

Primo Esonero corso di Fisica (meccanica)
A.A. 2022-2023 13 Aprile 2023 – COMPITO C

Corso di Laurea: Ingegneria Gestionale, Sapienza. Canale 1

Nome:

Cognome:

Matricola

Aula:

Canale:

Anno di corso:

Riportare sul presente foglio i risultati numerici trovati per ciascun esercizio.

Nell'elaborato riportare le soluzioni in formato sia alfanumerico che numerico. Copiare in bella copia tutti i passaggi, disegni e conti che sono serviti alla risoluzione dell'esercizio. Motivare molto chiaramente le risposte, anche qualora non richiedano formule.

Esercizio 1

Una moto, ferma, ad un semaforo viene affiancata, proprio quando il semaforo diventa verde, e superata da una macchina che si stava muovendo alla velocità costante di 80 km/h. Il guidatore della moto si muove dopo 2 s con accelerazione costante di 1.5 m/s^2 , che mantiene. Determinare:

- a) quanta strada deve percorrere il motociclista, per raggiungere la macchina; $D^* = \underline{\hspace{2cm}}$
- b) quanto tempo impiega il motociclista a raggiungere la macchina; $T^* = \underline{\hspace{2cm}}$
- c) Se su quella strada si ha un limite di velocità di 85 km/h, dopo quanta strada dovrebbe smettere di accelerare, per non eccederlo; $\Delta S = \underline{\hspace{2cm}}$
- d) Quanto tempo impiega il motociclista a percorrere il tratto di strada ΔS . $T_1 = \underline{\hspace{2cm}}$

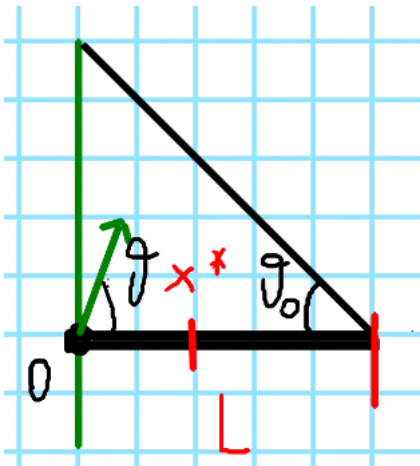
Esercizio 2

Un pendolo semplice è formato da una sferetta puntiforme di massa $M = 400 \text{ g}$ attaccata ad un filo inestensibile di lunghezza $\ell = 1.6 \text{ m}$. Una massa m anche essa puntiforme e di valore 200 g si trova inizialmente in quiete su una superficie orizzontale priva di attrito. Il pendolo si trova inizialmente fermo con il filo inclinato di un angolo $\theta = 12^\circ$ rispetto alla verticale. Viene poi lasciato libero di muoversi. Nel punto più basso della traiettoria, il pendolo urta la massa m . Si consideri l'urto completamente anelastico. Si trascuri la resistenza dell'aria. Determinare:

- a) la velocità del pendolo subito prima dell'urto; $v_1 = \underline{\hspace{2cm}}$
- b) l'energia meccanica persa dal pendolo a seguito dell'urto; esprimendola in mJ; $\Delta E = \underline{\hspace{2cm}}$
- c) l'altezza massima raggiunta dal pendolo dopo l'urto; $h = \underline{\hspace{2cm}}$
- d) dopo quanto tempo dall'urto il pendolo raggiunge la quota massima h . $t^* = \underline{\hspace{2cm}}$

Esercizio 3

Un pilastro di massa $M_T = 30 \text{ kg}$ e lunghezza $L = 6 \text{ m}$ è tenuto sospeso in orizzontale (vedi figura) da un perno fissato in una parete verticale, da un lato, e da una fune inestensibile, dall'altro. Un operaio sale sulla trave e si ferma a distanza $x^* = 2 \text{ m}$ dalla parete. La sua massa è $M_L = 80 \text{ kg}$. L'angolo fra fune e trave vale $\theta_0 = 40^\circ$. Si nota che la reazione vincolare R (come indicato in figura, freccia verde) del perno sulla trave è inclinata, rispetto alla trave stessa, di un angolo θ .



Determinare:

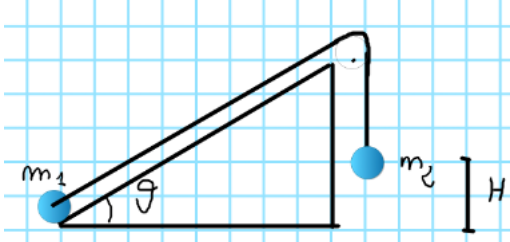
- | | |
|--|------------------|
| a) il valore della tensione della fune, in modulo; | $T =$ _____ |
| b) il valore dell'angolo θ , espresso in gradi; | $\theta =$ _____ |
| c) il valore, in modulo, della reazione vincolare del perno. | $R =$ _____ |

Si osserva che la fune, che sopporta una tensione massima pari all' 80% del valore necessario a mantenere l' equilibrio in questa situazione, inizia a cedere. Determinare:

- | | |
|--|---------------|
| d) a quale distanza massima dalla parete può portarsi l' operaio, per evitare la rottura della fune. | $x_S =$ _____ |
|--|---------------|

Esercizio 4

Un punto materiale di massa $m_1 = 2$ kg si trova sulla base di un piano inclinato (vedi figura).



Il piano è inclinato di un angolo $\theta = 25^\circ$ rispetto all' orizzontale. Dalla parte opposta, sulla cima del piano, si trova una carrucola puntiforme e senza massa. Una fune inestensibile collega il punto materiale, passando senza attriti attraverso la carrucola, ad una massa puntiforme $m_2 = 1$ kg, che risulta pertanto appesa sulla verticale e ad una quota $H = 10$ cm dal suolo. Determinare, in assenza di attrito:

- | | |
|--|---------------|
| a) la velocità, in modulo, con cui la massa m_2 arriva al suolo; | $V_2 =$ _____ |
| b) il lavoro fatto dalla gravità sulla massa m_1 dall' inizio e fino a quando la massa m_2 sta per toccare il suolo; | $L_G =$ _____ |

Il punto materiale viene poi sostituito da un cilindro, di stessa massa m_1 e raggio R , che viene posto nella condizione iniziale precedente. Lasciando libero il sistema si osserva che il cilindro sale sul piano, con un moto di rotolamento senza strisciamento, indicando anche la presenza di una forza di attrito. Il momento di inerzia del cilindro, rispetto al centro di massa, è $I = (1/2) m_1 R^2$. Determinare:

- | | |
|---|--------------------|
| a) la velocità, in modulo, con cui la massa m_2 arriva al suolo in questa nuova situazione; | $V_{22} =$ _____ |
| b) la differenza fra il tempo necessario alla caduta di m_2 nella situazione attuale, rispetto alla precedente, espresso in ms; | $\Delta T =$ _____ |
| c) il lavoro fatto dalla forza di attrito durante questo processo di salita della massa m_1 , nel suo moto di rotolamento puro. | $L_a =$ _____ |

Primo Esonero corso di Fisica (meccanica)
A.A. 2022-2023 13 Aprile 2023 – COMPITO D

Corso di Laurea: Ingegneria Gestionale, Sapienza. Canale 1

Nome:

Cognome:

Matricola

Aula:

Canale:

Anno di corso:

Riportare sul presente foglio i risultati numerici trovati per ciascun esercizio.

Nell'elaborato riportare le soluzioni in formato sia alfanumerico che numerico. Copiare in bella copia tutti i passaggi, disegni e conti che sono serviti alla risoluzione dell'esercizio. Motivare molto chiaramente le risposte, anche qualora non richiedano formule.

Esercizio 1

Una automobile passa davanti ad un posto di blocco ad una velocità di 60 km/h. La polizia inizia ad inseguire la macchina, in quanto l'automobilista ha ignorato il loro invito a fermarsi. La macchina della polizia era ferma e si muove con un ritardo di 0.5 s e con accelerazione costante di 2 m/s^2 . Il limite di velocità in quella strada è di 100 km/h. Determinare:

- | | |
|--|--------------------|
| a) quanto tempo impiega la polizia a raggiungere la macchina; | $t^* =$ _____ |
| b) la distanza percorsa dalla macchina, quando viene raggiunta; | $d^* =$ _____ |
| c) di quanto la polizia eccede il limite di velocità consentito, in km/h; | $\Delta v =$ _____ |
| d) dopo quanta strada, al massimo, la macchina della polizia avrebbe dovuto continuare a velocità costante, al fine di non superare il limite di velocità. | $\Delta X =$ _____ |

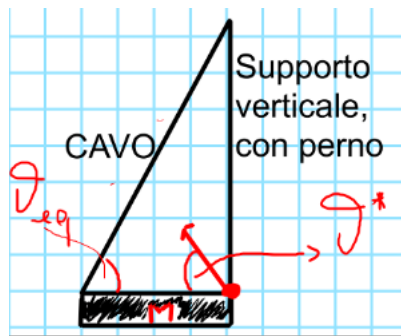
Esercizio 2

Sia data una piccola sfera puntiforme di massa $m = 900 \text{ gr}$. Questa viene posizionata e tenuta ferma al di sopra di un piattello orizzontale di massa $M = 2.2 \text{ kg}$ ad una distanza $h_0 = 1.5 \text{ m}$ da esso e lungo la sua verticale. Il piattello è inizialmente fermo e si trova ancorato ad un piano orizzontale tramite una molla verticale ideale e di massa trascurabile. La sferetta viene dunque lasciata cadere ed urta in modo anelastico il piattello e raggiunge successivamente un'altezza massima $h_1 = 20 \text{ cm}$. A seguito dell'urto, la massima compressione raggiunta dalla molla è di $\Delta y_{max} = 3.0 \text{ cm}$. Trascurare sia la resistenza dell'aria che l'effetto di variazione di energia potenziale gravitazionale a seguito della compressione della molla. Determinare:

- | | |
|---|---------------------|
| a) la velocità, in modulo, con cui la piccola sfera urta il piattello; | $v_0 =$ _____ |
| b) la velocità, in modulo, direzione e verso, del piattello subito dopo l'urto; | $\vec{v}_P =$ _____ |
| c) l'energia meccanica dissipata nell'urto; | $E_{diss} =$ _____ |
| d) la frequenza con cui oscilla il piattello dopo l'urto. | $\nu =$ _____ |

Esercizio 3

Un cavo sostiene una tavoletta di legno di massa $M = 10 \text{ kg}$ da un estremo. L'altro estremo è invece sorretto tramite un perno incastrato su una parete verticale. La tavoletta risulta dunque orizzontale,



come in figura.

La tavoletta è lunga $L = 1$ m. Si ha una situazione di equilibrio con un bambino di massa $M_B = 35$ kg in piedi sulla tavoletta a distanza D dal perno. Il perno è indicato con un pallino rosso in figura e l'angolo fra cavo e tavoletta vale $\theta_{eq} = 55^\circ$. Si nota che la reazione vincolare V del perno (come indicato in figura, freccia rossa) sulla tavoletta è inclinata, rispetto alla tavoletta di un angolo incognito θ^* , mentre la tensione T del cavo si misura essere 340 N. Determinare:

- il valore della distanza D ; $D = \underline{\hspace{2cm}}$
- il valore dell'angolo θ^* , espresso in radianti; $\theta^* = \underline{\hspace{2cm}}$
- il valore, in modulo, della reazione vincolare del perno. $V = \underline{\hspace{2cm}}$

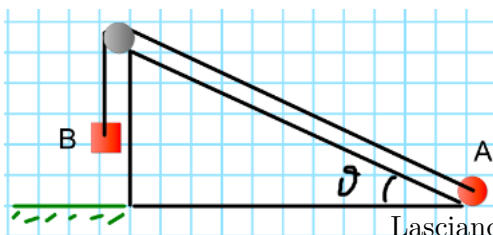
Il bambino ad un certo punto si sposta e si ferma a distanza D_1 dal perno pari al 70% della precedente, D . Determinare:

- la tensione della fune in questa nuova situazione. $T_1 = \underline{\hspace{2cm}}$

Esercizio 4

Sia dato un piano inclinato liscio (angolo $\theta = 25^\circ$ rispetto all'orizzontale) e due corpi, considerati due punti materiali, disposti come in figura. La massa $m_A = 4$ kg si trova a riposo sulla base del piano e la massa $m_B = 3$ kg, anche essa a riposo, appesa sulla verticale. I due corpi sono collegati tramite una fune inestensibile ed una carrucola ideale (puntiforme e priva di massa). Si osserva che quando il sistema viene lasciato libero di muoversi la massa m_B arriva al suolo con una velocità pari a $V_B = 2$ m/s. Determinare:

- la quota alla quale si trova la massa m_B dal suolo al tempo iniziale; $h_B = \underline{\hspace{2cm}}$
- il lavoro fatto dalla tensione della fune sulla massa m_A , dal tempo iniziale e fino a quando la massa m_B non raggiunge la velocità V_B ; $L_T = \underline{\hspace{2cm}}$



Lasciando la stessa disposizione in figura, e la stessa condizione iniziale, cambiamo altezza e superficie del piano inclinato, che diventa ruvida, e sostituiamo il corpo m_A con un cilindro di stessa massa, raggio r e momento di inerzia (rispetto al centro di massa) pari a $I_{cil} = (1/2) m_A r^2$. Se il cilindro, lasciato il sistema libero di muoversi (esattamente come prima), rotola senza strisciare, salendo sul piano, determinare:

- da quale quota è necessario lasciar scendere la massa m_B in modo che arrivi al suolo con la stessa velocità del punto precedente, $V_B = 2$ m/s; $h_{B2} = \underline{\hspace{2cm}}$
- il lavoro svolto dalla forza di attrito sulla massa m_A da quando inizia a salire e fino a quando il suo centro di massa non raggiunge la velocità di 2 m/s; $L_{attrito} = \underline{\hspace{2cm}}$
- il tempo che impiega la massa m_B a cadere, in questa situazione $t_B = \underline{\hspace{2cm}}$

Soluzioni Compito C

Soluzione Esercizio 1. Compito C

- a) La velocità della macchina in m/s vale 22.2 m/s. Macchina e moto risulteranno appaiate quando: $x_{MA} = x_{MO}$, con $x_{MA} = v_0 \cdot (t + t_0)$ e $x_{MO} = 1/2 \cdot a \cdot t^2$. v_0 indica la velocità della macchina. Con $t_0 = 2$ s. Si ottiene una equazione di secondo grado: $t^2 + B \cdot t + C = 0$, con $B = -2v_0/a$ e $C = -2v_0 \cdot t_0/a$. Le 2 soluzioni valgono: $t^* = 31.5$ s, -1.88 s. La soluzione da considerare è la prima.
- b) La distanza percorsa è: $D^* = x_{MA} = x_{MO} = v_0(t^* + t_0) = 744.7$ m
- c) Il motociclista raggiunge la macchina con una velocità pari a $V_{MO} = a \cdot t^* = 47.3$ m/s = 170.2 km/h, eccedendo il limite di velocità. Al fine di rispettare il limite di velocità deve smettere di accelerare dopo aver percorso $\Delta S = v_{lim}^2 / (2 \cdot a) = 185.8$ m.
- d) Il tempo necessario a percorrere questo pezzo di strada è $T_1 = v_{lim}/a = 15.7$ s.

Soluzione Esercizio 2. Compito C

- a) la velocità del pendolo prima dell'urto si ricava dalla conservazione dell'energia meccanica. L'energia potenziale della massa M è (prendendo lo zero nella posizione della massa m): $U = Mgl(1 - \cos \theta)$, quindi si ha:

$$\frac{1}{2}Mv_1^2 = Mgl(1 - \cos \theta) \Rightarrow v_1 = \sqrt{2gl(1 - \cos \theta)} = \sqrt{2 \times 9.81 \times 1.6 \times (1 - \cos 12)} = 0.83 \text{ m/s}$$

- b) Dopo l'urto la velocità della sferetta con attaccata la massa m si ricava con la conservazione della quantità di moto totale:

$$Mv_1 = (M + m)v_2 \Rightarrow v_2 = \frac{M}{M + m}v_1 = \frac{400}{400 + 200} \times 0.83 = 0.55 \text{ m/s}.$$

L'energia persa nell'urto si calcola da:

$$\Delta E = \frac{1}{2}(M + m)v_2^2 - \frac{1}{2}Mv_1^2 = -0.0457 \text{ J}.$$

Pertanto l'energia persa è di 0.0457 joule, dunque 45.7 mJ

- c) L'altezza raggiunta dal pendolo si ricava di nuovo con la legge della conservazione dell'energia:

$$\frac{1}{2}(M + m)v_2^2 = (M + m)gh \Rightarrow h = \frac{v_2^2}{2g} = 0.0155 \text{ m}.$$

(1.55 cm).

- d) Il tempo impiegato corrisponde ad 1/4 del periodo di oscillazione. Il periodo vale $T = 2\pi\sqrt{l/g}$ e dunque $t^* = 0.63$ s.

Soluzione Esercizio 3. Compito C

Scriviamo le equazioni cardinali, per le forze e per i momenti, in condizione di equilibrio. Riferiamo i momenti al perno che tiene la trave ancorata alla parete. Il centro di massa della trave si trova a distanza $L/2$ dall'origine del sistema di riferimento x, che prendiamo con lo zero sulla parete e positivo verso destra. Prendiamo il riferimento y con lo stesso zero e positivo verso l'alto. Si ha:

Su x: $R \cdot \cos \theta - T \cos \theta_0 = 0$

Su y: $T \sin \theta_0 + R \sin \theta - M_L g - M_T g = 0$.

Momenti, col polo detto e positivi se tendono a far ruotare la trave in senso antiorario:

a) $T \cdot L \sin \theta_0 - M_L g \cdot x^* - M_T g \cdot L/2 = 0$.

Da cui:

$$T = \frac{M_L g \cdot x^* + M_T g \cdot L/2}{L \sin \theta_0} = 635.9 \text{ N}$$

b) Dalla prima equazione abbiamo: $R = \frac{T \cos \theta_0}{\cos \theta}$, ordinando e sostituendo nella seconda, si ricava:

$$\tan \theta = \frac{g(M_L + M_T) - T \sin \theta_0}{T \cos \theta_0}. \text{ Da cui : } \theta = 0.942 \text{ rad} = 53.99^\circ.$$

c) Per ricavare R , ora che abbiamo θ , riprendiamo la $R = \frac{T \cos \theta_0}{\cos \theta} = 828.65 \text{ N}$.

d) La tensione massima della fune vale $T_{max} = 0.8 \cdot T = 508.73 \text{ N}$. Bisogna dunque invertire la formula con cui abbiamo ricavato T e determinare la nuova posizione x_S . Si ha:

$$x_S = \frac{T_{max} \cdot L \sin \theta_0 - M_T g \cdot L/2}{M_L g} = 1.38 \text{ m. Ossia l' operaio deve avvicinarsi, alla parete al fine di ridurre la tensione della fune.}$$

Soluzione Esercizio 4. Compito C

a) In assenza di attrito, il moto del punto materiale si svolge con la conservazione dell' energia meccanica. L' energia iniziale è energia potenziale dovuta alla posizione della massa m_2 , a quota H rispetto al riferimento che prenderemo come 0 dell' energia potenziale.

$m_2 g H = 1/2 m_2 v_2^2 + 1/2 m_1 v_1^2 + m_1 g H_1$ con $H_1 = H \sin \theta = 4.23 \text{ cm}$, quota raggiunta dalla massa m_1 , che percorre un tratto H sul piano inclinato. E si ha: $v_1 = v_2 = V_2$ in quanto le 2 masse, a riposo all' inizio, sono vincolate dalla fune.

$$\text{Risolvendo si ha: } V_2 = \sqrt{\frac{2gH(m_2 - m_1 \sin \theta)}{m_1 + m_2}} = 0.32 \text{ m/s.}$$

b) Il lavoro fatto dalla gravità su m_1 è dato da: $L_G = -m_1 g H_1 = -0.83 \text{ J}$ (lavoro resistente).

c) Il moto di rotolamento puro porta a dover considerare l' energia cinetica di rotazione. L' energia comunque resta conservata (infatti, vedi risposta e)) e abbiamo:

$m_2 g H = 1/2 m_2 v_2^2 + m_1 g H_1 + 1/2 I \omega^2 + 1/2 m_1 v_{CM}^2$, con $v_{CM} = \omega R = v_2 = V_2$ (rotolamento puro la prima e vincolo fra le due masse la seconda). Si ottiene, avendo sostituito l' espressione del momento di inerzia:

$$V_2 = \sqrt{\frac{2gH(m_2 - m_1 \sin \theta)}{3/2 m_1 + m_2}} = 0.28 \text{ m/s.}$$

d) Il tempo necessario alla caduta di m_2 è calcolabile da $V_2 = a t_1$, con $a = V_2^2 / (2H)$, da cui $t_1 = 2H / V_2 = 0.629 \text{ s}$. Nelle seconda situazione, usando le stesse relazioni si ottiene $t_2 = 0.725 \text{ s}$, da cui $\Delta T = 0.097 \text{ s} = 97 \text{ ms}$.

e) Il lavoro della forza di attrito nel moto di rotolamento puro è nullo, in quanto il punto dove la forza è applicata è fermo.

Il problema si può anche risolvere calcolando le accelerazioni nei 2 casi. I valori sono:

$$a_1 = 0.51 \text{ m/s}^2 \text{ e } a_2 = 0.38 \text{ m/s}^2. \text{ Si trova che: } a_1 = \frac{m_2 g - m_1 g \sin \theta}{m_1 + m_2}. \quad a_2 = \frac{m_2 g - m_1 g \sin \theta}{3/2 m_1 + m_2}.$$

Soluzioni Compito D

Soluzione Esercizio 1. Compito D

- a) La velocità della macchina in m/s vale 16.67 m/s. Le 2 macchine risulteranno appaiate quando: $x_M = x_P$, con $x_M = v_0 \cdot (t + t_0)$ e $x_P = 1/2 \cdot a \cdot t^2$. v_0 indica la velocità della macchina. Con $t_0 = 0.5$ s. Si ottiene una equazione di secondo grado: $t^2 + B \cdot t + C = 0$, con $B = -2v_0/a$ e $C = -2v_0 \cdot t_0/a$. Le 2 soluzioni valgono: $t^* = 17.15$ s, -0.49 s. La soluzione da considerare è la prima.
- b) La distanza percorsa dalla macchina, e ovviamente dalla polizia è: $d^* = x_M = x_P = v_0(t^* + t_0) = 294.2$ m
- c) La polizia raggiunge la macchina con una velocità pari a $V_P = a \cdot t^* = 34.3$ m/s = 123.5 km/h, eccedendo il limite di velocità di $\Delta v = 23.5$ km/h
- d) Al fine di rispettare il limite di velocità la macchina della polizia deve smettere di accelerare dopo aver percorso $\Delta X = v_{lim}^2 / (2 \cdot a) = 192.9$ m. $v_{lim} = 100$ km/h = 27.78 m/s.

Soluzione Esercizio 2. Compito D

Scegliamo un sistema di riferimento con asse verticale $\hat{y}$ che punta verso alto. a) Per calcolare il modulo della velocità v_0 con cui la pallina urta il piattello facciamo uso della conservazione dell'energia meccanica tra l'istante in cui la sfera viene lasciata cadere e quello in cui essa urta il piattello:

$$E_i = mgh_0 = E_f = mv_0^2/2, \text{ da cui segue } v_0 = \sqrt{2gh_0} = 5.4 \text{ m/s.}$$

b) Per calcolare la velocità del piattello dopo l'urto usiamo il fatto che durante l'urto si conserva la quantità di moto lungo $\hat{y}$:

$$-v_0 m = -v_p M + v_1 m$$

dove con v_0 e v_1 indichiamo il modulo della velocità della pallina prima e dopo l'urto, mentre v_p è il modulo della velocità del piattello dopo l'urto. In maniera del tutto analoga a quanto visto nella domanda a), dalla conservazione dell'energia meccanica si ricava $v_1 = \sqrt{2gh_1} = 1.98$ m/s. Risolvendo per v_p si trova

$$v_p = (v_0 + v_1) \frac{m}{M} = 3.03 \text{ m/s.}$$

La velocità del piattello dopo l'urto è dunque $\vec{v}_p = -v_p \hat{y} = -3.03 \hat{y}$ m/s, ovvero essa ha modulo v_p , direzione verticale e verso negativo rispetto a $\hat{y}$.

c) L'energia meccanica dissipata è pari alla differenza dell'energia prima e dopo l'urto:

$$E_i = \frac{1}{2}mv_0^2 = 13.24 \text{ J}, \quad E_f = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}Mv_p^2 = 11.86 \text{ J}, \quad \text{da cui: } E_{diss} = E_i - E_f = 1.38 \text{ J.}$$

d) Successivamente all'urto il piattello si muove di moto armonico con equazione oraria (trascuriamo gli effetti della gravità)

La pulsazione ω è legata alla costante elastica della molla K dalla formula $\omega = \sqrt{K/M}$, dunque $\nu = \sqrt{K/M}/(2\pi)$. La costante elastica si può ricavare imponendo la conservazione dell'energia (trascurando l'energia potenziale gravitazionale) tra l'istante iniziale e quello in cui la molla assume la massima compressione:

$$\frac{1}{2}Mv_p^2 = \frac{K}{2}\Delta y_{max}^2, \text{ da cui } k = \frac{Mv_p^2}{\Delta y_{max}^2} = 2.24 \times 10^4 \text{ N/m. E la frequenza } \nu = 16.1 \text{ Hz.}$$

Soluzione Esercizio 3. Compito D Scriviamo le equazioni cardinali, per le forze e per i momenti, in condizione di equilibrio. Riferiamo i momenti al perno che sorregge la tavoletta ancorata alla parete. verticale Il centro di massa della trave si trova a distanza $L/2$ dall'origine del sistema di

riferimento x, che prendiamo con lo zero sul perno e positivo verso sinistra. Prendiamo il riferimento y con lo stesso zero e positivo verso l'alto. Si ha:

$$\text{Su x: } V \cdot \cos\theta^* - T \cos\theta_{eq} = 0$$

$$\text{Su y: } T \sin\theta_{eq} + V \sin\theta^* - M_B g - M g = 0.$$

Momenti, col polo detto e positivi se tendono a far ruotare la trave in senso orario:

$$\text{a) } T \cdot L \sin\theta_{eq} - M_B g \cdot D - M g \cdot L/2 = 0.$$

Da cui:

$$D = \frac{T \cdot L \sin\theta_{eq} - M g \cdot L/2}{M_B g} = 0.668 \text{ m.}$$

b) Dalla prima equazione abbiamo: $V = \frac{T \cos\theta_{eq}}{\cos\theta^*}$, ordinando e sostituendo nella seconda, si ricava:

$$\tan\theta^* = \frac{g(M_B + M) - T \sin\theta_{eq}}{T \cos\theta_{eq}}. \text{ Da cui: } \theta^* = 0.696 \text{ rad } (= 39.88^\circ).$$

c) Per ricavare V, riprendiamo la $V = \frac{T \cos\theta_{eq}}{\cos\theta^*} = 254.13 \text{ N.}$

d) Il bambino si sposta a distanza $D_1 = 0.7 \cdot D = 0.468 \text{ m}$ dal perno, e la nuova tensione del cavo diventa inferiore, come aspettato:

$$T_1 = \frac{M_B g \cdot D_1 + M g \cdot L/2}{L \sin\theta_{eq}} = 255.96 \text{ N}$$

Soluzione Esercizio 4. Compito D

a) In assenza di attrito, si ha conservazione dell'energia meccanica. L'energia iniziale è energia potenziale dovuta alla posizione della massa m_B , a quota incognita rispetto al riferimento del pavimento che prenderemo come 0 dell'energia potenziale.

$m_B g h_B = 1/2 m_B v_B^2 + 1/2 m_A v_A^2 + m_A g h_A$ con $h_A = h_B \sin\theta$ quota raggiunta dalla massa m_A , che percorre un tratto h_B sul piano inclinato. E si ha: $v_B = v_A = V_B$ in quanto le 2 masse, a riposo all'inizio, sono vincolate dalla fune.

Risolvendo rispetto all'incognita h_B si ha: $h_B = \frac{V_B^2 \cdot (m_A + m_B)}{2 g \cdot (m_B - m_A \sin\theta)} = 1.09 \text{ m}$

b) Il lavoro totale su m_A è dato dalla variazione di energia cinetica ed è la somma del lavoro resistente fatto dalla gravità e di quello attivo fatto dalla tensione della fune T . Dunque si ha: $L_{totale} = L_G + L_T = (1/2) m_A V_B^2 - 0$. Il lavoro fatto dalla gravità vale $L_G = -m_A g h_A = -18.1 \text{ J}$ (lavoro resistente).

La variazione di energia cinetica vale: $(1/2) m_A V_B^2 = 8 \text{ J}$. E dunque si ha che: $L_T = 26.1 \text{ J}$

c) Il moto di rotolamento puro porta a dover considerare l'energia cinetica di rotazione. L'energia comunque resta conservata (vedi risposta d)) e abbiamo:

$m_B g h_{B2} = 1/2 m_B V_B^2 + m_A g h_{A2} + 1/2 I_{cil} \omega^2 + 1/2 m_A v_{CM}^2$, con $v_{CM} = \omega r = V_B$ (rotolamento puro la prima uguaglianza e vincolo fra le due masse la seconda).

Si ottiene, avendo sostituito l'espressione del momento di inerzia ed esplicitando rispetto alla quota:

$$h_{B2} = \frac{V_B^2 \cdot (3/2 m_A + m_B)}{2 g \cdot (m_B - m_A \sin\theta)} = 1.40 \text{ m}$$

d) L'attrito non compie alcun lavoro, in quanto il punto di contatto, dove agisce, è fermo per definizione di rotolamento puro.

e) Il tempo necessario alla caduta di m_B è calcolabile da $V_2 = a t_B$, con $a = V_2^2 / (2 h_{B2}) = 1.43 \text{ m/s}^2$. Si ottiene $t_B = 1.40 \text{ s}$.

Il problema si può anche risolvere calcolando prima le accelerazioni nei 2 casi. I valori sono:

$a_1 = 1.84 \text{ m/s}^2$ e $a_2 = 1.43 \text{ m/s}^2$. Si trova che: $a_1 = \frac{m_B g - m_A g \sin\theta}{m_A + m_B}$. $a_2 = \frac{m_B g - m_A g \sin\theta}{3/2 m_A + m_B}$. Si può anche calcolare che la tensione della fune vale $T = 23.91 \text{ N}$. e lavoro $L_T = T \cdot h_b = 26.1 \text{ J}$.