Nome: Cognome: Matricola

Esercizio 1 Una barca attraversa un fiume, che scorre in direzione x, come mostrato in figura, partendo da ferma dal punto A. La barca punta verso la riga opposta ma, a causa della corrente del fiume, arriverà nel punto indicato con C in figura. Nella direzione y il motore assicura alla barca una velocità (dunque rispetto all riva) costante, nota e pari a V_y, mentre la sola velocità nella direzione x è quella della corrente che, sempre rispetto alla riva, vale $V_x = (L \cdot y - y^2)/K$, con K noto. Dunque la corrente del fiume varia con la coordinata y. Il fiume è largo L, noto. Determinare:

a) il tempo che la barca impiega ad arrivare in C $T =$ __________
b) di quanto la barca viene spostata sulla direzione x, $\bar{BC} =$ __________

Dati: L=280 m; $V_y = 3$ m/s; $K = 2.5 \cdot 10^3$ m·s.

Esercizio 2 Un' asta rigida ed omogenea di legno, di lunghezza h e massa M, è disposta orizzontalmente, come indicato in figura. Essa può ruotare senza attrito attorno ad un asse verticale z passante per il suo centro geometrico C. L' asta, inizialmente in quiete, viene colpita ad un estremo da un proiettile di massa m, che viaggia con velocità orizzontale V_p , perpendicolare rispetto all' asta. Il proiettile rimane conficcato nell' asta. Il momento di inerzia dell'asta rispetto al suo centro di massa vale $I_{CM} = \frac{1}{12} M\, h^2$. Determinare:

a) la velocità angolare con cui il sistema inizia a ruotare $\omega =$ __________
b) la variazione complessiva della quantità di moto nel processo di urto $\Delta \vec{p} =$ __________

Dati: $M = 2$ kg; $h = 1.5$ m; $m = 400$ grammi; $V_p = 10$ m/s.

Esercizio 3 Un positrone entra, attraverso un forellino, all' interno di condensatore piano le cui armature sono distanti fra loro d. All' interno del condensatore si ha un materiale dielettrico di costante dielettrica relativa nota. La sua velocità iniziale vale v_i ed è ortogonale alle armature del condensatore, come indicato in figura. Il positrone esce poi da un altro piccolo foro praticato nella armatura opposta a quella di ingresso. La sua energia cinetica quando sta per uscire è nota, E_u. Determinare, trascurando l' effetto della forza di gravità sul positrone:

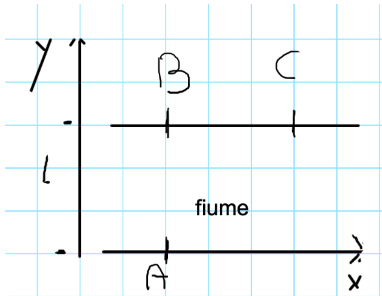
a) il vettore campo elettrico del condensatore $\vec{E} =$ __________
b) la densità di carica presente sulle armature del condensatore $\sigma =$ __________

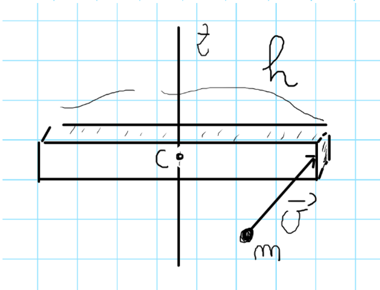
$e = +1.60 \times 10^{-19}$ C, $m_e = 9.11 \times 10^{-31}$ kg, $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$ F/m.
Dati: d= 5.00 cm; $\epsilon_r = 1.8$; $v_i = 3.00 \times 10^6$ m/s; $E_u = 1.40 \times 10^{-18}$ J.

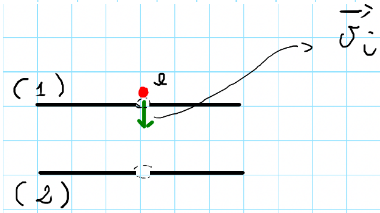
Esercizio 4 Un gas perfetto è in equilibrio all' interno di un contenitore cilindrico di sezione S, chiuso superiormente da un pistone di massa m e sezione sempre S, che può scorrere senza attrito in direzione verticale. Sul pistone è inizialmente posato un blocco di massa M, come mostrato nella figura, caso (a). Nessuno scambio termico è possibile fra l' interno e l' esterno del cilindro. La pressione esterna è mantenuta costante, è molto inferiore a quella atmosferica e vale p_E. Il blocco viene improvvisamente rimosso e si raggiunge un nuovo stato di equilibrio, come mostrato in figura, caso (b), in cui si osserva che il pistone si è alzato di h. Si determini:

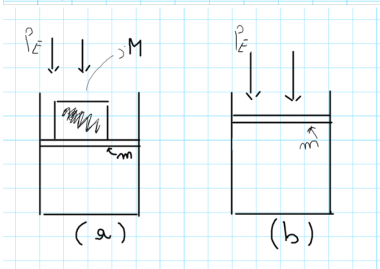
a) la variazione di energia interna fra lo stato (b) e lo stato (a) $\Delta U = U_b - U_a =$ __________
b) La differenza di pressione del gas fra lo stato (b) e lo stato (a) in figura $p_b - p_a =$ __________

Si nota che non è dato il tipo di gas e neanche il numero di moli. E non serve neanche conoscere la costante dei gas, per rispondere alle domande poste.
Dati: m=2.0 kg, $S = 20$ cm^2, $M = 24 \cdot m$, $p_E = 10^3$ Pa, $h = 50$ cm.


y
B
C
l
fiume
A
x


z
h
C
m


(1)
(2)


M
m
(a)
(b)

Soluzioni Compito

Soluzione Esercizio 1. Compito

La corrente trascina la barca lungo la direzione x, ma il tempo che la barca impiega ad attraversare il fiume dipende ovviamente solo dalla componente y della velocità complessiva e pertanto da quella che il motore garantisce alla barca.
a) Pertanto: $T = \frac{L}{V_y}$= 93.3 secondi, ossia 1' 33.3".
b) La dipendenza della velocità della corrente V_x da y fa si che per ottenere lo spostamento su x si debba usare la relazione integrale fra spostamento e velocità. La velocità al tempo iniziale è nulla. Pertanto abbiamo: $x(t) = \int_0^T V_x\, dt$=$\frac{\int_0^T (L \cdot y - y^2)\, dt}{K}$, dove sostituiamo al posto di y la sua dipendenza dal tempo: $y = V_y \cdot t$. Eseguendo l' integrale e sostituendo a $T = \frac{L}{V_y}$ si ottiene: $x(T) = \bar{BC} = \frac{L^3}{6\, K \cdot V_y}$ = 487.8 m.

Soluzione Esercizio 2. Compito

Nell' urto si conserva il momento della quantità di moto rispetto all' asse z, ma non la quantità di moto in quanto siamo in presenza di forze esterne., in particolare la reazione impulsiva dell' asse di rotazione. Queste hanno però momento nullo rispetto all' asse z, che vincola il sistema.
Il momento della quantità di moto iniziale è quello del proiettile e riferendoci a C, vale: $m \cdot V_p \cdot \frac{h}{2}$.
Il momento della quantità di moto finale sarà pari a $I_{TOT} \cdot \omega$, con $I_{TOT} = \frac{1}{12} M \cdot h^2 + \frac{1}{4} m \cdot h^2$.
Da qui sia ha: $m \cdot V_p \frac{h}{2} = (\frac{1}{12} M \cdot h^2 + \frac{1}{4} m \cdot h^2) \cdot \omega$ e dunque:
$\omega = \frac{mV_p}{\frac{1}{6} Mh + \frac{1}{2} mh}$= $\frac{6mV_p}{h(M+3m)}$= 5.00 rad/s.
b) La quantità di moto del sistema passa da $p_1 = m \cdot V_p$=4.00 kg·m/s a $p_2 = m \cdot \omega \cdot \frac{h}{2}$ 1.50 kg·m/s in quanto è sempre solo il proiettile ad avere quantità di moto non nulla, perchè il centro di massa dell' asta ha sempre velocità nulla. Si nota che che $p_2 < p_1$, come deve essere. Dunque $\Delta\vec{p} = -2.50\,\hat{x}$ kg·m/s, avendo indicato l' asse orizzontale con $\hat{x}$.
I valori numerici del momento di inerzia sono: $I_{CM} = 0.375$ kg $\cdot$ m^2; $I_{TOT} = 0.6$ kg $\cdot$ m^2.
Notiamo, anche se non era richiesto in questo esercizio, che l' energia cinetica si dissipa. Abbiamo $\Delta E = \frac{1}{2} I_{TOT} \omega^2 - \frac{1}{2} m V_p^2$ = 7.5-20 joule= -12.5 joule.

Soluzione Esercizio 3. Compito

a) Per determinare il campo elettrico dobbiamo calcolare il lavoro fatto dal campo quando il positrone passa dall' armatura di ingresso (1) a quella di uscita (2). Essendo la forza elettrostatica l' unica presente, possiamo scrivere: $L_E = K_2 - K_1$, dove K_2, K_1 rappresentano l' energia cinetica del positrone nelle due situazioni. K_2 è nota, mentre va calcolata K_1= $\frac{1}{2} m_e v_i^2 = \frac{1}{2} 9.1 \times 10^{-31} \times (3 \times 10^6)^2$ J = 4.10×10^{-18} J = 25.6 eV
Pertanto $L_E = \Delta K = K_2 - K_1 = -2.70 \times 10^{-18}$ J = -16.8 eV, negativo. Dunque l' energia potenziale del positrone aumenta e poichè la sua carica è positiva il potenziale dell' armatura di uscita è più alto di quello della armatura di ingresso. Pertanto il campo elettrico è diretto verso l' armatura di ingresso, ortogonale alle due armature. Prendiamo l' asse y parallelo al moto del positrone e diretto verso l' armatura di uscita. Abbiamo che campo e spostamento sono fra loro discordi (il positrone infatti rallenta), e:
$L_E = -eEd$. Da cui $E = \frac{L_E}{e\, d} = \frac{2.69 \times 10^{-18}}{1.6 \times 10^{-19} \times 0.05}$ V/m = 337 V/m. Vettorialmente: $\vec{E} = -336.9\hat{y}$ V/m.
b) Ricordando che $E = \frac{\sigma}{\epsilon}$,, con $\epsilon = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r$ si ha: $\sigma = E \times \epsilon = 5.36 \times 10^{-9}$ C/m^2 = 5.36 nC/m^2

Soluzione Esercizio 4 Compito

La rimozione della massa M avviene rapidamente e pertanto, visto che il sistema è isolato termicamente, la trasformazione è una adiabatica irreversibile.
a) Dal primo principio della termodinamica abbiamo dunque che $\Delta U = -L_{gas}$. Non avendo nè il numero di moli, nè il tipo di gas e neanche la variazione di temperatura, non possiamo usare la relazione $\Delta U = nc_v\Delta T$. Dobbiamo calcolare il lavoro con un ragionamento diverso. Il lavoro totale compiuto da tutte le forze in gioco sarà nullo, in quanto il sistema era fermo in (a) e torna fermo in (b). Questo lavoro è pari alla somma del lavoro fatto dall' esterno e di quello fatto dal gas, che pertanto saranno uguali e contrari. Possiamo dunque dire che $L_{gas} = -L_{esterno}$=-$\int_0^h \vec{F} \cdot d\vec{s}$= $(m\, g + p_E\, S)\, h$ essendo le forze in gioco tutte costanti, parallele fra loro e antiparallele allo spostamento. Il lavoro fatto dal gas è positivo, il gas si espande per raggiungere il nuovo stato di equilibrio (come anche indicato nella figura associata). Abbiamo dunque ΔU= - 10.8 joule. Il gas si raffredda in questo processo.
b) La pressione nello stato iniziale valeva $p_a = \frac{(M+m)\cdot g}{S} + p_E$= 2.46$\cdot 10^5$ Pa.
La pressione nello stato finale vale invece: $p_b = \frac{m\cdot g}{S} + p_E$= 0.108$\cdot 10^5$ Pa. Pertanto la differenza di pressione del gas nei due stati vale $\Delta p = p_b - p_a$=-2.35$\cdot 10^5$ Pa. La pressione diminuisce.
Notiamo anche (non richiesto nel problema) che il volume appunto aumenta: $\frac{V_b}{V_a} = \frac{V_a+h\cdot S}{V_a}$. E vediamo che la temperatura diminuisce: $\frac{T_b}{T_a} = \frac{p_b}{p_a}\frac{V_a+h\cdot S}{V_a}$. Si può ad esempio dare un valore al volume iniziale e fare il conto numerico, per convincersene. Supponiamo sia $V_a = 1$ m^3, avremmo $\frac{T_b}{T_a} = \frac{0.108}{2.45}\frac{1+10^-3}{1}$= 0.044.