Scritto straord. 08 Aprile 2026 Fisica. Canale 1.

Nome: **Cognome:** **Matricola**

Esercizio 1

Sia dato un contenitore cilindrico di raggio R e altezza H, pieno di acqua e posto in posizione verticale su di un piano orizzontale. Sulla sua superficie laterale viene fatto un foro circolare di raggio r ad una altezza h dalla base. Sapendo che lo zampillo d'acqua tocca il piano ad una distanza d dal cilindro, determinare:

a) L'altezza del contenitore cilindrico. $H =$ ________

Nel punto in cui lo zampillo tocca il piano si mette una vaschetta di volume pari a V_v . Determinare:

b) quanto tempo occorre aspettare affinchè la vaschetta si riempia d'acqua $\Delta t =$ ________

Dati: $r = 0.25\,\mathrm{cm} \ll R$, $d = 100$ cm, $h = H/2$, $V_v = 1.25\,\mathrm{litri}$. Poichè il diametro del foro è molto piccolo rispetto a quello del cilindro, si consideri costante il livello dell'acqua nel contenitore.

Esercizio 2

Un' asta sottile omogenea, di massa M e lunghezza L, si trova disposta sul piano del foglio, come in figura. E' vincolata a ruotare senza attrito intorno ad un asse ad essa verticale passante per il perno in O. L'asta è inizialmente vincolata al muro tramite una fune ideale inestensibile e di massa trascurabile disposta orizzontalmente e forma con essa un angolo pari ad α. Al tempo iniziale la fune viene tagliata e l'asta ruota fino ad urtare in modo completamente anelastico una pallina puntiforme di massa m posta a riposo sul piano orizzontale. Si ricorda che il momento d' inerzia di un' asta di massa M e lunghezza L rispetto ad un asse passante per un suo estremo e ad essa verticale vale $I_a = ML^2/3$. Determinare:

a) la velocità angolare dell' asta subito prima dell' urto $\omega =$ ________
b) la velocità angolare del sistema asta e pallina subito dopo l' urto $\omega_1 =$ ________

Dati: $M = 2.3$ kg, L=0.7 m,$\alpha = 30^o$, m=0.4 kg

Esercizio 3

Un protone si trova in quiete a una distanza pari a r_1 da un filo rettilineo carico e di lunghezza infinita. Il campo elettrico del filo compie un lavoro noto e pari ad L per portare il protone dalla distanza iniziale alla distanza r_2 dal filo stesso. Determinare:

a) la velocità del protone quando si trova alla distanza r_2 dal filo; $V_P =$ ________
b) la densità lineare di carica del filo, col suo segno $\lambda =$ ________

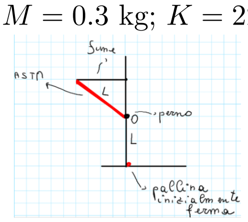
Dati: r_1=40 mm, L=5×10^{-15} J, r_2=20 mm, Si ricorda che la carica del protone vale $e = 1.6 \times 10^{-19}$ C e la sua massa vale $m_p = 1.67 \times 10^{-27}$ kg.
Si ricorda che il valore della costante dielettrica del vuoto vale $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} F/m$

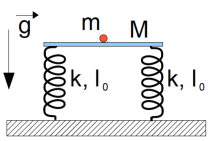
Esercizio 4

Un' asta omogenea di massa M viene fissata la suolo tramite due molle identiche, ciascuna di lunghezza a riposo l_0 e costante elastica K. Al centro dell' asta viene posta a riposo una pallina puntiforme di massa m. La situazione iniziale è indicata in figura. Il sistema viene poi compresso, in modo che le molle abbiano lunghezza nulla e la pallina si trovi a quota $h = 0$ dal pavimento, e il sistema viene lasciato libero di evolvere. Determinare:

a) il valore della altezza alla quale la pallina si inizierà a staccare dall' asta ; $h =$ ________
b) il modulo della velocità della pallina al momento del distacco $v =$ ________

Per rispondere alla domanda a) è necessario determinare l' espressione della reazione vincolare $\vec{R}$ dell' asta sulla pallina.
Dati: $M = 0.3$ kg; $K = 220$ N/m; $l_0 = 0.2$ m; $m = 0.02$ kg.





Soluzioni Compito

Soluzione Esercizio 1

L'altezza a cui viene praticato il foro è $h = H/2$.
a) Il teorema di Bernoulli applicato al punto di fuoriscita dello zampillo e alla superficie superiore del contenitore cilindrico implica:

$$\frac{1}{2}v_F^2\rho + g\rho h + p_{atm} = g\rho H + p_{atm}$$

dove ρ è la densità dell'acqua e p_{atm} è la pressione atmosferica. La velocità con cui il livello dell'acqua scende nel cilindro è piccola (essendo $r \ll R$) ed è stata trascurata, come richiesto dall'enunciato. Segue $v_F = \sqrt{2gH/2}$. La traiettoria dello zampillo è parabolica e si ricava risolvendo il moto di caduta libera con velocità iniziale orizzontale v_F. Scegliendo un sistema di riferimento cartesiano $\hat{x}\hat{y}$ si ha

$$\begin{cases} a_y = -g \\ a_x = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} v_y = -gt \\ v_F \end{cases} \qquad \begin{cases} y = -g\dfrac{t^2}{2} + h \\ x = v_F t \end{cases}$$

La traiettoria parabolica dello zampillo è dunque $y = h - gx^2/(2v_F^2)$. Sostituendo l'espressione di v_F ottenuta in precendenza con il teorema di Bernoulli si trova $H = d/(2\sqrt{1/4})$.
O anche: $d = v_F \times t_T$, con t_T il tempo che l' acqua impiega a toccare terra. Inoltre: $H/2 = 1/2\, g\, t_T^2$. Da cui: $t_T = \sqrt{\frac{H}{g}}$ e $d = v_F \times \sqrt{\frac{H}{g}}$. Uguagliando: $v_F = \sqrt{2gH/2} = d \times \sqrt{\frac{g}{H}}$ si trova $H = d$, identico a quanto fatto prima. Da cui, $H = d = 1.0\,\mathrm{m}$.

b) La velocità si ricava applicando Bernoulli, ossia dalla prima equazione scritta sopra. Nota H la si può calcolare numericamente: $v_F = \sqrt{gH}$=3.10 m/s. La portata dello zampillo è $Q = v_F(\pi r^2)$, = 0.0609 litri/s=6.09×10^{-5} m^3/s. Il tempo necessario per riempire la vaschetta è $\Delta t = V/Q$, da cui segue $\Delta t = 20.5$ s.

Soluzione Esercizio 2

a) Prima dell' urto si conserva l' energia meccanica del sistema. Prendiamo lo zero dell' energia potenziale al livello della massa m.
E_{Pi}=$MgL + Mg\frac{L}{2}sin\alpha$ (en. potenziale iniziale del CM dell' asta).
E_{Pf}=$Mg\frac{L}{2}$ (en. potenziale finale del CM dell' asta).
Energia cinetica iniziale =0, finale vale $\frac{1}{2}I_a\omega^2$.
Si ha dunque: $MgL + Mg\frac{L}{2}sin\alpha$=$Mg\frac{L}{2}$+$\frac{1}{2}I_a\omega^2$. E $\omega = \sqrt{3g/L\,(1+\sin\alpha)}$=7.9 rad/s

b) Nell' urto si conserva il momento angolare del sistema. Il momento di inerzia dell' asta con la massa m conficcata dentro, sempre rispetto all' estremo coincidente con O, dove si trova l' asse di rotazione, vale $I_b = I_a + mL^2$. Da cui si ha: $I_a\omega = I_b\omega_1$. Si trova ω_1= $\frac{M}{M+3m}\omega = 5.19$ rad/s

Soluzione Esercizio 3

a) $\frac{1}{2}mv^2 = L$; $v = \sqrt{(2L/m)} = 2.45 \times 10^6$ m/s.

b) Il campo elettrico di un filo infinito può essere calcolato con il teorema di Gauss: il campo ha direzione radiale, uscente dal filo o entrante verso il filo se esso è carico positivamente o negativamente e ha modulo $E = \lambda/(2\pi\epsilon_0 r) = 2k\lambda/r$ con λ densità lineare di carica;

$L = \int_{r_1}^{r_2} eEdr = e\lambda/(2\pi\varepsilon_0)\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r} = e\lambda/(2\pi\varepsilon_0)\ln(r_2/r_1)$

$\lambda = -2\pi\varepsilon_0 L/(e\ln 2) = -L/(2ke\ln 2) = -2.51\mu\mathrm{C/m}$

Soluzione Esercizio 4

(i) Le forze che definiscono il problema sono dirette tutte verticalmente. Prendiamo il versore verticale $\hat{\jmath}$ di riferimento verso l'alto. Le equazioni del moto per le due masse m ed M si scrivono:

$$\begin{aligned} R - mg &= ma \\ 2F_e - R - Mg &= Ma \end{aligned}$$

con $\vec{R}$ reazione vincolare che l'asta esercita sulla sferetta ed $\vec{F}_e$ forza elastica di una molla. L'accelerazione delle due masse è la stessa fintanto che le due rimangono in contatto. Risolvendo rispetto ad a e R si ha

$$R = \frac{2m}{m+M}F_e = \frac{2m}{m+M}k(l_0 - h).$$

La sferetta rimmarrà in contatto con l'asta fintanto che $R > 0$ e quindi si distaccherà per $h = l_0 = 0.2\,\mathrm{m}$.

(ii) Nel processo si conserva l'energia meccanica. Fissando l'energia potenziale della forza peso nulla in corrispondenza di $h = 0$ si ha:

$$kl_0^2 = (m+M)gl_0 + \frac{1}{2}(m+M)v^2 \quad \text{da cui} \quad v = \sqrt{2l_0\left(\frac{kl_0}{m+M} - g\right)} \approx 7.1\,\mathrm{m/s}$$