TRASPORTO PARALLELO DI UN VETTORE LUNGO UN CAMMINO CHIUSO SU UNA SFERA

Si consideri la sfera S^2 di raggio unitario, in coordinate polari:

$$\{x^\mu\} = (\theta, \phi) \tag{1}$$

$$ds^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \tag{2}$$

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2\theta \end{pmatrix} . \tag{3}$$

Calcoliamo i simboli di Christoffel. La sola derivata della metrica non nulla è

$$g_{\phi\phi,\theta} = 2\sin\theta\cos\theta\,. \tag{4}$$

I simboli di Christoffel con indici bassi $\Gamma_{\mu\nu\rho}$, definiti dalla

$$\Gamma_{\mu\nu\rho} = \frac{1}{2}\left(g_{\mu\rho,\nu} + g_{\nu\rho,\mu} - g_{\mu\nu,\rho}\right) , \tag{5}$$

non nulli, saranno:

$$\Gamma_{\theta\phi\phi} = \Gamma_{\phi\theta\phi} = \frac{1}{2}\left(g_{\theta\phi,\phi} + g_{\phi\phi,\theta} - g_{\theta\phi,\phi}\right) = \frac{1}{2} g_{\phi\phi,\theta} = \sin\theta\cos\theta \tag{6}$$

$$\Gamma_{\phi\phi\theta} = \frac{1}{2}\left(g_{\phi\theta,\phi} + g_{\phi\theta,\phi} - g_{\phi\phi,\theta}\right) = -\frac{1}{2} g_{\phi\phi,\theta} = -\sin\theta\cos\theta\,. \tag{7}$$

I simboli di Christoffel $\Gamma^\rho_{\mu\nu}$ non nulli, essendo

$$\Gamma^\rho_{\mu\nu} = g^{\rho\sigma}\Gamma_{\mu\nu\sigma} \tag{8}$$

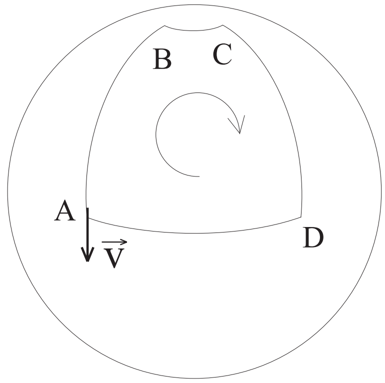
$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sin^2\theta} \end{pmatrix} , \tag{9}$$

saranno:

$$\begin{aligned} \Gamma^\phi_{\phi\theta} &= \Gamma^\phi_{\theta\phi} = g^{\phi\sigma}\Gamma_{\phi\theta\sigma} = g^{\phi\phi}\Gamma_{\phi\theta\phi} = g^{\phi\phi}\Gamma_{\theta\phi\phi} = \frac{\sin\theta\cos\theta}{\sin^2\theta} = \cot\theta \\ \Gamma^\theta_{\phi\phi} &= g^{\theta\sigma}\Gamma_{\phi\phi\sigma} = g^{\theta\theta}\Gamma_{\phi\phi\theta} = \Gamma_{\phi\phi\theta} = -\sin\theta\cos\theta\,. \end{aligned} \tag{10}$$

Trasporto parallelo sulla sfera

Studiamo il trasporto parallelo sulla sfera lungo il cammino in figura (notare che tale cammino è definito in maniera tale da evitare il polo nord, dove la mappa polare non è definita).



Come dimostreremo, trasportando lungo tale cammino il vettore $\vec{V}$, da A in A, esso viene ruotato di 90^o. Dimostriamolo. I quattro punti in figura hanno coordinate $x^\mu = (\theta, \phi)$:

$$A = \left(\frac{\pi}{2}, 0\right) \tag{11}$$

$$B = (\varepsilon, 0) \tag{12}$$

$$C = \left(\varepsilon, \frac{\pi}{2}\right) \tag{13}$$

$$D = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \tag{14}$$

dove ε è un parametro che assumiamo piccolo, e che alla fine della dimostrazione faremo tendere a zero.

Trasportiamo parallelamente lungo il cammino in figura il vettore inizialmente in A con componenti

$$V^\mu = (V^\theta, V^\phi) = (1, 0)\ . \tag{15}$$

Le equazioni del trasporto parallelo sono

$$\frac{dV^\alpha}{d\lambda} + \Gamma^\alpha_{\gamma\beta} V^\gamma U^\beta = 0 \tag{16}$$

con

$$U^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{d\lambda} \tag{17}$$

vettore tangente alla curva $\lambda \to x^\mu(\lambda)$; sostituendo i simboli di Christoffel dati in (10),

$$\begin{aligned} \frac{dV^\theta}{d\lambda} &= U^\phi V^\phi \sin\theta \cos\theta \\ \frac{dV^\phi}{d\lambda} &= -\left(U^\theta V^\phi + V^\theta U^\phi\right) \cot\theta\,. \end{aligned} \tag{18}$$

Osserviamo che i cammini AB, BC, CD, DA sono linee coordinate; le equazioni del trasporto parallelo possono quindi essere espresse in forma più semplice:

- per le linee coordinate θ,

$$V^{\mu}_{;\theta} = V^{\mu}_{,\theta} + \Gamma^{\mu}_{\theta\nu} V^{\nu} = 0 \tag{19}$$

ovvero

$$\begin{aligned} V^{\theta}_{,\theta} &= 0 \\ V^{\phi}_{,\theta} &= -\cot\theta V^{\phi} \,; \end{aligned} \tag{20}$$

- per le linee coordinate ϕ,

$$V^{\mu}_{;\phi} = V^{\mu}_{,\phi} + \Gamma^{\mu}_{\phi\nu} V^{\nu} = 0 \tag{21}$$

ovvero

$$\begin{aligned} V^{\theta}_{,\phi} &= \sin\theta\cos\theta V^{\phi} \\ V^{\phi}_{,\phi} &= -\cot\theta V^{\theta} \,. \end{aligned} \tag{22}$$

1. Il tratto da $A = (\pi/2, 0)$ a $B = (\varepsilon, 0)$ è una linea coordinata θ, quindi valgono le (20). La prima delle (20) ci dice che V^{θ} e costante, quindi $V^{\theta}(\theta) = V^{\theta}(\pi/2) = 1$.

   L'equazione per V^{ϕ} è della forma

   $$\begin{aligned} \frac{dV^{\phi}}{d\theta} &= -\cot\theta V^{\phi} \\ V^{\phi}\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 0 \,. \end{aligned} \tag{23}$$

   Questo è un problema di Cauchy (una equazione differenziale del primo ordine e un dato iniziale), quindi ammette un'unica soluzione. $V^{\phi}(\theta) \equiv 0$ è soluzione, quindi è l'unica soluzione.

   Questo risultato vale anche in casi piu' generali: se la derivata di una grandezza (in questo caso V^{ϕ}) è proporzionale alla grandezza stessa, e nel punto iniziale (in questo caso $\theta = \pi/2$) la grandezza vale 0, essa continua a valere 0 anche successivamente.

   Possiamo concludere che $V^{\mu}(\theta)$ è costante nel tratto AB, e in B si ha ancora:

   $$V^{\mu} = (1, 0) \,. \tag{24}$$

2. Il tratto da $B = (\varepsilon, 0)$ a $C = (\varepsilon, \pi/2)$ è una linea coordinata ϕ con $\theta = \epsilon$, quindi valgono le (22), che per $\varepsilon \ll 1$ diventano

   $$\frac{dV^{\theta}}{d\phi} = \sin\varepsilon\cos\varepsilon V^{\phi} = \varepsilon V^{\phi} + \mathcal{O}\left(\varepsilon^{3}\right) \tag{25}$$

   $$\frac{dV^{\phi}}{d\phi} = -\cot\varepsilon V^{\theta} = -\frac{1}{\varepsilon} V^{\theta} + \mathcal{O}\left(\varepsilon\right) \,. \tag{26}$$

Come si vede, non si può prendere $\varepsilon \to 0$, ovvero arrivare al polo nord, perchè le equazioni vi divergono. Dalla (26) si trova che

$$V^\phi = \frac{1}{\varepsilon} V^\theta_{,\phi} + \mathcal{O}(\varepsilon) \ , \tag{27}$$

mentre derivando la (25) rispetto a ϕ si ha

$$\frac{d^2 V^\theta}{d\phi^2} = -V^\theta + \mathcal{O}\left(\varepsilon^2\right) . \tag{28}$$

La soluzione generale di questa equazione è

$$V^\theta = C_1 \cos\phi + C_2 \sin\phi + \mathcal{O}\left(\varepsilon^2\right) \tag{29}$$

e dalla (27)

$$V^\phi = -\frac{C_1}{\varepsilon}\sin\phi + \frac{C_2}{\varepsilon}\cos\phi + \mathcal{O}(\varepsilon) \ . \tag{30}$$

con C_1, C_2 costanti di integrazione determinate dalle condizioni iniziali in $\phi = 0$, dove

$$\begin{aligned} V^\theta(\phi = 0) &= C_1 + \mathcal{O}\left(\varepsilon^2\right) = 1 \\ V^\phi(\phi = 0) &= -\frac{C_2}{\varepsilon} + \mathcal{O}(\varepsilon) = 0 \end{aligned} \tag{31}$$

per cui $C_1 = 1$, $C_2 = 0$ e

$$\begin{aligned} V^\theta &= \cos\phi + \mathcal{O}\left(\varepsilon^2\right) \\ V^\phi &= -\frac{1}{\varepsilon}\sin\phi + \mathcal{O}(\varepsilon) \ . \end{aligned} \tag{32}$$

Ponendo $\phi = \pi/2$ si trova V^μ nel punto C:

$$V^\mu = \left(\mathcal{O}\left(\varepsilon^2\right), -\frac{1}{\varepsilon} + \mathcal{O}(\varepsilon)\right) . \tag{33}$$

3. Il tratto da $C = (\varepsilon, \pi/2)$ a $D = (\pi/2, \pi/2)$ è una linea coordinata θ, quindi valgono le (20). Quindi V^θ è costante,

$$V^\theta(\theta) \equiv \mathcal{O}\left(\varepsilon^2\right) \tag{34}$$

mentre V^ϕ soddisfa

$$\begin{aligned} \frac{dV^\phi}{d\theta} &= -\cot\theta V^\phi \\ V^\phi(\theta = \epsilon) &= -\frac{1}{\varepsilon} + \mathcal{O}(\varepsilon) \ . \end{aligned} \tag{35}$$

La soluzione di questo sistema è

$$V^\phi = -\frac{1}{\sin\theta} + \mathcal{O}(\varepsilon) \tag{36}$$

quindi in D, ove $\theta = \pi/2$,

$$V^\mu = \left(\mathcal{O}\left(\varepsilon^2\right), -1 + \mathcal{O}(\varepsilon)\right) . \tag{37}$$

4. Il tratto da $D = (\pi/2, \pi/2)$ a $A = (\pi/2, 0)$ è una linea coordinata ϕ, quindi valgono le (22),

$$\frac{dV^\theta}{d\phi} = \sin\theta\cos\theta V^\phi \tag{38}$$

$$\frac{dV^\phi}{d\phi} = -\cot\theta V^\theta \,. \tag{39}$$

   In entrambe le equazioni il secondo membro si annulla, perchè sul percorso da D ad A si ha sempre $\theta = \frac{\pi}{2}$. Quindi in A il vettore è

$$V^\mu = \left(\mathcal{O}\left(\varepsilon^2\right), -1 + \mathcal{O}\left(\varepsilon\right)\right) \,. \tag{40}$$

Nel limite $\varepsilon \to 0$

$$V^\mu = (0, -1) \tag{41}$$

mentre in A alla partenza era:

$$V^\mu = (1, 0) \; : \tag{42}$$

il trasporto parallelo lungo questo cammino chiuso ha ruotato il vettore di 90^o in senso orario.