

CORSO DI RELATIVITA' GENERALE

Docente: Valeria Ferrari stanza 253, II piano Vecchio edificio Fisica

E-mail valeria.ferrari@uniroma1.it

ORARIO LEZIONI:

GIOVEDI': dal 26 settembre a fine corso 12:00 - 14:00 aula AMALDI

VENERDI': 16:00-18:00 aula AMALDI

**Dal 13 Novembre al 27 Novembre ci sara' anche lezione il
mercoledì' 14:00-16:00 aula CONVERSI**

Ricevimento: giovedì' dalle 14:00 alle 15:00

Tutte le informazioni sul corso si troveranno sul sito

<http://www.roma1.infn.it/teongrav/teaching.html>

cliccando su Relativita' Generale

**sul sito troverete tutte le informazioni relative al corso,
agli appelli, alle modalita' di svolgimento degli esami, etc etc**

Testi consigliati

Dispense e programma del corso sono disponibili sul sito

**B. Schutz, *A first Course in General Relativity*
Cambridge University Press**

**S. Carrol, *Spacetime and Geometry, an introduction to General Relativity*
Addison Wesley**

Affinche' io possa costruire una mailing list,
inviatemi col cellulare un messaggio in cui,
nel SUBJECT, scriverete

Cognome Nome F oppure A

valeria.ferrari@roma1.infn.it

PRE-REQUISITO FONDAMENTALE PER SEGUIRE QUESTO CORSO:

CONOSCERE LA RELATIVITÀ SPECIALE

Ripassate le trasformazioni di Lorentz!!!

Finalita' del corso:

Lo scopo del corso e' di introdurre le nozioni di base della teoria moderna della gravitazione e delle sue piu' importanti implicazioni in campo astrofisico

PROGRAMMA del CORSO:

- La teoria newtoniana della gravita' e il ruolo del principio di equivalenza nella formulazione della teoria Einsteiniana della gravita';
- l'equazione delle geodetiche come conseguenza del Principio di equivalenza
- Gli strumenti matematici per costruire la teoria della gravita':
varietà differenziabili, vettori, 1-forme, tensori. Come descriviamo il campo gravitazionale: il tensore metrico, trasporto parallelo e derivata covariante.
Tensore di curvatura e identità di Bianchi
- Tensore energia-impulso, principio di covarianza generale, leggi di conservazione
- Le equazioni di Einstein per il campo gravitazionale. Simmetrie, vettori di Killing e leggi di conservazione
- Campo gravitazionale all'esterno di una distribuzione di massa statica e a simmetria sferica: la soluzione di Schwarzschild; il concetto di buco nero, l'orizzonte degli eventi
- Fenomeni che avvengono nelle vicinanze di corpi massivi: redshift gravitazionale, deflessione della luce e precessione del perielio di Mercurio.
- Soluzioni ondose delle equazioni di Einstein. Le equazioni della deviazione geodetica

Al secondo semestre ci sarà il corso avanzato di relatività generale

ONDE GRAVITAZIONALI, STELLE E BUCHI NERI

da quest'anno è tenuto dal Prof. Gualtieri

- generazione di onde gravitazionali e sorgenti; come si rivelano e quali segnali sono stati rivelati dal 2015 a oggi
- fasi finali della vita di una stella: nane bianche e stelle di neutroni.
Struttura e stabilità
- buchi neri rotanti: soluzione di Kerr e fenomenologia

ci sara' un esonero sulla parte "tecnica" del corso (grosso modo i primi 5 capitoli delle dispense)

la data sara' decisa a breve

Esempi di esoneri e compiti d'esame degli anni passati si trovano sul sito

**Chi supera l'esonero, all'orale non dovra' rispondere su questa parte del programma.
Chi non lo supera, dovra' sostenere lo scritto il giorno stesso dell'orale.**

L'esonero e' valido solo per l'anno accademico in corso.

l'esonero non avra' un voto:

o si supera o non si supera

Chi non supera l'esonero (o lo scritto) non puo' sostenere l'orale

COME SI SVOLGE LA PROVA ORALE:

Tutti gli studenti che devono sostenere l'esame orale devono presentarsi all'ora e nel giorno di convocazione.

Vengono suddivisi in gruppi di 6-8 persone che si presenteranno all'ora che verrà comunicata loro in loco.

A ogni studente viene assegnata una domanda dell'elenco che si trova sul sito del corso.

Ognuno scrive quanto sa sulla domanda (equazioni e dimostrazioni), avendo a disposizione circa 20 minuti.

Trascorso questo tempo si viene chiamati in successione e si sostiene l'esame orale, che verte sulla domanda assegnata e su ulteriori approfondimenti degli argomenti svolti a lezione.

Durante l'intero svolgimento dell'esame gli studenti non possono consultare testi o appunti e non devono parlare tra loro.

APPELLI D'ESAME

Data Appello	Data Inizio prenotazione	Data Fine Prenotazione	
30/01/2020	13/01/2020	22/01/2020	
17/02/2020	01/02/2020	09/02/2020	
12/05/2020	25/04/2020	06/05/2020	riservato fuoricorso
18/06/2020	01/06/2020	10/06/2020	
16/07/2020	21/06/2020	04/07/2020	
17/09/2020	01/09/2020	10/09/2020	

ATTENZIONE: controllare SEMPRE le date su INFOSTUD perche' per problemi di aule o altro potrebbero cambiare

Se non si e' superato l'esonero, quando ci si prenota su INFOSTUD bisogna inviare una email all'indirizzo

valeria.ferrari@roma1.infn.it

dicendo che, appunto, non si ha l'esonero. Senza questa informazione non si puo' sostenere ne' lo scritto, ne' l'orale

CHI NON SI PRENOTA SU INFOSTUD NON PUO' SOSTENERE L'ESAME

La Relatività Generale è la teoria fisica della gravitazione

basata sul

Principio di Equivalenza tra gravitazione e inerzia

e

Sul Principio di Covarianza Generale

Perché la teoria newtoniana diventa inappropriata a descrivere il campo gravitazionale?

Perché c'è bisogno di un tensore per descrivere il campo gravitazionale?

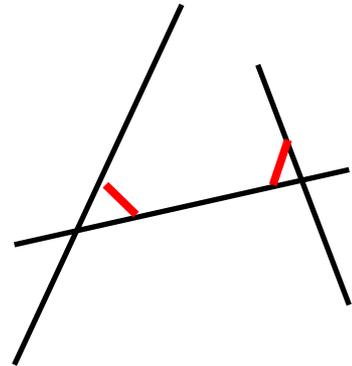
**Qual è il ruolo del
Principio di Equivalenza e del
Principio di Covarianza Generale
nella formulazione delle equazioni di Einstein?**

L'arena della fisica pre-relativistica è lo spazio piatto della geometria euclidea

I postulati di Euclide (~325-265 ac)

Risulti postulato che:

- 1) si possa tracciare una retta da un punto qualsiasi ad ogni altro punto;**
- 2) si possa prolungare indefinitamente una linea retta ;**
- 3) si possa descrivere un cerchio con un centro qualsiasi e un raggio qualsiasi;**
- 4) tutti gli angoli retti siano congruenti fra di loro;**
- 5) se una retta che interseca due altre rette forma, dalla stessa parte, angoli inferiori a due angoli retti, le due rette, se estese indefinitamente, si incontrano da quella parte dove gli angoli sono inferiori a due angoli retti.**



Gauss 1824 (Germania)

Bolay 1832 (Austria)

Lobachevski 1826 (Russia)

Scoprirono indipendentemente una geometria che soddisfa tutti i postulati di Euclide **eccetto il quinto**

Spazio bi-dimensionale a curvatura negativa

Rappresentazione analitica formulata da Felix Klein nel 1870

Per ogni coppia di numeri reali (x_1, x_2) tali che

$x_1^2 + x_2^2 < 1$ definiamo la distanza

$$d(x, X) = a \cosh^{-1} \left[\frac{1 - x_1 X_1 - x_2 X_2}{\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2} \sqrt{1 - X_1^2 - X_2^2}} \right]$$

a = lunghezza di scala

L'indipendenza logica del quinto postulato di Euclide era così dimostrata

Nel 1827 Gauss pubblica le
Disquisitiones generales circa superficies curvas

In cui distingue tra

Proprietà **interne o intrinseche** di una superficie

e

Proprietà **esterne o estrinseche**

La proprietà **intrinseca** fondamentale è la **distanza** tra due punti, cioè il cammino più breve che congiunge due punti sulla superficie; la geometria intrinseca di un cilindro è piatta, ma non lo è quella di una sfera

La geometria intrinseca di una superficie considera solo le relazioni tra punti che stanno sulla superficie

Le proprietà **estrinseche** hanno a che vedere con l'**embedding** della superficie in uno spazio a dimensione più alta: es. curvatura estrinseca

Noi ci occuperemo essenzialmente delle proprietà intrinseche

Seguendo Gauss, selezioniamo quegli spazi metrici per cui, **data una qualsiasi regione di spazio sufficientemente piccola**, e' possibile scegliere un sistema di coordinate

(ξ^1, ξ^2) tale che la distanza tra il punto $P = (\xi^1, \xi^2)$ e il punto

$$P' = (\xi^1 + d\xi^1, \xi^2 + d\xi^2)$$

soddisfi il teorema di Pitagora

$$ds^2 = (d\xi^1)^2 + (d\xi^2)^2$$

ATTENZIONE: d'ora in avanti, quando diro' "distanza" tra due punti , intendero' distanza tra due punti infinitamente vicini

Le coordinate (ξ^1, ξ^2) si dicono "localmente euclidee"

ATTENZIONE: la possibilità di definire un sistema di coordinate localmente euclidee è una proprietà **LOCALE**, vale cioè solo nell'intorno di un punto, a meno che l'intero spazio non sia euclideo.

Supponiamo ora di cambiare il sistema di coordinate: come si trasforma la distanza?

$$\xi^1 = \xi^1(x^1, x^2) \quad \rightarrow \quad d\xi^1 = \frac{\partial \xi^1}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial \xi^1}{\partial x^2} dx^2$$

$$\xi^2 = \xi^2(x^1, x^2) \quad \rightarrow \quad d\xi^2 = \frac{\partial \xi^2}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial \xi^2}{\partial x^2} dx^2$$

$$ds^2 = (d\xi^1)^2 + (d\xi^2)^2 \quad \text{diventa}$$

$$\begin{aligned} ds^2 &= \left[\left(\frac{\partial \xi^1}{\partial x^1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi^2}{\partial x^1} \right)^2 \right] (dx^1)^2 + \left[\left(\frac{\partial \xi^1}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi^2}{\partial x^2} \right)^2 \right] (dx^2)^2 \\ &+ 2 \left[\left(\frac{\partial \xi^1}{\partial x^1} \right) \left(\frac{\partial \xi^1}{\partial x^2} \right) + \left(\frac{\partial \xi^2}{\partial x^1} \right) \left(\frac{\partial \xi^2}{\partial x^2} \right) \right] dx^1 dx^2 \\ &= g_{11} (dx^1)^2 + g_{22} (dx^2)^2 + 2g_{12} dx^1 dx^2 \\ &= \sum_{\alpha=1,2} \sum_{\beta=1,2} g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \quad \equiv \quad g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \quad \mathbf{g_{\alpha\beta} \text{ e' il tensore metrico}} \end{aligned}$$

Nello scrivere l'ultima uguaglianza abbiamo usato la convenzione di Einstein

Riepilogando: nel sistema di coordinate localmente euclideo (ξ^1, ξ^2)
 la distanza tra due punti è data da

$$ds^2 = (d\xi^1)^2 + (d\xi^2)^2$$

In un sistema di coordinate generico (x^1, x^2)

$$ds^2 = \sum_{\alpha=1,2} \sum_{\beta=1,2} g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \equiv g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$$

$$g_{11} = \left[\left(\frac{\partial \xi^1}{\partial x^1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi^2}{\partial x^1} \right)^2 \right]$$

$$g_{22} = \left[\left(\frac{\partial \xi^1}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi^2}{\partial x^2} \right)^2 \right]$$

$$g_{12} = \left[\left(\frac{\partial \xi^1}{\partial x^1} \right) \left(\frac{\partial \xi^1}{\partial x^2} \right) + \left(\frac{\partial \xi^2}{\partial x^1} \right) \left(\frac{\partial \xi^2}{\partial x^2} \right) \right]$$

$$g_{21} = g_{12}$$

**nel sistema di coord. euclideo possiamo
 anche scrivere**

$$ds^2 = (d\xi^1)^2 + (d\xi^2)^2 \equiv \eta_{\alpha\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta$$

$$\eta_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$g_{11} = \left[\left(\frac{\partial \xi^1}{\partial x^1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi^2}{\partial x^1} \right)^2 \right]$$

$$g_{22} = \left[\left(\frac{\partial \xi^1}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi^2}{\partial x^2} \right)^2 \right]$$

$$g_{12} = \left[\left(\frac{\partial \xi^1}{\partial x^1} \right) \left(\frac{\partial \xi^1}{\partial x^2} \right) + \left(\frac{\partial \xi^2}{\partial x^1} \right) \left(\frac{\partial \xi^2}{\partial x^2} \right) \right]$$

$$g_{21} = g_{12}$$

Le componenti del tensore metrico contengono le derivate prime delle coordinate 'localmente euclidee' rispetto alle coordinate generiche

$g_{\alpha\beta}$ e'
un tensore simmetrico

QUESTI CONCETTI SI GENERALIZZANO IMMEDIATAMENTE AL CASO DI SPAZI DI DIMENSIONI MAGGIORI

$$\begin{aligned}
g_{11} &= \left[\left(\frac{\partial \xi^1}{\partial x^1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi^2}{\partial x^1} \right)^2 \right] \\
g_{22} &= \left[\left(\frac{\partial \xi^1}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi^2}{\partial x^2} \right)^2 \right] \\
g_{12} &= \left[\left(\frac{\partial \xi^1}{\partial x^1} \right) \left(\frac{\partial \xi^1}{\partial x^2} \right) + \left(\frac{\partial \xi^2}{\partial x^1} \right) \left(\frac{\partial \xi^2}{\partial x^2} \right) \right] \\
g_{21} &= g_{12}
\end{aligned}$$

Le componenti del tensore metrico contengono le derivate prime delle coordinate 'localmente euclidee' rispetto alle coordinate generiche

ESEMPIO: passiamo da coordinate localmente euclidee (ξ^1, ξ^2) a coord. polari (r, θ) Come calcolo il tensore metrico?

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= r \cos \theta & \rightarrow d\xi^1 &= \cos \theta dr - r \sin \theta d\theta \\
\xi_2 &= r \sin \theta & \rightarrow d\xi^2 &= \sin \theta dr + r \cos \theta d\theta
\end{aligned} \quad (r, \theta) = (x^1, x^2)$$

$$ds^2 = (d\xi^1)^2 + (d\xi^2)^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta, \quad \alpha, \beta = 1, 2$$

$$g_{11} = 1, \quad g_{22} = r^2, \quad g_{12} = 0.$$

Passiamo da (x^1, x^2) a $(x^{1'}, x^{2'})$: come cambia il tensore metrico?

$$\begin{cases} x^{1'} = x^{1'}(x^1, x^2) \\ x^{2'} = x^{2'}(x^1, x^2) \end{cases} \quad \text{e viceversa} \quad \begin{cases} x^1 = x^1(x^{1'}, x^{2'}) \\ x^2 = x^2(x^{1'}, x^{2'}) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} g'_{11} \equiv g_{1'1'} &= \left[\left(\frac{\partial \xi^1}{\partial x^{1'}} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi^2}{\partial x^{1'}} \right)^2 \right] \\ &= \left[\left(\frac{\partial \xi^1}{\partial x^1} \frac{\partial x^1}{\partial x^{1'}} + \frac{\partial \xi^1}{\partial x^2} \frac{\partial x^2}{\partial x^{1'}} \right)^2 + \left[\left(\frac{\partial \xi^2}{\partial x^1} \frac{\partial x^1}{\partial x^{1'}} + \frac{\partial \xi^2}{\partial x^2} \frac{\partial x^2}{\partial x^{1'}} \right)^2 \right. \right. \\ &= \left[\left(\frac{\partial \xi^1}{\partial x^1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi^2}{\partial x^1} \right)^2 \right] \left(\frac{\partial x^1}{\partial x^{1'}} \right)^2 + \left[\left(\frac{\partial \xi^1}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi^2}{\partial x^2} \right)^2 \right] \left(\frac{\partial x^2}{\partial x^{1'}} \right)^2 \\ &\quad + 2 \left(\frac{\partial \xi^1}{\partial x^1} \frac{\partial \xi^1}{\partial x^2} + \frac{\partial \xi^2}{\partial x^1} \frac{\partial \xi^2}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial x^1}{\partial x^{1'}} \frac{\partial x^2}{\partial x^{1'}} \right) \\ g_{11} &= \left[\left(\frac{\partial \xi^1}{\partial x^1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi^2}{\partial x^1} \right)^2 \right] \\ g_{22} &= \left[\left(\frac{\partial \xi^1}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi^2}{\partial x^2} \right)^2 \right] \\ g_{12} &= \left[\left(\frac{\partial \xi^1}{\partial x^1} \right) \left(\frac{\partial \xi^1}{\partial x^2} \right) + \left(\frac{\partial \xi^2}{\partial x^1} \right) \left(\frac{\partial \xi^2}{\partial x^2} \right) \right] \\ g_{21} &= g_{12} \end{aligned}$$

Passiamo da (x^1, x^2) a $(x^{1'}, x^{2'})$: come cambia il tensore metrico?

$$x^{1'} = x^1(x^1, x^2)$$

$$x^{2'} = x^2(x^1, x^2)$$

$$\begin{aligned}
 g'_{11} \equiv g_{1'1'} &= \left[\left(\frac{\partial \xi^1}{\partial x^{1'}} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi^2}{\partial x^{1'}} \right)^2 \right] \\
 &= \left[\left(\frac{\partial \xi^1}{\partial x^1} \frac{\partial x^1}{\partial x^{1'}} + \frac{\partial \xi^1}{\partial x^2} \frac{\partial x^2}{\partial x^{1'}} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi^2}{\partial x^1} \frac{\partial x^1}{\partial x^{1'}} + \frac{\partial \xi^2}{\partial x^2} \frac{\partial x^2}{\partial x^{1'}} \right)^2 \right] \\
 \mathbf{g}_{11} &= \left[\left(\frac{\partial \xi^1}{\partial x^1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi^2}{\partial x^1} \right)^2 \right] \left(\frac{\partial x^1}{\partial x^{1'}} \right)^2 + \left[\left(\frac{\partial \xi^1}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi^2}{\partial x^2} \right)^2 \right] \left(\frac{\partial x^2}{\partial x^{1'}} \right)^2 \\
 &\quad + 2 \left(\frac{\partial \xi^1}{\partial x^1} \frac{\partial \xi^1}{\partial x^2} + \frac{\partial \xi^2}{\partial x^1} \frac{\partial \xi^2}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial x^1}{\partial x^{1'}} \frac{\partial x^2}{\partial x^{1'}} \right)
 \end{aligned}$$

$$g_{11} = \left[\left(\frac{\partial \xi^1}{\partial x^1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi^2}{\partial x^1} \right)^2 \right]$$

$$g_{22} = \left[\left(\frac{\partial \xi^1}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi^2}{\partial x^2} \right)^2 \right]$$

$$g_{12} = \left[\left(\frac{\partial \xi^1}{\partial x^1} \right) \left(\frac{\partial \xi^1}{\partial x^2} \right) + \left(\frac{\partial \xi^2}{\partial x^1} \right) \left(\frac{\partial \xi^2}{\partial x^2} \right) \right]$$

$$g_{21} = g_{12}$$

Passiamo da (x^1, x^2) a $(x^{1'}, x^{2'})$: come cambia il tensore metrico?

$$x^{1'} = x^1(x^1, x^2)$$

$$x^{2'} = x^2(x^1, x^2)$$

$$\begin{aligned}
 g'_{11} \equiv g_{1'1'} &= \left[\left(\frac{\partial \xi^1}{\partial x^{1'}} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi^2}{\partial x^{1'}} \right)^2 \right] \\
 &= \left[\left(\frac{\partial \xi^1}{\partial x^1} \frac{\partial x^1}{\partial x^{1'}} + \frac{\partial \xi^1}{\partial x^2} \frac{\partial x^2}{\partial x^{1'}} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi^2}{\partial x^1} \frac{\partial x^1}{\partial x^{1'}} + \frac{\partial \xi^2}{\partial x^2} \frac{\partial x^2}{\partial x^{1'}} \right)^2 \right] \\
 \mathbf{g}_{11} &= \left[\left(\frac{\partial \xi^1}{\partial x^1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi^2}{\partial x^1} \right)^2 \right] \left(\frac{\partial x^1}{\partial x^{1'}} \right)^2 + \left[\left(\frac{\partial \xi^1}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi^2}{\partial x^2} \right)^2 \right] \left(\frac{\partial x^2}{\partial x^{1'}} \right)^2 \\
 &\quad + 2 \left(\frac{\partial \xi^1}{\partial x^1} \frac{\partial \xi^1}{\partial x^2} + \frac{\partial \xi^2}{\partial x^1} \frac{\partial \xi^2}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial x^1}{\partial x^{1'}} \frac{\partial x^2}{\partial x^{1'}} \right) \quad \mathbf{g}_{22}
 \end{aligned}$$

$$g_{11} = \left[\left(\frac{\partial \xi^1}{\partial x^1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi^2}{\partial x^1} \right)^2 \right]$$

$$g_{22} = \left[\left(\frac{\partial \xi^1}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi^2}{\partial x^2} \right)^2 \right]$$

$$g_{12} = \left[\left(\frac{\partial \xi^1}{\partial x^1} \right) \left(\frac{\partial \xi^1}{\partial x^2} \right) + \left(\frac{\partial \xi^2}{\partial x^1} \right) \left(\frac{\partial \xi^2}{\partial x^2} \right) \right]$$

$$g_{21} = g_{12}$$

Passiamo da (x^1, x^2) a $(x^{1'}, x^{2'})$: come cambia il tensore metrico?

$$x^{1'} = x^{1'}(x^1, x^2)$$

$$x^{2'} = x^{2'}(x^1, x^2)$$

$$\begin{aligned}
 g'_{11} \equiv g_{1'1'} &= \left[\left(\frac{\partial \xi^1}{\partial x^{1'}} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi^2}{\partial x^{1'}} \right)^2 \right] \\
 &= \left[\left(\frac{\partial \xi^1}{\partial x^1} \frac{\partial x^1}{\partial x^{1'}} + \frac{\partial \xi^1}{\partial x^2} \frac{\partial x^2}{\partial x^{1'}} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi^2}{\partial x^1} \frac{\partial x^1}{\partial x^{1'}} + \frac{\partial \xi^2}{\partial x^2} \frac{\partial x^2}{\partial x^{1'}} \right)^2 \right] \\
 \mathbf{g}_{11} &= \left[\left(\frac{\partial \xi^1}{\partial x^1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi^2}{\partial x^1} \right)^2 \right] \left(\frac{\partial x^1}{\partial x^{1'}} \right)^2 + \left[\left(\frac{\partial \xi^1}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi^2}{\partial x^2} \right)^2 \right] \left(\frac{\partial x^2}{\partial x^{1'}} \right)^2 \\
 &\quad + 2 \left(\frac{\partial \xi^1}{\partial x^1} \frac{\partial \xi^1}{\partial x^2} + \frac{\partial \xi^2}{\partial x^1} \frac{\partial \xi^2}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial x^1}{\partial x^{1'}} \frac{\partial x^2}{\partial x^{1'}} \right)
 \end{aligned}$$

\mathbf{g}_{22}

\mathbf{g}_{12}

$$g_{11} = \left[\left(\frac{\partial \xi^1}{\partial x^1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi^2}{\partial x^1} \right)^2 \right]$$

$$g_{22} = \left[\left(\frac{\partial \xi^1}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi^2}{\partial x^2} \right)^2 \right]$$

$$g_{12} = \left[\left(\frac{\partial \xi^1}{\partial x^1} \right) \left(\frac{\partial \xi^1}{\partial x^2} \right) + \left(\frac{\partial \xi^2}{\partial x^1} \right) \left(\frac{\partial \xi^2}{\partial x^2} \right) \right]$$

$$g_{21} = g_{12}$$

Passiamo da (x^1, x^2) a $(x^{1'}, x^{2'})$: come cambia il tensore metrico?

$$x^{1'} = x^{1'}(x^1, x^2)$$

$$x^{2'} = x^{2'}(x^1, x^2)$$

$$g'_{11} \equiv g_{1'1'} = \left[\left(\frac{\partial \xi^1}{\partial x^{1'}} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi^2}{\partial x^{1'}} \right)^2 \right]$$

$$= \left[\left(\frac{\partial \xi^1}{\partial x^1} \frac{\partial x^1}{\partial x^{1'}} + \frac{\partial \xi^1}{\partial x^2} \frac{\partial x^2}{\partial x^{1'}} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi^2}{\partial x^1} \frac{\partial x^1}{\partial x^{1'}} + \frac{\partial \xi^2}{\partial x^2} \frac{\partial x^2}{\partial x^{1'}} \right)^2 \right]$$

$$\mathbf{g}_{11} = \left[\left(\frac{\partial \xi^1}{\partial x^1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi^2}{\partial x^1} \right)^2 \right] \left(\frac{\partial x^1}{\partial x^{1'}} \right)^2 + \left[\left(\frac{\partial \xi^1}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi^2}{\partial x^2} \right)^2 \right] \left(\frac{\partial x^2}{\partial x^{1'}} \right)^2$$

$$+ 2 \left(\frac{\partial \xi^1}{\partial x^1} \frac{\partial \xi^1}{\partial x^2} + \frac{\partial \xi^2}{\partial x^1} \frac{\partial \xi^2}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial x^1}{\partial x^{1'}} \frac{\partial x^2}{\partial x^{1'}} \right)$$

\mathbf{g}_{22}

\mathbf{g}_{12}

$$g_{11} = \left[\left(\frac{\partial \xi^1}{\partial x^1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi^2}{\partial x^1} \right)^2 \right] = g_{11} \left(\frac{\partial x^1}{\partial x^{1'}} \right)^2 + g_{22} \left(\frac{\partial x^2}{\partial x^{1'}} \right)^2 + 2g_{12} \left(\frac{\partial x^1}{\partial x^{1'}} \frac{\partial x^2}{\partial x^{1'}} \right)$$

$$g_{22} = \left[\left(\frac{\partial \xi^1}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi^2}{\partial x^2} \right)^2 \right]$$

$$g_{12} = \left[\left(\frac{\partial \xi^1}{\partial x^1} \right) \left(\frac{\partial \xi^1}{\partial x^2} \right) + \left(\frac{\partial \xi^2}{\partial x^1} \right) \left(\frac{\partial \xi^2}{\partial x^2} \right) \right]$$

$$g_{21} = g_{12}$$

$$g'_{11} = \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{\beta=1}^2 g_{\alpha\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{1'}} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{1'}} = g_{\alpha\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{1'}} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{1'}}$$

In generale, quando si passa da un riferimento a un altro

$$g'_{\alpha\beta} \equiv g_{\alpha'\beta'} = \sum_{\mu=1,2} \sum_{\nu=1,2} g_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\beta'}} =$$
$$\equiv g_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\beta'}}$$

Questo è il modo in cui si trasformano i tensori quando si passa da un qualsiasi sistema di coordinate a un'altro

**ATTENZIONE: ove ci sono indici ripetuti (in alto e in basso)
è sempre sottintesa la somma**

Dato uno spazio metrico in cui la distanza tra due punti infinitamente vicini sia esprimibile tramite il Teorema di Pitagora,

$g_{\alpha\beta}$ **permette di esprimere la distanza in qualsiasi altro sistema di coordinate.**

VICEVERSA:

Dato uno spazio in cui

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$$

Se lo spazio appartiene alla sottoclasse definita da Gauss, è sempre possibile trovare un sistema di coordinate localmente euclidee tale che

$$ds^2 = (d\xi^1)^2 + (d\xi^2)^2$$

Il tensore metrico determina le proprietà intrinseche di uno spazio metrico

Vogliamo definire una funzione di $g_{\alpha\beta}$ che dipenda dalle derivate prime e seconde del tensore metrico, ma **NON** dipenda dal sistema di coordinate usate

Nel caso di superfici bidimensionali, questa quantità è la **CURVATURA GAUSSIANA**

$$k = \frac{1}{2g} \left[2 \frac{\partial^2 g_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 g_{11}}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 g_{22}}{\partial x_1^2} \right] - \frac{g_{22}}{4g^2} \left[\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x_1} \right) \left(2 \frac{\partial g_{12}}{\partial x_2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial x_1} \right) - \left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x_2} \right)^2 \right] +$$

$$\frac{g_{12}}{4g^2} \left[\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x_1} \right) \left(\frac{\partial g_{22}}{\partial x_2} \right) - 2 \left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x_2} \right) \left(\frac{\partial g_{22}}{\partial x_1} \right) + \right.$$

$$\left. \left(2 \frac{\partial g_{12}}{\partial x_1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x_2} \right) \left(2 \frac{\partial g_{12}}{\partial x_2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial x_1} \right) \right] - \frac{g_{11}}{4g^2} \left[\left(\frac{\partial g_{22}}{\partial x_2} \right) \left(2 \frac{\partial g_{12}}{\partial x_1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x_2} \right) - \left(\frac{\partial g_{22}}{\partial x_1} \right)^2 \right]$$

$$g = g_{11}g_{22} - g_{12}^2 \quad \text{determinante della metrica}$$

ATTENZIONE: la curvatura, che descrive le proprietà intrinseche di una geometria bidimensionale è una quantità scalare

Per esempio, in qualsiasi coordinate esprimiamo la metrica della 2-sfera, la curvatura gaussiana sarà sempre

$$k = \frac{1}{a^2}$$

Provare per es. con le coordinate (θ, φ)

$$ds^2 = a^2 d\vartheta^2 + a^2 \sin^2 \vartheta d\varphi^2$$

Invece per la geometria di Gauss-Boly-Lobachevski

$$ds^2 = \frac{a^2(1-x_2^2)}{(1-x_1^2-x_2^2)^2} dx_1^2 + \frac{a^2(1-x_1^2)}{(1-x_1^2-x_2^2)^2} dx_2^2 + \frac{a^2 x_1 x_2}{(1-x_1^2-x_2^2)^2} dx_1 dx_2$$

$$k = -\frac{1}{a^2}$$

k è invariante rispetto a trasformazioni di coordinate

Quanto detto finora si estende a spazi di dimensioni arbitrarie
in particolare
al caso **D=4** lo **spazio-tempo** in cui avvengono i fenomeni fisici

Selezioneremo quegli spazi-tempo in cui, localmente, la distanza tra punti vicini sia data da

$$ds^2 = -(d\xi^0)^2 + (d\xi^1)^2 + (d\xi^2)^2 + (d\xi^3)^2$$

Spazi-tempo localmente Minkowskiani (pseudo-euclidei)

IMPORTANTE: se uno spazio ha dimensioni D, le proprietà intrinseche sono descritte da più funzioni scalari. Quante sono necessarie?

$D(D+1)/2$ = componenti indipendenti di $g_{\alpha\beta}$

Possiamo sempre scegliere le coordinate in modo da imporre D relazioni funzionali tra queste componenti

$C = D(D+1)/2 - D = D(D-1)/2$ quantità

Riemann, 1826-1866

Christoffel

LeviCivita, Ricci

Beltrami

per es. se D=2, C=1

se D=4 C=6

Philosophiae Naturalis Principia Mathematica, Newton 1685

Seconda legge di Newton

$$\vec{F} = m_I \vec{a}$$

Legge della gravitazione universale

$$\vec{F}_G = m_G \vec{g}$$

$$\vec{g} = - \frac{G \sum_i M_{Gi} (\vec{r} - \vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3}$$

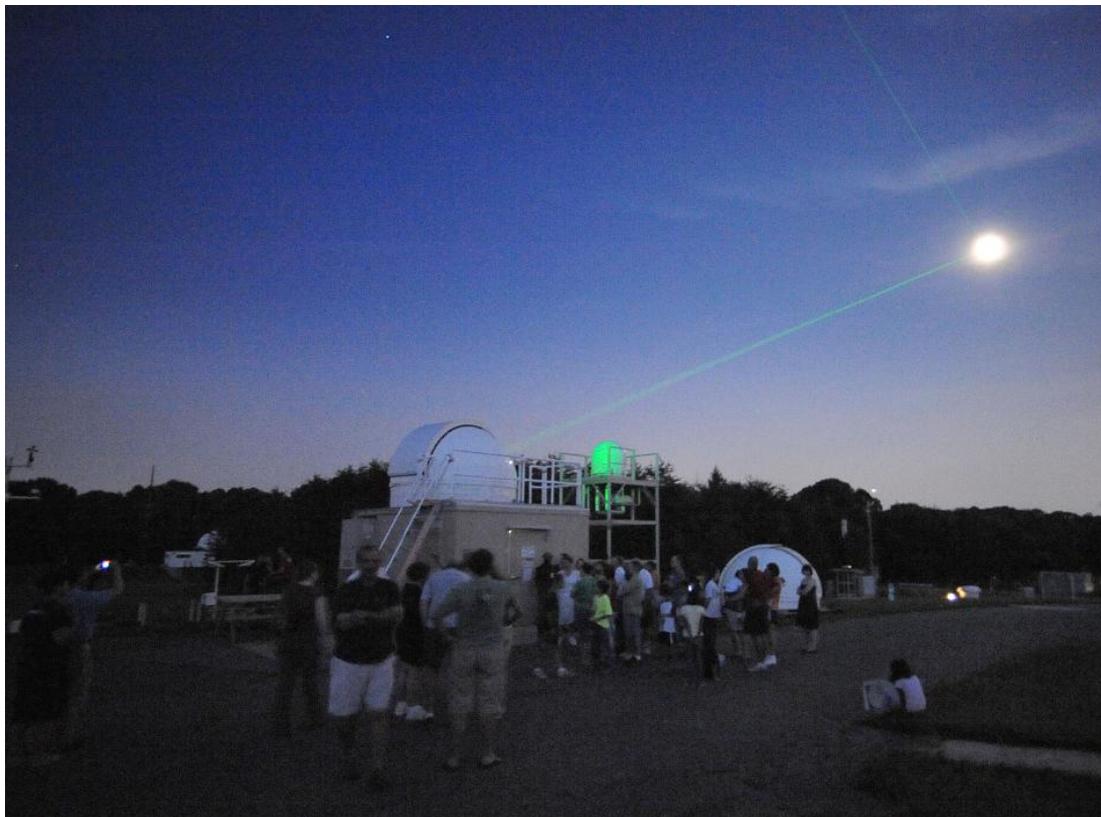
$$\vec{a} = \left(\frac{m_G}{m_I} \right) \vec{g}$$

Se

$$\mathbf{m}_I = \mathbf{m}_G$$

tutti i corpi si muovono in un campo gravitazionale con la stessa accelerazione

- La massa inerziale è uguale alla massa gravitazionale
- Galileo (1564-1642)
- Newton (pendoli)
- Eotvos 1889 (10^{-9})
- Dicke 1964 (10^{-11})
- Braginski 1972 (10^{-12})
- Lunar –Laser ranging : l'accelerazione relativa tra la Terra e la Luna verso il Sole e' 5×10^{-13}



Physical Review D, vol 53 n.12, pg 6730, 1996

2018 Microscope satellite mission: (10^{-15})

Sono stati progettati esperimenti futuri che dovrebbero arrivare a precisioni dell'ordine di una parte in 10^{17}

Il principio di equivalenza tra massa inerziale e massa gravitazionale poggia dunque su basi sperimentali molto solide.

FINE PRIMA LEZIONE

Successi della teoria newtoniana

Moto della luna e maree

Moto dei pianeti

Predizione (1846 Adams e Le Verrier) e scoperta di Nettuno qualche anno dopo

Primi dubbi 'osservativi'

Le Verrier, 1845 scopre anomalie nel moto di Mercurio

**1885 Newcomb conferma: il perielio precede di
43secondi di arco ogni 100 anni**

1859 Le Verrier: un pianeta tra Mercurio e il Sole potrebbe spiegare l'anomalia?

1896 Seelinger: una distribuzione ellissoidale di materia attorno al Sole potrebbe spiegare l'anomalia

etc etc

**Obiezioni filosofiche: la teoria di Newton prevede l'esistenza dei riferimenti inerziali, rispetto a cui valgono le leggi della meccanica
Ma cosa li definisce?**

Newton: esiste uno spazio assoluto rispetto a cui i riferimenti inerziali sono in moto rettilineo uniforme

Leibniz (1646-1716), Mach (1838-1916)

: lo spazio assoluto non è necessario

**Nel 1864 Maxwell formula la teoria dell'elettrodinamica:
La velocità della luce è una costante universale!**

Maxwell: esiste l'etere

Michelson e Morley (1887): l'etere non esiste

Le nuove equazioni non sono invarianti rispetto alle trasformazioni di Galileo, ma lo sono rispetto a quelle di Lorentz (Einstein 1905)

PROBLEMA: cosa fare delle equazioni della gravità?

Consideriamo un corpo che si muove in un campo gravitazionale **costante e uniforme**.
Supponiamo per semplicità che sia soggetto solo alla forza di gravità

$$m_I \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = m_G \vec{g}$$

OSERVAZIONE DI EINSTEIN: Supponiamo di saltare su un ascensore che sta cadendo liberamente nello stesso campo gravitazionale, cioè facciamo la seguente trasformazione di coordinate

$$\vec{x}' = \vec{x} - \frac{1}{2} \vec{g} t^2, \quad t' = t$$

Nel riferimento solidale con l'ascensore il corpo avrà la seguente accelerazione

$$m_I \left\{ \frac{d^2}{dt^2} \left[\vec{x}' + \frac{1}{2} \vec{g} t^2 \right] \right\} = m_G \vec{g} \quad \rightarrow \quad \frac{d^2 \vec{x}'}{dt^2} = 0$$

NOTARE CHE: questo risultato segue da

- 1) **g è costante e uniforme**
- 2) **m_I = m_G**

Osservazione di Einstein: se salgo su un ascensore che cade liberamente un corpo in quiete rimane in quiete

dunque questo è un riferimento
localmente inerziale

Perché localmente? - **g** deve essere costante e uniforme

Poter definire un riferimento in cui è possibile eliminare, nella stessa maniera per tutti i corpi, il campo gravitazionale, è un proprietà esclusiva del campo gravitazionale.

Inoltre e' necessario che sia verificato il Principio di Equivalenza

Non è vero per esempio per la forza elettrica!

$$m_I \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = q \vec{E} \rightarrow \vec{a}_{el} = \frac{q}{m_I} \vec{E}$$

supponiamo che il campo elettrico \vec{E} sia costante e uniforme

passiamo al sistema di riferimento:

$$\vec{x}' = \vec{x} - \frac{1}{2} \vec{a}_{el} t^2$$

$$m_I \left\{ \frac{d^2}{dt^2} \left[\vec{x}' + \frac{1}{2} \vec{a}_{el} t^2 \right] \right\} = q \vec{E} \rightarrow \frac{d^2 \vec{x}'}{dt^2} = 0$$

in questo riferimento l'effetto del campo elettrico è annullato, però il rapporto q/m_I non è lo stesso per tutti i corpi!!

Principio di equivalenza in forma FORTE: In un campo gravitazionale arbitrario, in qualsiasi punto dello **spaziotempo** possiamo scegliere un **referimento localmente inerziale**

tale che, in un intorno sufficientemente piccolo del punto, **TUTTE** le leggi della fisica assumono la stessa forma che hanno in assenza di gravità, cioè hanno la forma che è prevista dalla **Relatività Speciale**

$$ds^2 = -(d\xi^0)^2 + (d\xi^1)^2 + (d\xi^2)^2 + (d\xi^3)^2$$

Principio di equivalenza in forma DEBOLE: Lo stesso di prima, ma si riferisce alle **sole leggi del moto dei corpi**, invece che a tutte le leggi fisiche

Il principio di equivalenza assomiglia molto all'assioma in base al quale Gauss seleziona le geometrie non-euclidee: in ogni punto dello **spazio** e' possibile scegliere un referimento **localmente euclideo**, in cui la distanza tra due punti è data dal **teorema di Pitagora**

$$ds^2 = (d\xi^1)^2 + (d\xi^2)^2$$

Ci aspettiamo che il tensore metrico abbia qualcosa a che vedere con il campo gravitazionale: qual e' la relazione?

**Per semplicità', d'ora in avanti chiameremo i
riferimenti localmente inerziali**

LIF

Locally Inertial Frames

Equazione delle geodetiche come conseguenza del Principio di Equivalenza

Voglio trovare l'equazione del moto di una particella in caduta libera in un campo gravitazionale

In un LIF una particella libera (cioè soggetta alle sole forze gravitazionali) ha equazione

$$\frac{d^2 \xi^\alpha}{d\tau^2} = 0 \quad \tau \text{ e' il tempo proprio}$$

Questa è l'equazione delle geodetiche in un riferimento arbitrario

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \left[\frac{dx^\mu}{d\tau} \cdot \frac{dx^\nu}{d\tau} \right] = 0$$

$$\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \xi^\lambda} \cdot \frac{\partial^2 \xi^\lambda}{\partial x^\mu \partial x^\nu}$$

Simboli di Christoffel o Connessioni Affini

$$g_{11} = \left[\left(\frac{\partial \xi^1}{\partial x^1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi^2}{\partial x^1} \right)^2 \right] + \dots$$

$$g_{22} = \left[\left(\frac{\partial \xi^1}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi^2}{\partial x^2} \right)^2 \right] + \dots$$

$$g_{12} = \left[\left(\frac{\partial \xi^1}{\partial x^1} \right) \left(\frac{\partial \xi^1}{\partial x^2} \right) + \left(\frac{\partial \xi^2}{\partial x^1} \right) \left(\frac{\partial \xi^2}{\partial x^2} \right) \right] + \dots$$

$$g_{21} = g_{12}$$

+ le altre componenti

Le componenti del tensore metrico contengono le derivate prime delle coordinate 'localmente euclidee' rispetto alle coordinate generiche

Simboli di Christoffel o Connessioni Affini

Contengono le derivate del tensore metrico

$g_{\alpha\beta}$

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \xi^{\lambda}} \cdot \frac{\partial^2 \xi^{\lambda}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}}$$

Quindi: nei "nostri" spazi localmente Minkowskiani, le componenti del tensore metrico contengono le derivate prime delle coordinate localmente Minkowskiane rispetto alle coordinate generiche, e i simboli di Christoffel contengono le derivate seconde, cioè le derivate prime del tensore metrico

Ma qual e' il significato fisico del termine in $\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}$?

In un LIF (rif. localmente inerziale) una particella libera ha equazione

$$\frac{d^2 \xi^{\alpha}}{d\tau^2} = 0$$

In un rif. arbitrario: forza di gravita' + forze inerziali

$$\frac{d^2 x^{\alpha}}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} \left[\frac{dx^{\mu}}{d\tau} \cdot \frac{dx^{\nu}}{d\tau} \right] = 0$$

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} \left[\frac{dx^{\mu}}{d\tau} \cdot \frac{dx^{\nu}}{d\tau} \right]$$

In assenza di forze inerziali, in teoria newtoniana questo termine sarebbe il campo gravitazionale, che e' a sua volta il gradiente del potenziale gravitazionale

Le connessioni affini sono la generalizzazione del campo grav. newtoniano, il tensore metrico generalizza il potenziale Newtoniano

SOMMARIO:

Il principio di equivalenza stabilisce che in ogni punto e' sempre possibile trovare un rif. in cui, **localmente**, le leggi della fisica sono quelle della Relatività Speciale, e in cui lo spaziotempo è descritto dal tensore metrico di Minkowski, cioè è **piatto**

$$\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1,1,1,1)$$

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} d\xi^\mu d\xi^\nu = -d\xi_0^2 + d\xi_1^2 + d\xi_2^2 + d\xi_3^2$$

$$\frac{d\xi^2}{d\tau^2} = 0$$

Se cambio riferimento $ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$ $g_{\alpha\beta} = \eta_{\mu\nu} \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\beta}$

Dall'eq. delle geodetiche $\frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \left[\frac{dx^\mu}{d\tau} \cdot \frac{dx^\nu}{d\tau} \right] = 0$

segue che il potenziale gravitazionale è descritto dal **Tensore metrico**:
ecco perché abbiamo bisogno di un tensore

$g_{\alpha\beta}$ ha un duplice ruolo: **geometrico** (distanza) e **fisico** (potenziale grav.)

Dato il tensore $g_{\alpha\beta}$ e le sue derivate prime, cioè

le connessioni affini $\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}$ in un punto X , possiamo sempre determinare un riferimento localmente inerziale nell'intorno del punto

Inoltre, abbiamo sempre la libertà di fare una trasformazione di Lorentz e il nuovo riferimento sarà ancora
localmente inerziale

FINE SECONDA LEZIONE

SPAZI TOPOLOGICI: topologia locale (a cui siamo interessati)
topologia globale (proprietà a larga scala,
come quelle che distinguono una sfera da un cono)

Nozioni preliminari: sia \mathbb{R}^n lo spazio n-dimensionale dell'algebra vettoriale

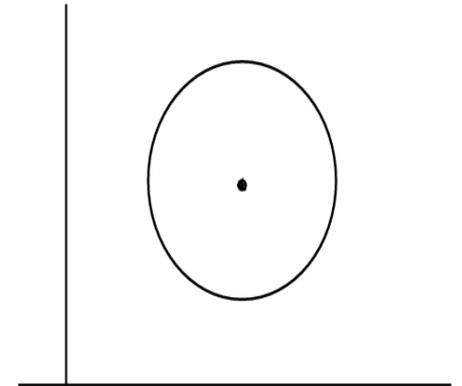
Un punto in \mathbb{R}^n è una n-pla di numeri reali $(x^1, x^2 \dots x^n)$

Insiemi aperti: dato un punto $y=(y^1, y^2 \dots y^n)$, un insieme aperto è l'insieme dei punti x tali che

$$|x - y| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x^i - y^i)^2} < r \quad r = \text{numero reale}$$

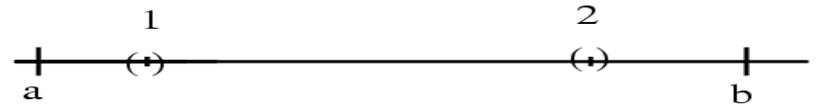
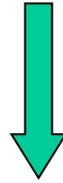
Un insieme aperto include i punti interni ma **NON** il bordo

Un set di punti S è aperto se ogni $x \in S$ ha un intorno interamente contenuto in S



Abbiamo un'idea intuitiva di **spazio continuo**: dato un punto di \mathbb{R}^n e' sempre possibile trovare punti di \mathbb{R}^n arbitrariamente vicini ad esso; inoltre una linea che congiunge due punti di \mathbb{R}^n puo' essere divisa in infiniti segmenti che uniscono ancora punti di \mathbb{R}^n

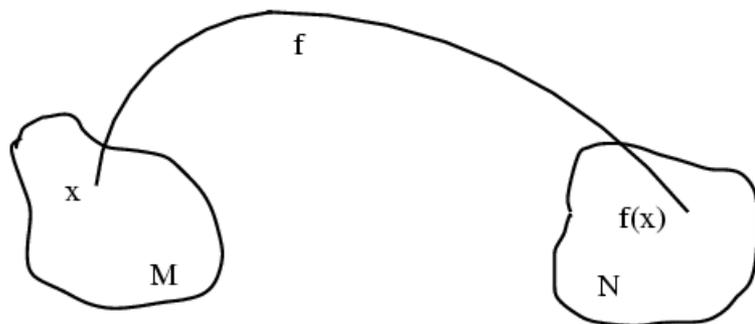
Proprieta' di Hausdorff di \mathbb{R}^n : presi due punti qualsiasi, questi avranno intorno che non si intersecano



Uno **SPAZIO TOPOLOGICO** e' un insieme di punti che soddisfano le seguenti proprieta':

- 1) Se O_1 e O_2 sono due insiemi aperti, la loro intersezione e' un insieme aperto
- 2) l'unione di insiemi aperti e' un insieme aperto

Una mappa f da uno spazio M a uno spazio N e' una regola che associa a ogni elemento $\mathbf{x} \in M$ un unico elemento di N $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$



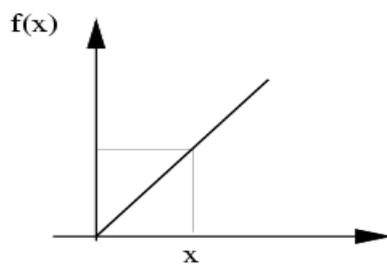
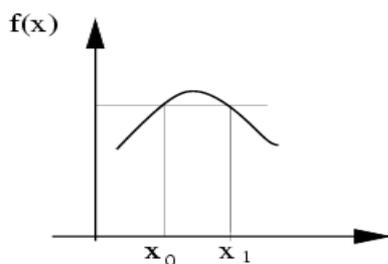
M e N non sono necessariamente diversi

ESEMPIO: $\mathbf{y} = \mathbf{x}^3$, $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^1$ e $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^1$

$\forall \mathbf{x}$ una mappa da' un unico $f(\mathbf{x})$ ma non e' necessariamente vero il viceversa

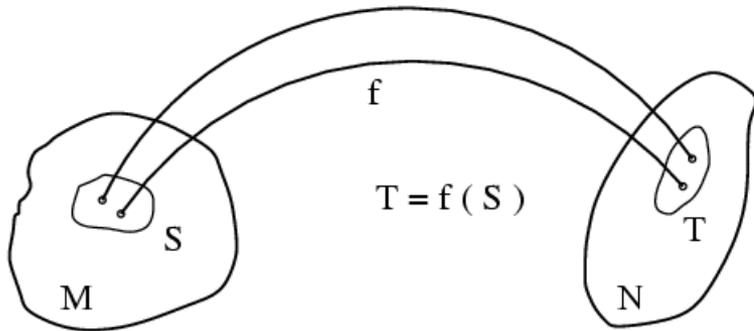
mappa 'molti a uno'

mappa 'uno a uno'



Se f e' una mappa da M a N , per ogni insieme $S \in M$ ci sara' un' *immagine* $T \in N$,

cioe' l'insieme di tutti i punti che f mappa da S su N



S e' l'*immagine inversa* di T

$$S = f^{-1}(T)$$

la mappa inversa e' possibile solo se la mappa e' **'uno a uno'**

f mappa M su N ,



$f : M \longrightarrow N$,

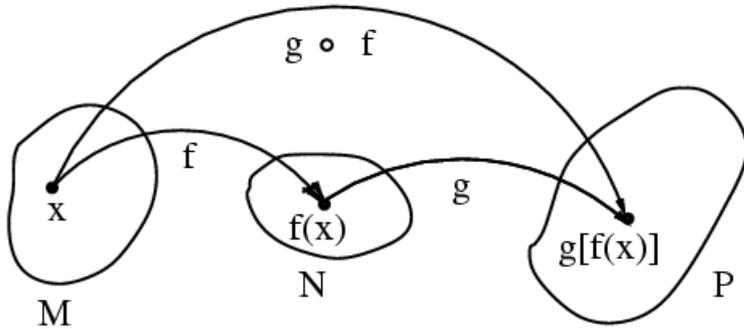
f mappa un punto $x \in M$ su $y \in N$,



$f : x \mid \longrightarrow y$

COMPOSIZIONE DI MAPPE

Date due mappe



$$f : M \longrightarrow N,$$

$$g : N \longrightarrow P,$$

Esiste una mappa $g \circ f$ che mappa i punti di M su P

$$g \circ f : M \longrightarrow P$$

ESEMPIO:

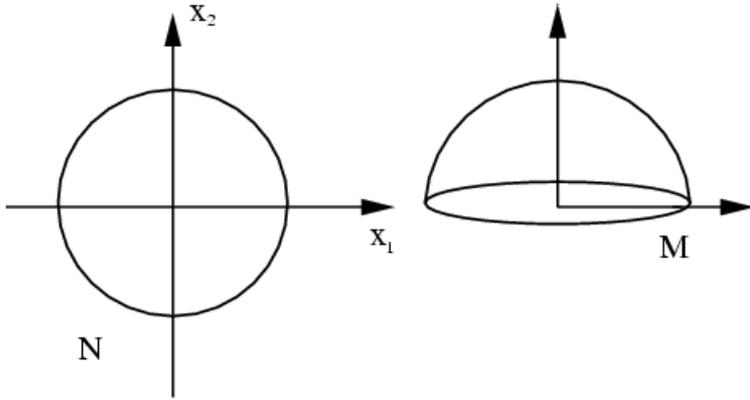
$$f : x \mid \longrightarrow y \qquad y = x^3,$$

$$g : y \mid \longrightarrow z \qquad z = y^2,$$

$$g \circ f : x \mid \longrightarrow z \qquad z = x^6,$$

Mappa di M in (into) N : se è definita per tutti i punti di M (l'immagine di M è contenuta in N)

Mappa di M su (onto) N : se, in più, ogni punto di N ha un'immagine inversa in M (non necessariamente unica)



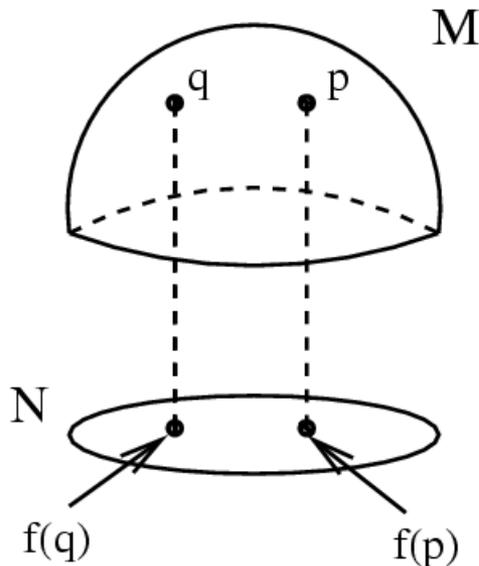
ESEMPIO:

Sia N l'insieme aperto di \mathbb{R}^2

$$x_1^2 + x_2^2 < 1$$

Sia M la superficie di una semisfera appartenente alla sfera unitaria

$$\theta < \frac{\pi}{2}$$



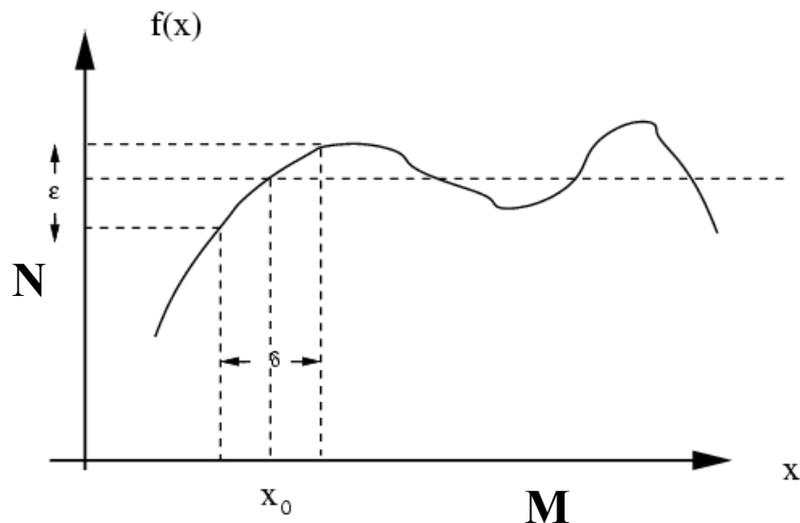
ESISTE un mapping uno-a-uno

***f* di M su N**

Una mappa $f : M \longrightarrow N$,

e' continua in $x \in M$, se qualsiasi insieme aperto di N che contiene $f(x)$, contiene l'immagine di un aperto di M

M e N devono essere spazi topologici, altrimenti la nozione di mappa continua non ha senso



definizione dal calcolo elementare: f è continua in x_0 se, per ogni $\epsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che per ogni

$$|x - x_0| < \delta$$

si abbia

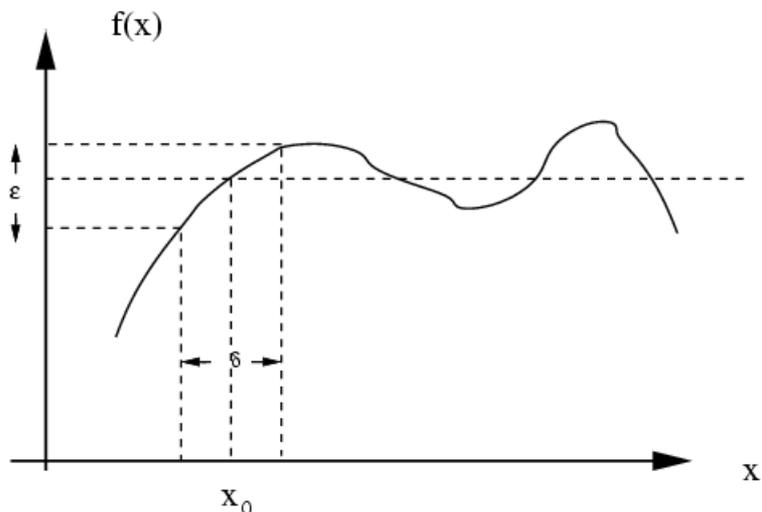
$$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

con ϵ e δ piccoli a piacere

Una mappa $f : M \longrightarrow N$,

e' continua in $x \in M$, se qualsiasi insieme aperto di N che contiene $f(x)$, contiene l'immagine di un aperto di M

M e N devono essere spazi topologici, altrimenti la nozione di mappa continua non ha senso



Questa definizione e' piu' generale di quella che impariamo a analisi I perche' non pone limitazioni su ε e su δ ed e' basata sul concetto di aperto

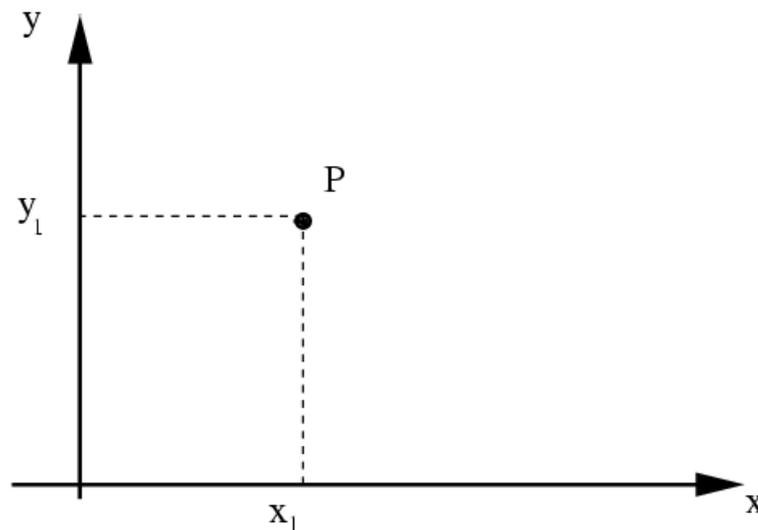
Una mappa si dice differenziabile di classe C^k , se $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ e' una funzione, definita in un aperto di $S \in R^n$, continua con le sue derivate di ordine minore o uguale a k

La nozione di MANIFOLD e' cruciale per definire un sistema di coordinate:

Un MANIFOLD e' uno spazio topologico M che gode della proprieta' di Hausdorff, tale che ciascun punto di M ha un intorno aperto che ammette **una mappa 1-1** continua SU (ONTO) un insieme aperto di \mathbf{R}^n , dove n e' la dimensione del manifold

(ricordare che un punto in \mathbf{R}^n e' una n -pla di numeri reali $(x^1, x^2 \dots x^n)$)

prendiamo un punto P e lo mappiamo sul punto $(x^1, y^1) \in \mathbf{R}^2$ e questa operazione puo' essere fatta per ogni intorno di P



Quindi un manifold deve essere:

- uno spazio topologico continuo
- e a ciascun punto associamo una n -pla di numeri reali, cioe' **un sistema di coordinate**

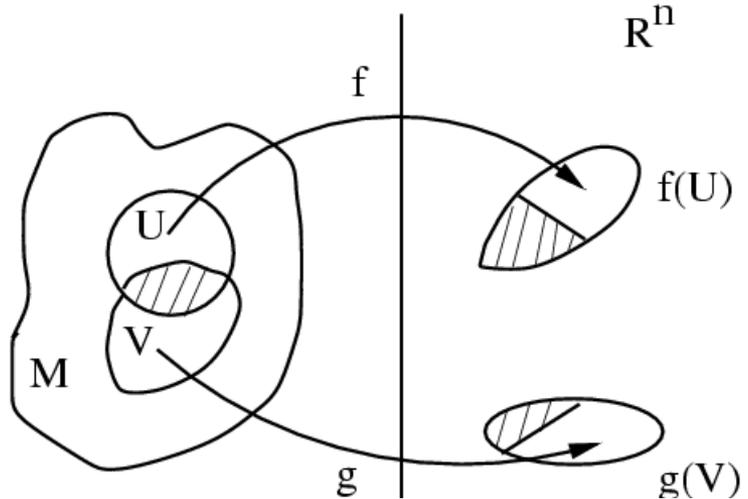
Attenzione: la definizione di MANIFOLD riguarda solo insiemi aperti di M e di \mathbf{R}^n , perche' non vogliamo restringere la topologia globale di M

**Attenzione: non abbiamo ancora introdotto
NESSUNA nozione geometrica (angoli,
lunghezze etc.)**

**L'unica condizione che stiamo imponendo e' che
la topologia locale di M sia la stessa di \mathbb{R}^n**

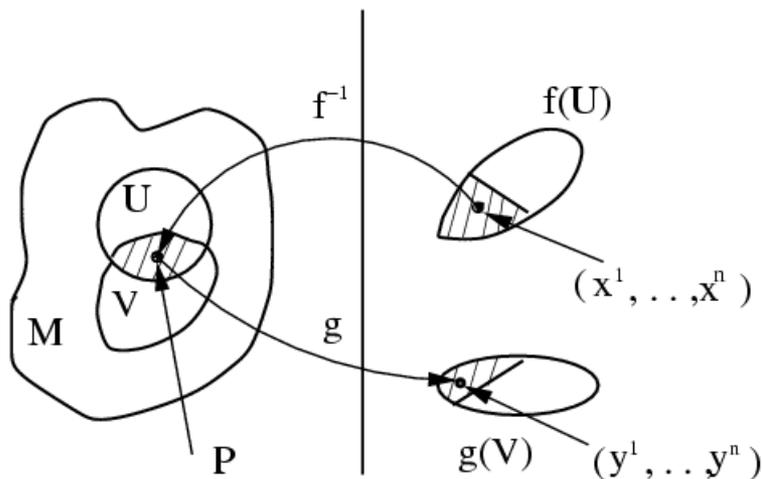
Definizione di sistema di coordinate:

E' una coppia formata da un aperto di M e la sua mappa su un aperto di \mathbb{R}^n ; tali aperti non includono necessariamente TUTTO M



Per esempio, (U, f) e (V, g) sono due distinti sistemi di coordinate o carte

$U \cap V$ e' un aperto (intersezione di due aperti) e corrisponde a due diversi sistemi di coord. **Quindi deve esserci una relazione tra i due!**



- Prendo un punto nell'immagine di $U \cap V$ sotto la mappa f
- la mappa f ha un'inversa f^{-1} che porta in P
- usando la mappa g vado nell'immagine di $U \cap V$ sotto il mapping g

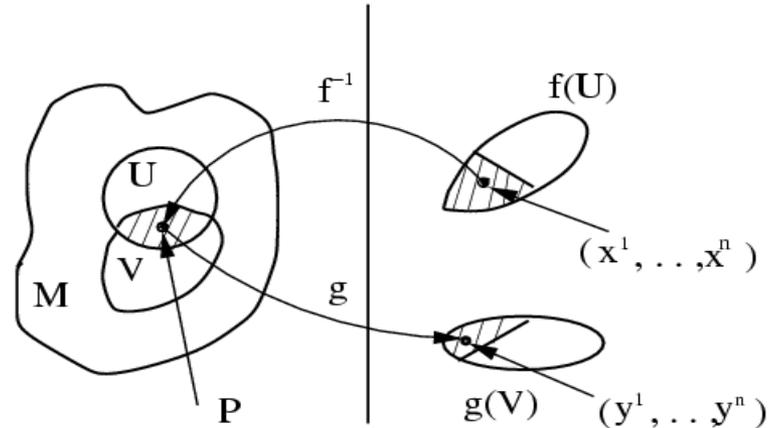
$$g \circ f^{-1} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

Trasformazione di coordinate

$$g \circ f^{-1} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

Il risultato di questa operazione e' una relazione funzionale tra i due sistemi di coordinate

$$\begin{cases} y^1 = y^1(x^1, \dots, x^n) \\ \dots \\ \dots \\ y^n = y^n(x^1, \dots, x^n) \end{cases}$$



Se le funzioni $\{y^i\}$ sono differenziabili fino all'ordine k , allora tra le carte (U, f) e (V, g) si dice che c'e' una relazione di classe C^k

Se si puo' costruire un sistema di carte tale che ciascun punto di M appartenga almeno a un aperto di M , e se tra tutte le carte c'e' una relazione di classe C^k allora il MANIFOLD e' di classe C^k

Se $k=1$ il MANIFOLD si dice DIFFERENZIABILE

La nozione di **VARIETÀ (o MANIFOLD) DIFFERENZIABILE** è importante perché consente di aggiungere “**strutture**” alla varietà, cioè’ possiamo definire vettori, tensori, forme differenziali ecc.

Per completare la definizione di trasformazione di coordinate:

date $y^i = y^i(x^1, \dots, x^n)$ Se lo **Jacobiano** della trasformazione

$$J = \frac{\partial(y^1, \dots, y^n)}{\partial(x^1, \dots, x^n)} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial y^1}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial y^1}{\partial x^n} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \frac{\partial y^n}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial y^n}{\partial x^n} \end{pmatrix}$$

è **NON NULLO** in un punto P, allora il teorema della funzione inversa assicura che la mappa f è 1-1 e **SU** un intorno di P.

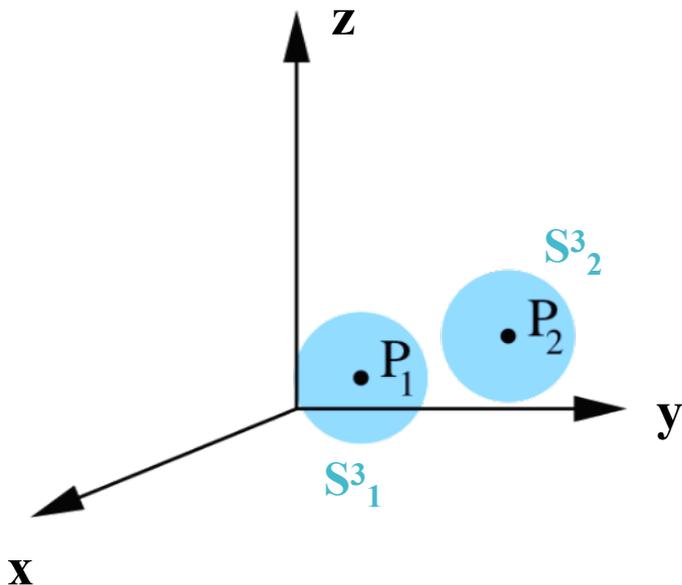
Se $J=0$ la trasformazione e' singolare

la 2-sfera S^2 è un esempio di varietà differenziabile; se consideriamo la sua immersione nello spazio a tre dimensioni, è l'insieme dei punti di \mathbb{R}^3 tali che

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = r^2\}$$

Vediamo se S^2 è una varietà differenziale.

Per prima cosa deve essere uno spazio continuo, quindi deve verificare il criterio di Hausdorff: ogni coppia di punti ammette intorni disgiunti



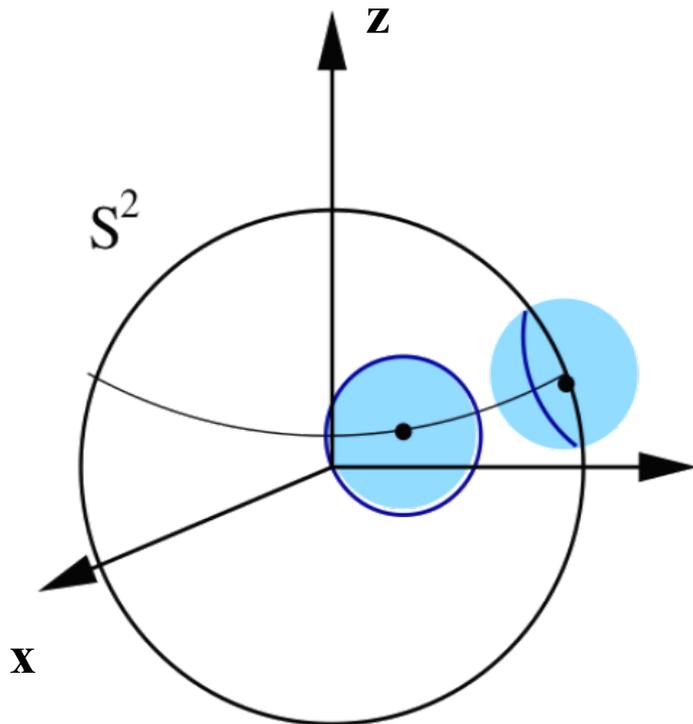
consideriamo due punti dello spazio continuo 3D: comunque siano vicini, essi ammettono sempre due intorni aperti disgiunti, le sfere piene in celeste che chiameremo S^3_1 e S^3_2

la 2-sfera S^2 è un esempio di varietà differenziale; se consideriamo la sua immersione nello spazio a tre dimensioni, è l'insieme dei punti di \mathbb{R}^3 tali che

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = r^2\}$$

Vediamo se S^2 è una varietà differenziale.

Per prima cosa deve essere uno spazio continuo, quindi deve verificare il criterio di Hausdorff: ogni coppia di punti ammette interni disgiunti



consideriamo due punti dello spazio continuo 3D: comunque siano vicini, essi ammettono sempre due interni aperti disgiunti, le sfere piene in celeste che chiameremo S^3_1 e S^3_2

supponiamo che i due punti P_1 e P_2 appartengano alla 2-sfera S^2 : le intersezioni tra gli aperti S^3_1 e S^3_2 e la sfera S^2 , sono i due aperti S^2_1 e S^2_2

(le due calotte sferiche di cui la linea blu è il bordo) che per costruzione sono anch'essi disgiunti.

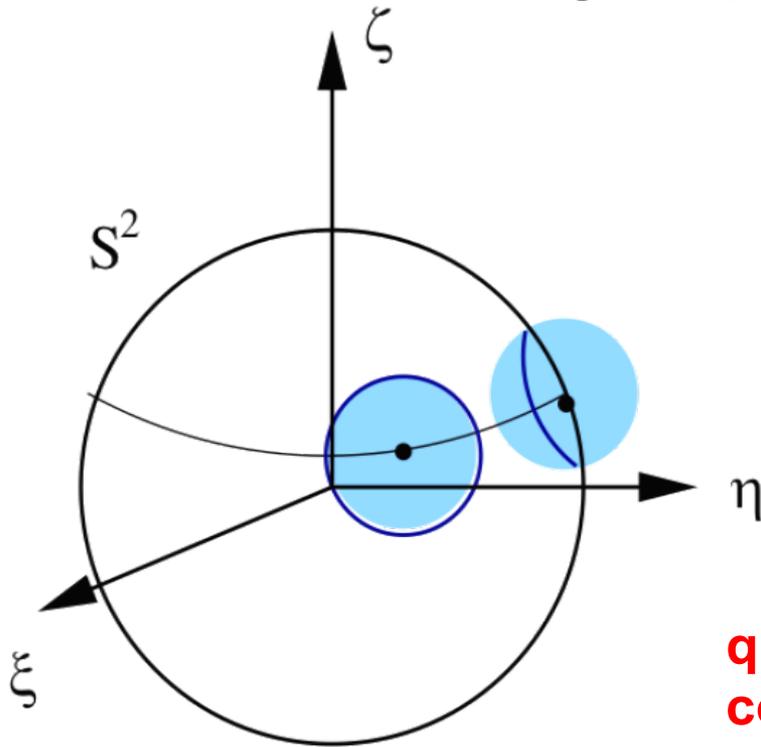
quindi S^2 è uno spazio bidimensionale continuo

la 2-sfera S^2 è un esempio di varietà differenziale; se consideriamo la sua immersione nello spazio a tre dimensioni, è l'insieme dei punti di \mathbb{R}^3 tali che

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = r^2\}$$

Vediamo se S^2 è una varietà differenziale.

Per prima cosa deve essere uno spazio continuo, quindi deve verificare il criterio di Hausdorff: ogni coppia di punti ammette interni disgiunti



consideriamo due punti dello spazio continuo 3D: comunque siano vicini, essi ammettono sempre due interni aperti disgiunti, le sfere piene in celeste che chiameremo S^3_1 e S^3_2

supponiamo che i due punti P_1 e P_2 appartengano alla 2-sfera S^2 : le intersezioni tra gli aperti S^3_1 e S^3_2 e la sfera S^2 , sono i due aperti S^2_1 e S^2_2 (le due calotte sferiche di cui la linea blu è il bordo) che per costruzione sono anch'essi disgiunti.

quindi S^2 è uno spazio bidimensionale continuo

Dopo aver verificato che S^2 è uno spazio continuo, dobbiamo verificare se è possibile definire un insieme di mappe che ricoprono la varietà (insieme detto atlante) e tali che il cambiamento di coordinate fra una mappa e l'altra sia invertibile e differenziabile (vale a dire sia un diffeomorfismo)

Consideriamo la 2-sfera S^2 :

insieme dei punti di \mathbb{R}^3 tali che

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = \cos t$$

**Supponiamo di voler “mappare” la sfera su \mathbb{R}^2 usando una sola carta,
per es. se usiamo coord. sferiche**

$$\theta = x^1, \quad \varphi = x^2$$

Supponiamo che la sfera venga mappata sul rettangolo

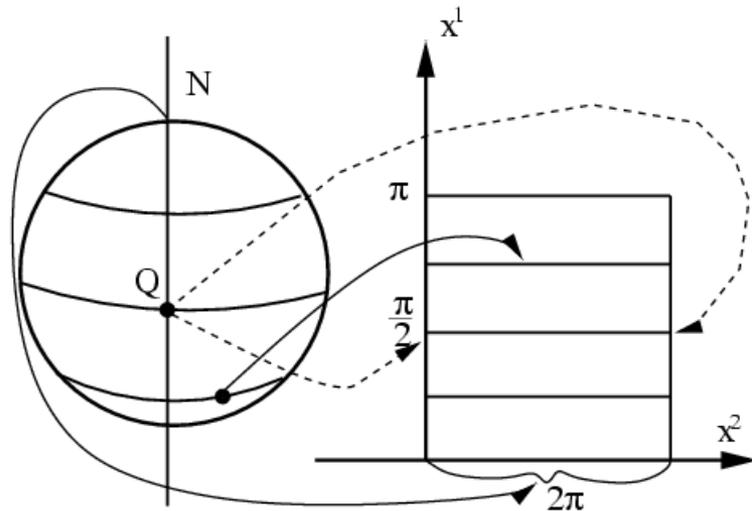
$$0 \leq x^1 \leq \pi, \quad 0 \leq x^2 \leq 2\pi$$

Il polo nord e' mappato sulla linea

$$x^1 = 0, \quad 0 \leq x^2 \leq 2\pi$$

Quindi la mappa non esiste!

**Inoltre, tutti i punti del semicerchio $\varphi = 0$
corrispondono sia a $x^2=0$ che a $x^2=2\pi$**



**Per evitare questi problemi dobbiamo
limitare il mapping a insiemi aperti**

Di nuovo la mappa non esiste!

$$0 < x^1 < \pi, \quad 0 < x^2 < 2\pi$$

Non possiamo coprire la sfera con una sola carta