\nu} \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\beta}$

Dall' eq. delle geodetiche $\frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \left[\frac{dx^\mu}{d\tau} \cdot \frac{dx^\nu}{d\tau} \right] = 0$

segue che il potenziale gravitazionale è descritto dal **Tensore metrico**:
ecco perché abbiamo bisogno di un tensore

$g_{\alpha\beta}$ ha un duplice ruolo: **geometrico** (distanza) e **fisico** (potenziale grav.)

Dato il tensore $g_{\alpha\beta}$ e le sue derivate prime, cioè le connessioni affini $\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}$ in un punto X , possiamo sempre determinare un riferimento localmente inerziale nell'intorno del punto

Inoltre, abbiamo sempre la libertà di fare una trasformazione di Lorentz e il nuovo riferimento sarà ancora **localmente inerziale**

SPAZI TOPOLOGICI: topologia locale (a cui siamo interessati)
topologia globale (proprietà a larga scala,
come quelle che distinguono una sfera da un cono)

Nozioni preliminari: sia \mathbb{R}^n lo spazio n-dimensionale dell'algebra vettoriale

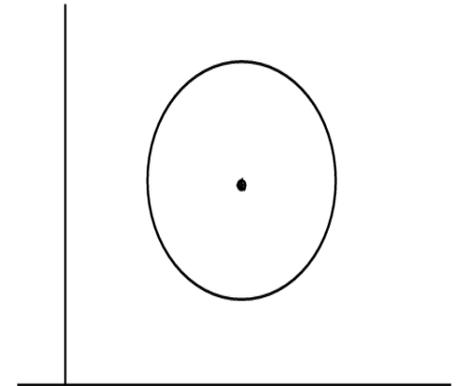
Un punto in \mathbb{R}^n è una n-pla di numeri reali $(x^1, x^2 \dots x^n)$

Insiemi aperti: dato un punto $y=(y^1, y^2 \dots y^n)$, un insieme aperto è
l'insieme dei punti x tali che

$$|x - y| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x^i - y^i)^2} < r \quad r = \text{numero reale}$$

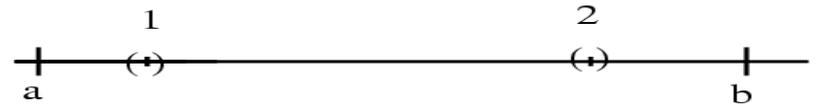
Un insieme aperto include i punti interni ma **NON** il bordo

Un set di punti S è aperto se ogni $x \in S$ ha un intorno
interamente contenuto in S



Abbiamo un'idea intuitiva di **spazio continuo**: dato un punto di \mathbb{R}^n e' sempre possibile trovare punti di \mathbb{R}^n arbitrariamente vicini ad esso; inoltre una linea che congiunge due punti di \mathbb{R}^n puo' essere divisa in infiniti segmenti che uniscono ancora punti di \mathbb{R}^n

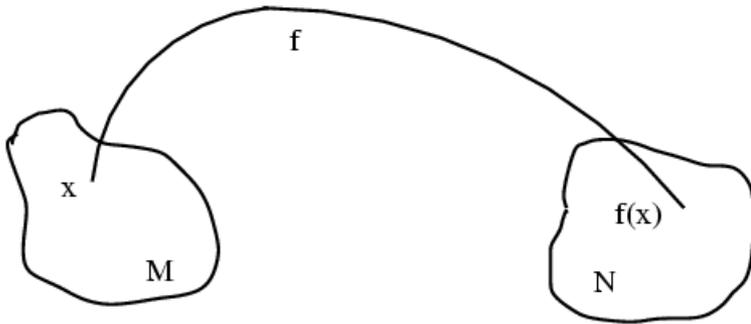
Proprieta' di Hausdorff di \mathbb{R}^n : presi due punti qualsiasi, questi avranno intorno che non si intersecano



Uno **SPAZIO TOPOLOGICO** e' un insieme di punti che soddisfano le seguenti proprieta':

- 1) Se O_1 e O_2 sono due insiemi aperti, la loro intersezione e' un insieme aperto
- 2) l'unione di insiemi aperti e' un insieme aperto

Una mappa f da uno spazio M a uno spazio N e' una regola che associa a ogni elemento $x \in M$ un unico elemento di N $y = f(x)$



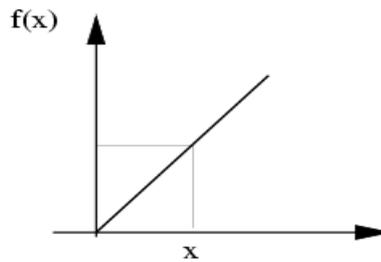
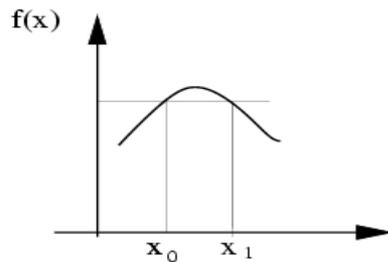
M e N non sono necessariamente diversi

ESEMPIO: $y = x^3$, $x \in \mathbb{R}^1$ e $y \in \mathbb{R}^1$

$\forall x$ una mappa da' un unico $f(x)$ ma non e' necessariamente vero il viceversa

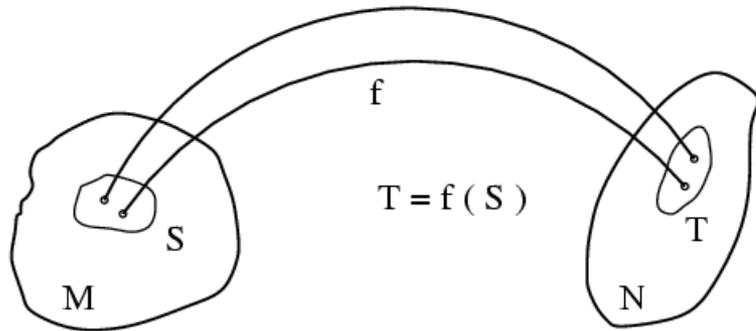
mappa 'molti a uno'

mappa 'uno a uno'



Se f e' una mappa da M a N , per ogni insieme $S \in M$ ci sara' un' *immagine* $T \in N$,

cioe' l'insieme di tutti i punti che f mappa da S su N



S e' l'*immagine inversa* di T

$$S = f^{-1}(T)$$

la mappa inversa e' possibile solo se la mappa e' '**uno a uno**'

f mappa M su N ,



$f : M \longrightarrow N$,

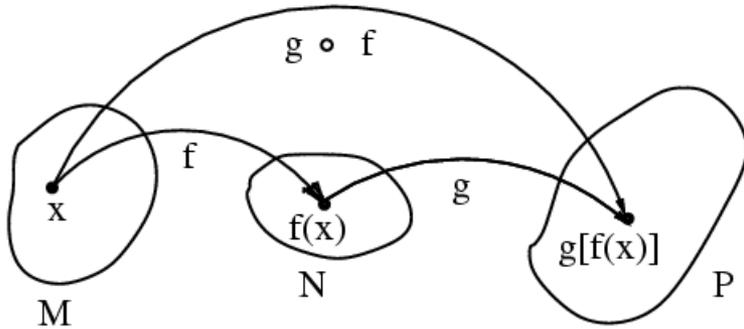
f mappa un punto $x \in M$ su $y \in N$,



$f : x \longmapsto y$

COMPOSIZIONE DI MAPPE

Date due mappe



$$f : M \longrightarrow N,$$

$$g : N \longrightarrow P,$$

Esiste una mappa $g \circ f$ che mappa i punti di M su P

$$g \circ f : M \longrightarrow P$$

ESEMPIO:

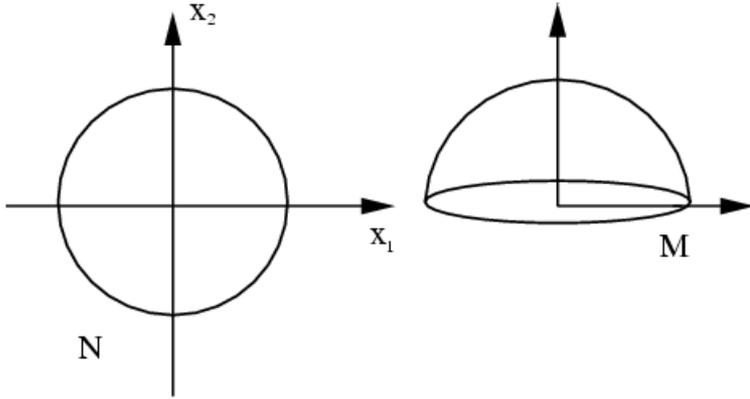
$$f : x \mid \longrightarrow y \qquad y = x^3,$$

$$g : y \mid \longrightarrow z \qquad z = y^2,$$

$$g \circ f : x \mid \longrightarrow z \qquad z = x^6,$$

Mappa di M in (into) N : se è definita per tutti i punti di M (l'immagine di M è contenuta in N)

Mappa di M su (onto) N : se, in più, ogni punto di N ha un'immagine inversa in M (non necessariamente unica)



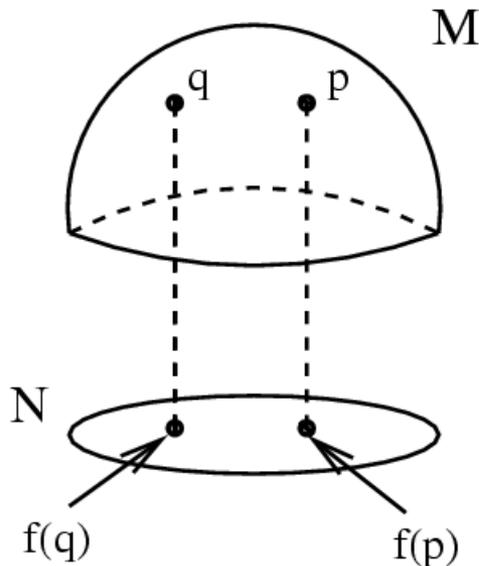
ESEMPIO:

Sia N l'insieme aperto di \mathbb{R}^2

$$x_1^2 + x_2^2 < 1$$

Sia M la superficie di una semisfera appartenente alla sfera unitaria

$$\theta < \frac{\pi}{2}$$



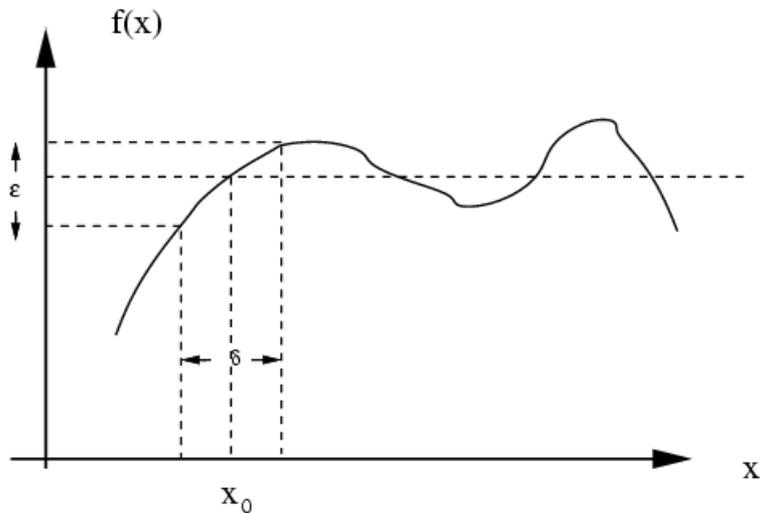
ESISTE un mapping uno-a-uno

***f* di M su N**

Una mappa $f : M \longrightarrow N$,

e' continua in $x \in M$, se qualsiasi insieme aperto di N che contiene $f(x)$, contiene l'immagine di un aperto di M

M e N devono essere spazi topologici, altrimenti la nozione di mappa continua non ha senso



definizione dal calcolo elementare: f è continua in x_0 se, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che per ogni

$$|x-x_0| < \delta$$

si abbia

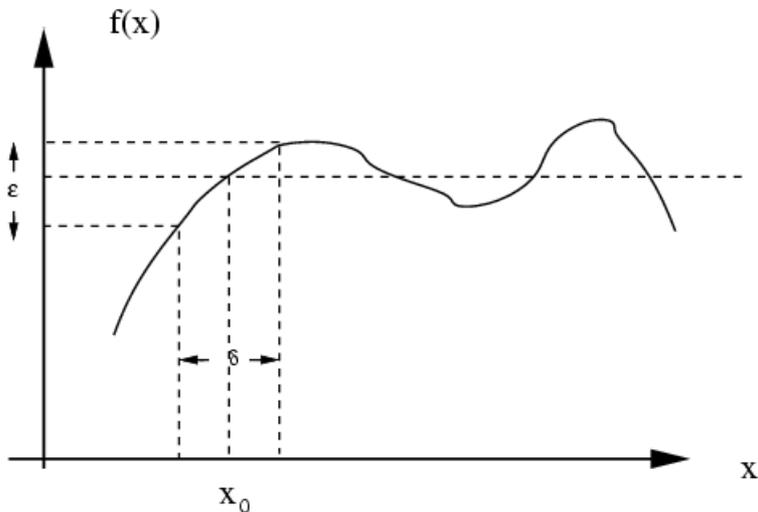
$$|f(x)-f(x_0)| < \varepsilon$$

con ε e δ piccoli a piacere

Una mappa $f : M \longrightarrow N$,

e' continua in $x \in M$, se qualsiasi insieme aperto di N che contiene $f(x)$, contiene l'immagine di un aperto di M

M e N devono essere spazi topologici, altrimenti la nozione di mappa continua non ha senso



Questa definizione e' piu' generale di quella che impariamo a analisi I perche' non pone limitazioni su ε e su δ

Una mappa si dice differenziabile di classe C^k , se $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ e' una funzione, definita in un aperto di $S \in R^n$, continua con le sue derivate di ordine minore o uguale a k

La nozione di MANIFOLD e' cruciale per definire un sistema di coordinate:

Un MANIFOLD e' un insieme di punti M tale che ciascun punto ha un intorno aperto che ammette una mappa 1-1 continua SU (ONTO)

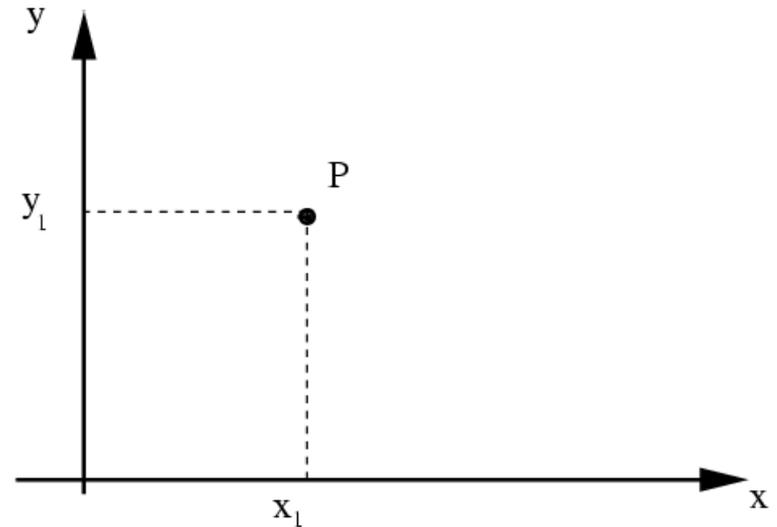
un insieme aperto di \mathbf{R}^n , dove n e' la dimensione del manifold

(ricordare che un punto in \mathbf{R}^n e' una n-pla di numeri reali $(x^1, x^2 \dots x^n)$)

prendiamo un punto P e lo mappiamo

sul punto $(x^1, y^1) \in \mathbf{R}^2$

e questa operazione puo' essere fatta per ogni intorno di P



Quindi un manifold deve essere:
- uno spazio topologico continuo
- e a ciascun punto associamo una n-pla di numeri reali, cioè
un sistema di coordinate

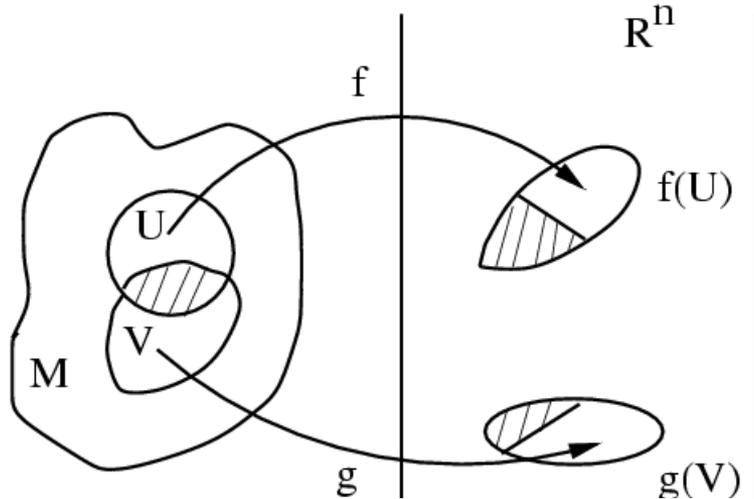
Attenzione: la definizione di MANIFOLD riguarda solo insiemi aperti di M e di \mathbf{R}^n , perche' non vogliamo restringere la topologia globale di M

**Attenzione: non abbiamo ancora introdotto
NESSUNA nozione geometrica (angoli,
lunghezze etc.)**

**L'unica condizione che stiamo imponendo e' che
la topologia locale di M Sia la stessa di \mathbb{R}^n**

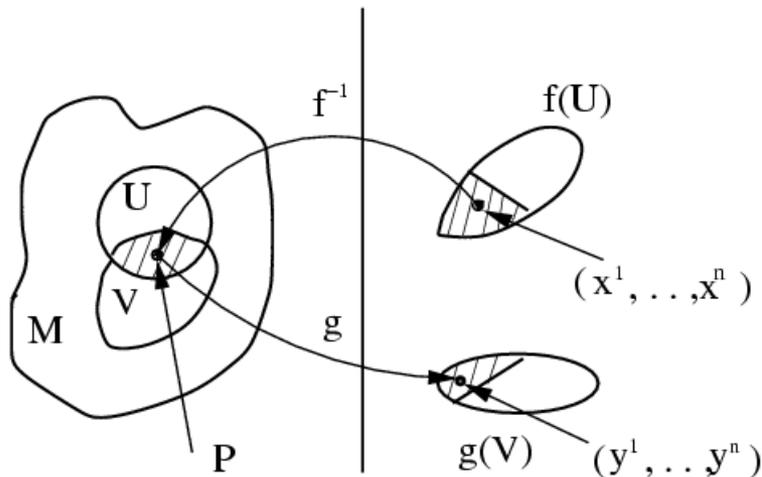
Definizione di sistema di coordinate:

E' una coppia formata da un aperto di M e la sua mappa su un aperto di \mathbb{R}^n ; tali aperti non includono necessariamente TUTTO M



Per esempio, (U, f) e (V, g) sono due distinti sistemi di coordinate o carte

$U \cap V$ e' un aperto (intersezione di due aperti) e corrisponde a due diversi sistemi di coord. **Quindi deve esserci una relazione tra i due!**



- Prendo un punto nell'immagine di $U \cap V$ sotto la mappa f
- la mappa f ha un'inversa f^{-1} che porta in P
- usando la mappa g vado nell'immagine di $U \cap V$ sotto il mapping g

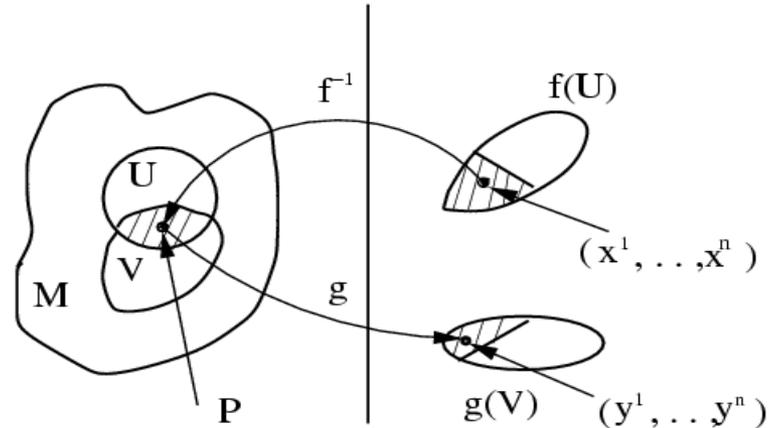
$$g \circ f^{-1} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

Trasformazione di coordinate

$$g \circ f^{-1} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

Il risultato di questa operazione e' una relazione funzionale tra i due sistemi di coordinate

$$\begin{cases} y^1 = y^1(x^1, \dots, x^n) \\ \dots \\ \dots \\ y^n = y^n(x^1, \dots, x^n) \end{cases}$$



Se le funzioni $\{y^i\}$ sono differenziabili fino all'ordine k , allora tra le carte (U, f) e (V, g) si dice che c'e' una relazione di classe C^k

Se si puo' costruire un sistema di carte tale che ciascun punto di M appartenga almeno a un aperto di M , e se tra tutte le carte c'e' una relazione di classe C^k allora il MANIFOLD e' di classe C^k

Se $k=1$ il MANIFOLD si dice DIFFERENZIABILE

La nozione di **VARIETÀ DIFFERENZIABILE** è importante perché consente di aggiungere “**strutture**” alla varietà, cioè possiamo definire vettori, tensori, forme differenziali ecc.

Per completare la definizione di trasformazione di coordinate:

date $y^i = y^i(x^1, \dots, x^n)$ Se lo **Jacobiano** della trasformazione

$$J = \frac{\partial(y^1, \dots, y^n)}{\partial(x^1, \dots, x^n)} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial y^1}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial y^1}{\partial x^n} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \frac{\partial y^n}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial y^n}{\partial x^n} \end{pmatrix}$$

è **NON NULLO** in un punto P, allora il teorema della funzione inversa assicura che la mappa f è 1-1 e **SU** un intorno di P.

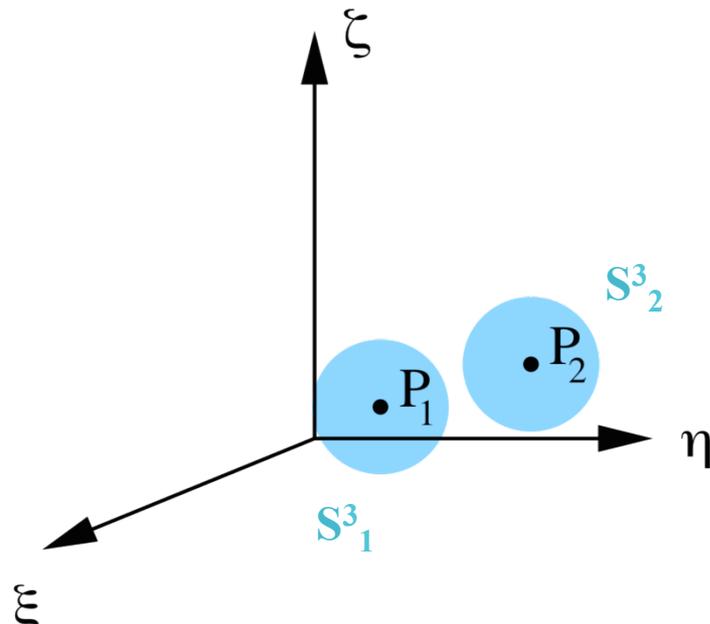
Se $J=0$ la trasformazione e' singolare

la 2-sfera S^2 è un esempio di varietà differenziale; se consideriamo la sua immersione nello spazio a tre dimensioni, è l'insieme dei punti di \mathbb{R}^3 tali che

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathcal{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = r^2\}$$

Vediamo se S^2 è una varietà differenziale.

Per prima cosa deve essere uno spazio continuo, quindi deve verificare il criterio di Hausdorff: ogni coppia di punti ammette intorni disgiunti



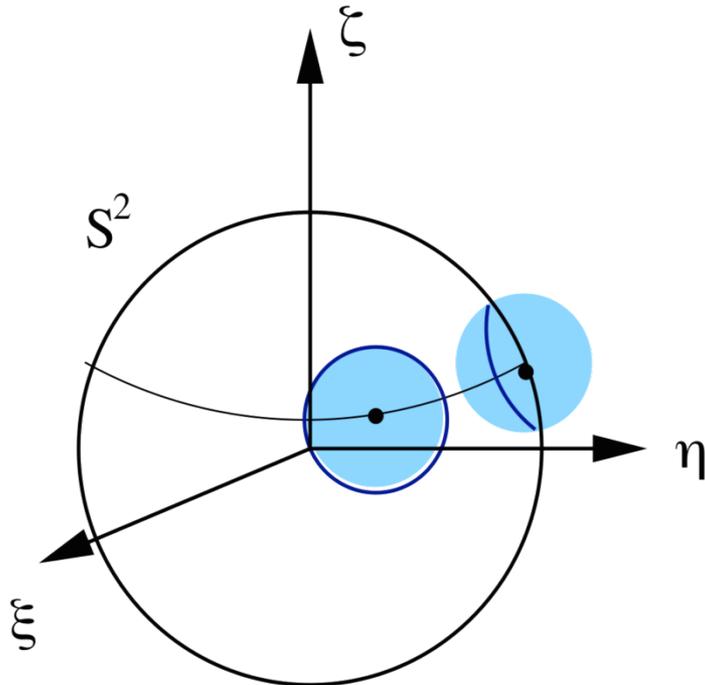
consideriamo due punti dello spazio continuo 3D: comunque siano vicini, essi ammettono sempre due intorni aperti disgiunti, le sfere piene in celeste che chiameremo S^3_1 e S^3_2

la 2-sfera S^2 è un esempio di varietà differenziale; se consideriamo la sua immersione nello spazio a tre dimensioni, è l'insieme dei punti di \mathbb{R}^3 tali che

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = r^2\}$$

Vediamo se S^2 è una varietà differenziale.

Per prima cosa deve essere uno spazio continuo, quindi deve verificare il criterio di Hausdorff: ogni coppia di punti ammette interni disgiunti



consideriamo due punti dello spazio continuo 3D: comunque siano vicini, essi ammettono sempre due interni aperti disgiunti, le sfere piene in celeste che chiameremo S^3_1 e S^3_2

supponiamo che i due punti P_1 e P_2 appartengano alla 2-sfera S^2 : le intersezioni tra gli aperti S^3_1 e S^3_2 e la sfera S^2 , sono i due aperti S^2_1 e S^2_2 (le due calotte sferiche di cui la linea blu è il bordo) che per costruzione sono anch'essi disgiunti.

quindi S^2 è uno spazio bidimensionale continuo

Dopo aver verificato che S^2 è uno spazio continuo, dobbiamo verificare se è possibile definire un insieme di mappe che ricoprono la varietà (insieme detto atlante) e tali che il cambiamento di coordinate fra una mappa e l'altra sia invertibile e differenziabile (vale a dire sia un diffeomorfismo)

Consideriamo la 2-sfera S^2 :

insieme dei punti di \mathbb{R}^3 tali che

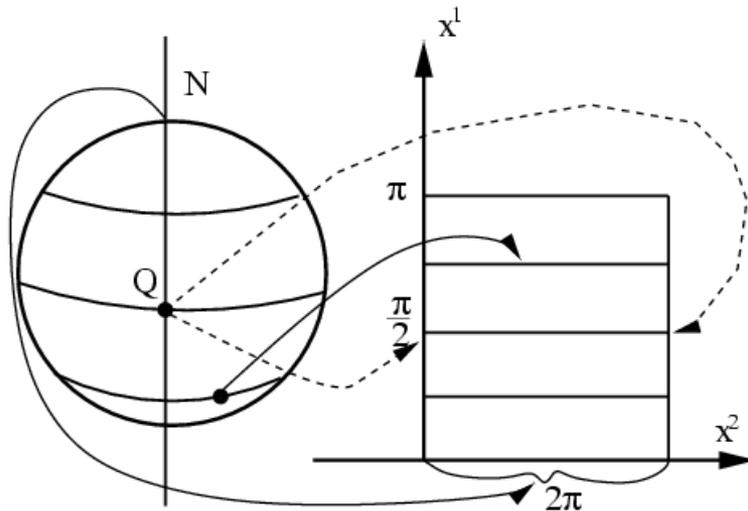
$$(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = \cos t$$

**Supponiamo di voler “mappare” la sfera su \mathbb{R}^2 usando una sola carta,
per es. se usiamo coord. sferiche**

$$\theta = x^1, \quad \varphi = x^2$$

Supponiamo che la sfera venga mappata sul rettangolo

$$0 \leq x^1 \leq \pi, \quad 0 \leq x^2 \leq 2\pi$$



Il polo nord e' mappato sulla linea

$$x^1 = 0, \quad 0 \leq x^2 \leq 2\pi$$

Quindi la mappa non esiste!

**Inoltre, tutti i punti del semicerchio $\varphi = 0$
vanno in**

$$x^2 = 0, \quad x^2 = 2\pi$$

Di nuovo la mappa non esiste!

**Per evitare questi problemi dobbiamo
limitare il mapping a insiemi aperti**

$$0 < x^1 < \pi, \quad 0 < x^2 < 2\pi$$

**Questo mapping non preserva lunghezze e angoli
Non possiamo coprire la sfera con una sola carta**