

Nome:

Cognome:

Matricola

**Esercizio 1** Un protone si trova inizialmente in quiete a una distanza  $r_1$  da un filo rettilineo indefinito carico. Il campo elettrico del filo compie un lavoro pari a  $L$  per portare il protone dalla distanza iniziale alla distanza  $r_2 < r_1$  dal filo stesso. Determinare:

- a) la velocità del protone quando si trova alla distanza di  $r_2$  dal filo;  $V_P = \underline{\hspace{2cm}}$   
b) la densità lineare di carica del filo, col suo segno  $\lambda = \underline{\hspace{2cm}}$

Si ricorda che la carica del protone vale  $e = 1.6 \times 10^{-19}$  C e la sua massa vale  $m_p = 1.67 \times 10^{-27}$  kg.  
Si ricorda che il valore della costante dielettrica del vuoto vale  $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} F/m$   
Dati:  $r_1 = 40$  mm;  $L = 5 \times 10^{-15}$  J;  $r_2 = 20$  mm.

**Esercizio 2** Sia dato un filo rettilineo indefinito percorso da una corrente variabile  $i(t) = I_o \cdot \sin(\omega t)$ , con  $I_o$  ed  $\omega$  noti. A distanza  $d$ , nota, si trova una spira quadrata di lato  $L$  e resistenza  $R$ , entrambe note. La situazione è rappresentata in figura. Determinare:

- a) il flusso del campo attraverso l'area della spira, quando  $i(t) = I_o$ .  $\Phi(\vec{B}) = \underline{\hspace{2cm}}$   
b) il valore della corrente indotta sulla spira al tempo  $t^*$ , dato sotto.  $i_{indotta} = \underline{\hspace{2cm}}$

La permeabilità magnetica del vuoto vale:  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Henry/m.  
Dati:  $I_o = 3$  A;  $\omega = 2$  rad/s;  $d = 4$  cm;  $L = 8$  cm;  $R = 2.7 \Omega$ ;  $t^* = 0.5$  s.

**Esercizio 3** Una macchina, indicata con A, si trova al tempo  $t = 0$  ferma e nella posizione indicata in figura. La macchina B invece allo stesso tempo si trova in un'altra posizione, indicata in figura, a  $\pi/2$  rad da A e si muove (sempre) a velocità costante pari a  $v_B$ . Sia A che B sono vincolate a percorrere la traiettoria tangente alla circonferenza, di raggio  $R$ , in senso antiorario. Al tempo  $t = 0$  la macchina A accelera, per raggiungere B, con accelerazione costante pari ad  $a_A$ , che mantiene costante fino a che non ha percorso un tratto pari ad  $D$ . A questo punto continua a muoversi alla velocità raggiunta. Determinare:

- a) dopo quanto tempo, da  $t_0$ , la macchina A raggiunge la macchina B.  $t_I = \underline{\hspace{2cm}}$   
b) l'angolo spazzato dalla macchina A quando raggiunge la macchina B.  $\theta_{AB} = \underline{\hspace{2cm}}$

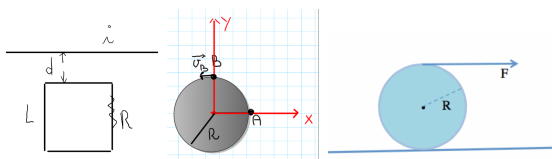
Dati:  $v_B = 100$  km/h,  $R = 15$  km,  $a_A = 1$  m/s<sup>2</sup>,  $D = 1$  km.

#### Esercizio 4

Una cilindro omogeneo di massa  $m$  e raggio  $R$ , inizialmente fermo, viene spinto su un piano orizzontale scabro da una forza  $\vec{F}$  costante, tangente al cilindro ed orizzontale, come indicato in figura (che mostra una sezione del cilindro passante per il suo centro di massa). Il coefficiente di attrito statico fra la ruota e il piano è pari a  $\mu_S$ . Determinare:

- a) il valore massimo del modulo di  $F$ , per cui il moto risulti di rotolamento puro.  $F_{max} = \underline{\hspace{2cm}}$   
b) il lavoro fatto da  $F_{max}$ , quando la velocità angolare del cilindro vale  $\omega_f$ .  $L_{F_{max}} = \underline{\hspace{2cm}}$

Si ricorda che il momento di inerzia del cilindro rispetto al suo centro di massa è pari a  $I = 1/2 mR^2$ .  
Dati:  $m = 4$  kg,  $R = 0.5$  m,  $\mu_S = 0.5$ ,  $\omega_f = 20$  rad/s.



## Soluzioni Compito

**Soluzione Esercizio 1.** a)  $\frac{1}{2}mv^2 = L$ ;  $v = \sqrt{2L/m} = 2.45 \times 10^6$  m/s.

b) Il campo elettrico di un filo infinito può essere calcolato con il teorema di Gauss: il campo ha direzione radiale, uscente dal filo o entrante verso il filo se esso è carico positivamente o negativamente e ha modulo  $E = \lambda/(2\pi\epsilon_0 r) = 2k\lambda/r$  con  $\lambda$  densità lineare di carica;

$$L = \int_{r_1}^{r_2} eE dr = e\lambda/(2\pi\epsilon_0) \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = e\lambda/(2\pi\epsilon_0) \ln(r_2/r_1)$$

$$\lambda = -2\pi\epsilon_0 L/(e \ln 2) = -L/(2ke \ln 2) = -2.51 \mu\text{C}/\text{m}$$

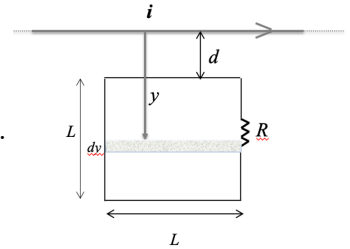
### Soluzione Esercizio 2.

La spira viene divisa in tante strisce orizzontali di spessore  $dy$ , come mostrato in figura. Il campo del filo varia solo con la coordinata  $y$ , distanza dall'asse del filo, mentre lungo la coordinata orizzontale mantiene lo stesso valore,  $B(y) = \frac{\mu_0 \cdot i(t)}{2\pi y}$ .

a) Pertanto il flusso attraverso l'area della spira si calcola con:  $\Phi(\vec{B}) = \int_d^{d+L} \vec{B} \cdot \hat{n} dS$ . Si ha, considerando che l'area di una striscetta vale  $dS = L dy$ , dato il fatto che il campo dipende solo da  $y$  come notato prima,  $\Phi(\vec{B}) = \int_d^{d+L} \frac{\mu_0 \cdot i(t)}{2\pi y} L dy$ . Svolgendo l'integrale si ha:  $\Phi(\vec{B}) = \frac{\mu_0 \cdot i(t) L}{2\pi} \ln \frac{d+L}{d}$ . quando la corrente ha il suo valore massimo,  $I_o = 3$  ampere, il flusso vale:  $5.27 \times 10^{-8}$  Tesla  $\times$  m<sup>2</sup>.

b) La corrente indotta vale, per la legge di Faraday/Neuman/Lenz:  $i_{indotta} = -\frac{1}{R} \frac{d\Phi(B)}{dt}$ . La sola grandezza variabile nella espressione del flusso vista sopra è la corrente la cui derivata è  $I_o \cdot \omega \cos(\omega t)$ .

Mettendo insieme si ha:  $i_{indotta} = \frac{1}{R} \frac{\mu_0 I_o L}{2\pi R} \times \ln \left( \frac{d+L}{d} \right) \cdot \omega \cos(\omega t) = 2.11 \cdot 10^{-8}$  A.



### Soluzione Esercizio 3.

Dati:  $v_A(t) = 0 + at$ , con  $a = \text{costante} = 1$  m/s<sup>2</sup> fino ad aver percorso 1 km, ossia fino al tempo che si ottiene risolvendo questa equazione:  $s_A(t^*) = s_{A*} = 10^3$  m =  $(1/2)at^{*2}$ . Si ricava  $t^* = 44.72$  s.  $v_B = 100$  km/h costante. Per B:  $\theta_0 = \pi/2$  al tempo  $t=0$ .

a) La macchina A al tempo  $t^*$  ha raggiunto la velocità  $v_{A*} = at^* = 44.72$  m/s.

Se vogliamo lavorare con le velocità angolare possiamo notare che la sua velocità angolare è pari a:  $\omega_{A*} = at^*$ , con  $\alpha = a/R = 6.67 \cdot 10^{-5}$  rad/s<sup>2</sup>. Dunque  $\omega_{A*} = 3$  mrad/s e lo spostamento angolare è  $\theta_{A*} = \frac{1}{15} = 0.067$  rad (questo è il dato del testo, 1 km diviso il raggio di 15 km). La macchina B, prendendo lo zero nella posizione iniziale di A, al tempo  $t^*$  si trova a:  $\theta_B(t^*) = \theta_0 + (v_B/R)t^*$  o anche  $s_B(t^*) = s_{0B} + v_B t^*$ , con  $s_{0B} = (\pi/2)R = 2.36 \cdot 10^4$  m. Si ricava  $\theta_B(t^*) = 1.66$  rad o anche  $s_B(t^*) = 2.48 \cdot 10^4$  m.

Ora cerchiamo il tempo al quale A raggiunge B e anche qui si può lavorare con con lo spostamento tangenziale o con quello angolare e passare facilmente da uno all'altro. Riferiamo i tempi a partire da  $t^*$  e calcoliamo  $t_I$ :

Abbiamo:

$$s_B(t_I) = s_B(t^*) + v_B t_I = s_A(t_I) = s_{A*} + v_{A*} t_I, \text{ da cui si calcola } t_I = \frac{s_B(t^*) - s_{A*}}{v_{A*} - v_B} = \frac{2.4810^4 - 10^3}{44.72 - \frac{100}{3.6}} = 1.40 \cdot 10^3 \text{ s.}$$

Il tempo totale per incontrarsi vale dunque:  $T = 44.72 + 1.40 \cdot 10^3$  s = 1444.72 s.

b) L'angolo spazzato da A nel tratto da  $t^*$  a  $t_I$  vale pertanto:  $s_A(t_I)/R = \frac{63608}{15000} = 4.24$  rad.

L'angolo totale spazzato da A al momento dell'incontro è pertanto pari a:  $\theta_{AB} = (0.067 + 4.24)$  rad = 4.31 rad.

#### Soluzione Esercizio 4.

a) Scriviamo le equazioni cardinali, per le forze e i momenti. Ricordiamo che il rotolamento puro corrisponde ad accelerazione lineare del C.M. pari a  $a = \alpha R$ , indicando l'accelerazione angolare con  $\alpha$ .

$$\text{Risultante forze: } \vec{F}_{max} + \vec{f}_A + m\vec{g} + \vec{N} = m\vec{a}$$

dove  $N$  indica la reazione vincolare del piano sulla ruota. Si vede facilmente che  $N - mg = 0$ .

Risultante momenti, prendendo il polo nel punto P di contatto della ruota sul piano:  $\vec{M}_{F_{max}} = I\vec{\alpha}$ .

Rispetto a P il momento d'inerzia risulta essere:  $I_P = (1/2)mR^2 + mR^2 = (3/2)mR^2$  Risolvendo, rispetto al riferimento indicato in figura:

$$m a_x = F_{max} - f_A.$$

$$F_{max} 2R = I\alpha = I_P \frac{a_x}{R} = (3/2)mR a_x.$$

Da cui si ricava:  $m a_x = 4F_{max}/3$ . Sostituendo nella prima eq. cardinale:  $(4/3)F_{max} - F_{max} = 1/3 F_{max} = \mu_s mg$ , ossia:  $F_{max} = 58.8 \text{ N}$ .

b) Per calcolare il lavoro fatto da  $F_{max}$  quando la velocità angolare varia da 0 al valore dato, bisogna considerare che l'attrito statico non compie lavoro e pertanto  $L_{F_{max}} = \Delta E_{cin} = (1/2)I_P \omega_f^2 = 300 \text{ joule}$ .