Laplaciano in coordinate polari

Consideriamo la metrica euclidea tridimensionale, nelle coordinate cartesiane $\{x^\mu\} = (x^1, x^2, x^3)$,

$$ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \tag{1}$$

con $g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1, 1, 1)$. La metrica inversa sarà anch'essa $g^{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1, 1, 1)$. La stessa metrica può essere espressa nelle coordinate polari $\{x^{\alpha\prime}\} = (r, \theta, \phi)$, definite dalla trasformazione di coordinate $x^\mu = x^\mu(x^{\alpha\prime})$:

$$\begin{aligned} x^1 &= r \sin\theta \cos\phi \\ x^2 &= r \sin\theta \sin\phi \\ x^3 &= r \cos\theta \,. \end{aligned} \tag{2}$$

La metrica nelle nuove coordinate è

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2 = g_{\alpha'\beta'} dx^{\alpha\prime} dx^{\beta\prime} \tag{3}$$

ovvero $g_{\alpha'\beta'} = \mathrm{diag}(1, r^2, r^2 \sin^2\theta)$ mentre $g^{\alpha'\beta'} = \mathrm{diag}(1, r^{-2}, r^{-2} \sin^{-2}\theta)$.

L'operatore laplaciano in coordinate cartesiane ha la forma

$$\nabla^2 f \equiv g^{\mu\nu} f_{,\mu\nu} = \frac{\partial f}{\partial (x^1)^2} + \frac{\partial f}{\partial (x^2)^2} + \frac{\partial f}{\partial (x^3)^2} \,. \tag{4}$$

Se vogliamo scriverlo in un sistema di coordinate qualsiasi, dobbiamo prima di tutto scriverlo in forma tensoriale, ovvero con derivate covarianti invece che derivate ordinarie. Osserviamo che nello spazio euclideo in coordinate cartesiane $g_{\mu\nu,\alpha} = 0$, quindi $\Gamma^\alpha_{\ \mu\nu} = 0$ e la derivata covariante coincide con quella ordinaria, per cui possiamo scrivere

$$\nabla^2 f \equiv g^{\mu\nu} f_{;\mu\nu}. \tag{5}$$

Questa espressione, a differenza della precedente, è tensoriale e vale quindi in tutti i sistemi di coordinate. Possiamo quindi calcolare l'operatore laplaciano in coordinate polari

$$\nabla^2 f = g^{\alpha\prime\beta\prime} f_{;\alpha'\beta'} = g^{\alpha\prime\beta\prime} (f_{,\alpha'})_{;\beta'} \tag{6}$$

dove nella parentesi abbiamo messo la derivata ordinaria perche' la derivata covariante di una grandezza scalare (come la funzione f) coincide con la sua derivata ordinaria; in altre parole, il gradiente di uno scalare è un oggetto tensoriale, e precisamente è una uno-forma. Invece, fuori della parentesi c'è la derivata covariante perchè la derivata ordinaria e covariante di una uno-forma non coincidono.

Abbiamo quindi

$$\nabla^2 f = g^{\alpha\prime\beta\prime} \left[f_{,\alpha'\beta'} - \Gamma^{\sigma\prime}_{\ \alpha'\beta'} f_{,\sigma'} \right] \,. \tag{7}$$

I simboli di Christoffel non nulli si calcolano facilmente, osservando che la metrica è diagonale e che le derivate non nulle della metrica sono

$$g_{\theta\theta,r} = 2r\,, \qquad g_{\phi\phi,r} = 2r\sin^2\theta\,, \qquad g_{\phi\phi,\theta} = 2r^2\sin\theta\cos\theta \tag{8}$$

quindi i simboli di Christoffel non nulli con indici bassi sono

$$\begin{aligned}
&\Gamma_{\theta\theta\,r} = -\frac{1}{2}g_{\theta\theta,r} = -r\,, \qquad \Gamma_{\theta r\,\theta} = \Gamma_{r\theta\,\theta} = \frac{1}{2}g_{\theta\theta,r} = r \\
&\Gamma_{\phi\phi\,r} = -\frac{1}{2}g_{\phi\phi,r} = -r\sin^2\theta\,, \qquad \Gamma_{\phi r\,\phi} = \Gamma_{r\phi\,\phi} = \frac{1}{2}g_{\phi\phi,r} = r\sin^2\theta \\
&\Gamma_{\phi\phi\,\theta} = -\frac{1}{2}g_{\phi\phi,\theta} = -r^2\sin\theta\cos\theta\,, \qquad \Gamma_{\phi\theta\,\phi} = \Gamma_{\theta\phi\,\phi} = \frac{1}{2}g_{\phi\phi,\theta} = r^2\sin\theta\cos\theta
\end{aligned} \tag{9}$$

e i simboli di Christoffel non nulli sono

$$\begin{aligned}
&\Gamma^{\ r}_{\theta\theta} = -r\,, \qquad \Gamma^{\ \theta}_{\theta r} = \Gamma^{\ \theta}_{r\theta} = \frac{1}{r} \\
&\Gamma^{\ r}_{\phi\phi} = -r\sin^2\theta\,, \qquad \Gamma^{\ \phi}_{\phi r} = \Gamma^{\ \phi}_{r\phi} = \frac{1}{r} \\
&\Gamma^{\ \theta}_{\phi\phi} = -\sin\theta\cos\theta\,, \qquad \Gamma^{\ \phi}_{\phi\theta} = \Gamma^{\ \phi}_{\theta\phi} = \cot\theta\,.
\end{aligned} \tag{10}$$

Sostituendo in (7) troviamo la forma del laplaciano di una funzione f in coordinate polari

$$\begin{aligned}
\nabla^2 f &= f_{,rr} + \frac{1}{r^2}f_{,\theta\theta} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}f_{,\phi\phi} + \\
&\quad - \left[\Gamma^{\ r}_{\theta\theta}g^{\theta\theta} + \Gamma^{\ r}_{\phi\phi}g^{\phi\phi}\right] f_{,r} - \Gamma^{\ \theta}_{\phi\phi}g^{\phi\phi}f_{,\theta} \\
&= f_{,rr} + \frac{2}{r}f_{,r} + \frac{1}{r^2}\left(f_{,\theta\theta} + \cot\theta f_{,\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}f_{,\phi\phi}\right) \\
&= \left[\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d}{dr}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d}{d\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{d^2}{d\phi^2}\right] f\,.
\end{aligned} \tag{11}$$