Esercizio

Consideriamo lo spazio-tempo descritto, nel riferimento O, dalle coordinate $\{x^\mu\} = (t, r, \theta, \phi)$, con metrica

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \frac{1}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2 \tag{1}$$

(metrica di Scwarzschild), dove $M > 0$ è una costante. Sia dato il vettore $\vec{V}$ di componenti

$$V^\mu = \left(\sqrt{1 - \frac{2M}{r}}, r, 0, 0\right) . \tag{2}$$

1. Calcolare simboli di Christoffel.
2. Calcolare
$$V^t{}_{;t}\,; \quad V^t{}_{;r}\,; \quad V^\theta{}_{;r}\,; \quad V^\theta{}_{;\theta}\,. \tag{3}$$
3. Dato il riferimento O' di coordinate $\{x^{\alpha'}\} = (t', r', \theta', \phi')$ date da
$$x^\mu(x^{\alpha'}) \ : \quad \begin{cases} t &= t' \\ r &= r'\left(1 + \frac{M}{2r'}\right)^2 \\ \theta &= \theta' \\ \phi &= \phi' \end{cases} \tag{4}$$
determinare la metrica nel riferimento O'.
4. Calcolare le quantità
$$\Lambda^\mu{}_{\alpha'} \equiv \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\alpha'}} \qquad ; \qquad \Lambda^{\alpha'}{}_\mu \equiv \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\mu}\,. \tag{5}$$
5. Determinare le componenti del vettore $\vec{V}$ (2) nel riferimento O'.

Soluzione

1. I simboli di Christoffel possono essere calcolati dalle formule

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\ \ \mu} = g^{\mu\nu}\Gamma_{\alpha\beta\,\nu} \tag{6}$$

dove abbiamo definito per comodità di calcolo i simboli di Christoffel con indici bassi

$$\Gamma_{\alpha\beta\,\nu} \equiv \frac{1}{2}(g_{\alpha\nu,\beta} + g_{\beta\nu,\alpha} - g_{\alpha\beta,\nu})\,. \tag{7}$$

Le derivate non nulle delle componenti del tensore metrico sono

$$\begin{aligned} &g_{tt,r} = -\frac{2M}{r^2} \qquad g_{rr,r} = -\frac{2M}{r^2}\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-2} \\ &g_{\theta\theta,r} = 2r \\ &g_{\phi\phi,r} = 2r\sin^2\theta \qquad g_{\phi\phi,\theta} = 2r^2\sin\theta\cos\theta \end{aligned} \tag{8}$$

quindi i simboli di Christoffel non nulli con indici bassi sono

$$\begin{aligned} &\Gamma_{tt\,r} = \frac{1}{2}(g_{tr,t} + g_{tr,t} - g_{tt,r}) = -\frac{1}{2}g_{tt,r} = \frac{M}{r^2} \\ &\Gamma_{tr\,t} = \Gamma_{rt\,t} = \frac{1}{2}(g_{tt,r} + g_{rt,t} - g_{tr,t}) = \frac{1}{2}g_{tt,r} = -\frac{M}{r^2} \\ &\Gamma_{rr\,r} = \frac{1}{2}(g_{rr,r} + g_{rr,r} - g_{rr,r}) = \frac{1}{2}g_{rr,r} = -\frac{M}{r^2}\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-2} \\ &\Gamma_{\theta\theta,r} = -\frac{1}{2}g_{\theta\theta,r} = -r \\ &\Gamma_{\theta r,\theta} = \Gamma_{r\theta,\theta} = \frac{1}{2}g_{\theta\theta,r} = r \\ &\Gamma_{\phi\phi,r} = -\frac{1}{2}g_{\phi\phi,r} = -r\sin^2\theta \\ &\Gamma_{\phi r,\phi} = \Gamma_{r\phi\phi} = \frac{1}{2}g_{\phi\phi,r} = r\sin^2\theta \\ &\Gamma_{\phi\phi,\theta} = -\frac{1}{2}g_{\phi\phi,\theta} = -r^2\sin\theta\cos\theta \\ &\Gamma_{\phi\theta,\phi} = \Gamma_{\theta\phi\phi} = \frac{1}{2}g_{\phi\phi,\theta} = r^2\sin\theta\cos\theta\,. \end{aligned} \tag{9}$$

Contraendo con la metrica inversa

$$g^{\mu\nu} = \mathrm{diag}\left(-\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}, \left(1-\frac{2M}{r}\right), r^{-2}, r^{-2}\sin^{-2}\theta\right)\,, \tag{10}$$

si trova l'insieme dei simboli di Christoffel non nulli:

$$\Gamma_{tt}^{\ r} \;=\; \frac{M}{r^2}\left(1-\frac{2M}{r}\right)$$

$$
\begin{aligned}
\Gamma_{rt}^{\ t} = \Gamma_{tr}^{\ t} &= \frac{M}{r^2}\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1} \\
\Gamma_{rr}^{\ r} &= -\frac{M}{r^2}\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1} \\
\Gamma_{\theta\theta}^{\ r} &= -(r-2M) \\
\Gamma_{\phi\phi}^{\ r} &= -(r-2M)\sin^2\theta \\
\Gamma_{\theta r}^{\ \theta} = \Gamma_{r\theta}^{\ \theta} &= \frac{1}{r} \\
\Gamma_{\phi r}^{\ \phi} = \Gamma_{r\phi}^{\ \phi} &= \frac{1}{r} \\
\Gamma_{\phi\phi}^{\ \theta} &= -\sin\theta\cos\theta \\
\Gamma_{\phi\theta}^{\ \phi} &= \cot\theta\,.
\end{aligned} \tag{11}
$$

2. Si ha

$$
\begin{aligned}
V^t_{\ ;t} &= V^t_{\ ,t} + \Gamma_{t\mu}^{\ t} V^\mu = \Gamma_{tr}^{\ t} V^r = \frac{M}{r\left(1-\frac{2M}{r}\right)} \\
V^t_{\ ;r} &= V^t_{\ ,r} + \Gamma_{r\mu}^{\ t} V^\mu = V^t_{\ ,r} + \Gamma_{rt}^{\ t} V^t = \frac{2M}{r^2\sqrt{1-\frac{2M}{r}}} \\
V^\theta_{\ ;r} &= V^\theta_{\ ,r} + \Gamma_{r\mu}^{\ \theta} V^\mu = 0 \\
V^\theta_{\ ;\theta} &= V^\theta_{\ ,\theta} + \Gamma_{\theta\mu}^{\ \theta} V^\mu = \Gamma_{\theta r}^{\ \theta} V^r = 1\,.
\end{aligned} \tag{12}
$$

3. Trasformiamo dr^2. Si ha

$$
r = r'\left(1+\frac{M}{2r'}\right)^2 = r' + M + \frac{M^2}{4r'} \tag{13}
$$

quindi

$$
dr = \left(1-\frac{M^2}{4r'^2}\right)dr' = \left(1+\frac{M}{2r'}\right)\left(1-\frac{M}{2r'}\right)dr' \tag{14}
$$

e

$$
dr^2 = \left(1+\frac{M}{2r'}\right)^2\left(1-\frac{M}{2r'}\right)^2 dr'^2\,. \tag{15}
$$

Ora esprimiamo le componenti $g_{\mu\nu}$ nelle nuove coordinate. Si ha

$$
\begin{aligned}
1-\frac{2M}{r} &= 1-\frac{2M}{r'\left(1+\frac{M}{2r'}\right)^2} = \frac{1}{r'\left(1+\frac{M}{2r'}\right)^2}\left(r' + M + \frac{M^2}{4r'} - 2M\right) \\
&= \frac{1}{r'\left(1+\frac{M}{2r'}\right)^2}\left(r' - M + \frac{M^2}{4r'}\right) = \frac{\left(1-\frac{M}{2r'}\right)^2}{\left(1+\frac{M}{2r'}\right)^2}
\end{aligned} \tag{16}
$$

e

$$r^2 = r'^2 \left(1 + \frac{M}{2r'}\right)^2 . \tag{17}$$

Mettendo tutto assieme,

$$ds^2 = -\frac{\left(1 - \frac{M}{2r'}\right)^2}{\left(1 + \frac{M}{2r'}\right)^2} dt'^2 + \left(1 + \frac{M}{2r'}\right)^4 \left[dr'^2 + r'^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)\right] . \tag{18}$$

Ovviamente si sarebbe arrivati allo stesso risultato utilizzando le matrici Λ per trasformare il tensore $g_{\mu\nu}$.

4. Dalla (14) si ha che

$$\frac{\partial r}{\partial r'} = \left(1 - \frac{M^2}{4r'^2}\right) \tag{19}$$

quindi

$$\Lambda^{\mu}{}_{\alpha'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(1 - \frac{M^2}{4r'^2}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{20}$$

e le $\Lambda^{\alpha'}{}_{\mu}$ si ottengono invertendo la (20):

$$\Lambda^{\alpha'}{}_{\mu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(1 - \frac{M^2}{4r'^2}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \tag{21}$$

5. Prima di tutto esprimiamo le componenti V^{μ} nelle coordinate $x^{\alpha'}$; usando la (16),

$$V^{\mu} = \left(\sqrt{1 - \frac{2M}{r}}, r, 0, 0\right) = \left(\frac{1 - \frac{M}{2r'}}{1 + \frac{M}{2r'}}, r' \left(1 + \frac{M}{2r'}\right)^2, 0, 0\right) . \tag{22}$$

Le componenti di $\vec{V}$ nel riferimento O' saranno

$$\begin{aligned} V^{\alpha'} &= \Lambda^{\alpha'}{}_{\mu} V^{\mu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(1 - \frac{M^2}{4r'^2}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1-\frac{M}{2r'}}{1+\frac{M}{2r'}} \\ r'\left(1 + \frac{M}{2r'}\right)^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1-\frac{M}{2r'}}{1+\frac{M}{2r'}} \\ \frac{1+\frac{M}{2r'}}{1-\frac{M}{2r'}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} . \end{aligned} \tag{23}$$