1. $\boxed{\text{Cinematica: derivate e integrali che ci servono: appunti}}$

Primo esempio: moto uniforme Iniziamo con le derivate. Supponiamo una legge oraria del tipo: $x(t) = a+bt$, dove a, b sono dei coefficienti costanti. $x(t)$ è lo spazio percorso e t il tempo. Ragionando solo sulle dimensioni dell' equazione scritta vediamo che: il coefficiente a deve avere le dimensioni di uno spazio mentre b quelle di uno spazio/tempo, ossia di una velocità. Riconosciamo infatti l' equazione oraria del moto rettilineo uniforme. Vogliamo ottenere dalla defizione di velocità come $\frac{dx}{dt}$, ossi derivata di x rispetto al tempo, il risultato che sappiammo: la velocità di questo moto è $v = b$. La derivata è il limite, per ϵ che tende a zero, del rapporto incrementale. Dove ϵ rappresenta il Δt. $\frac{dx}{dt} = = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{x(t+\epsilon)-x(t)}{\epsilon}$. Si ha che $x(t+\epsilon) - x(t) = a + b(t+\epsilon) - (a+bt) = = b\epsilon$. Che, diviso ϵ dà
$\frac{dx}{dt} = b$

Secondo esempio: moto parabolico Sia ora la legge oraria del tipo: $x(t) = a+bt+ct^2$. Se $x(t)$ è uno spazio e t un tempo, a sarà uno spazio, b una velocità e c una accelerazione Facciamo la stessa cosa di prima:
$\frac{dx}{dt} = = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{x(t+\epsilon)-x(t)}{\epsilon}$. Si ha che $x(t+\epsilon) - x(t) = a + b(t+\epsilon) + c(t+\epsilon)^2 - (a + bt + ct^2) = a + bt + b\epsilon + ct^2 + 2ct\epsilon + c\epsilon^2 - a - bt - ct^2 = b\epsilon + 2ct\epsilon + c\epsilon^2$
Che, diviso ϵ e mandando a zero ϵ, diventa:
$\frac{dx}{dt} = b + 2ct$

Terzo esempio: moto con legge tipo seno o coseno Sia ora $x(t) = \cos\omega t$. Anche qui $\frac{dx}{dt} = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{\cos\omega(t+\epsilon)-\cos\omega t}{\epsilon}$. La prima espressione del coseno è di un tipo "noto" tipicamente come $\cos(a+b)$ e bisogna cercare come si riduce ad una forma che ci sia utile. Usiamo: $\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$, con $a = \omega t$ e $b = \epsilon$. Dunque calcoliamo il numeratore della frazione e poi pensiamo al limite. $\cos(\omega t + \omega\epsilon) - \cos(\omega t) = \cos(\omega t) \quad \cos(\omega\epsilon) \quad - \quad \sin(\omega t) \quad \sin(\omega\epsilon)$ - $\cos(\omega t)$.
Analizziamo tutti i termini: il primo e l' ultimo si semplificano, visto che $\cos(\omega\epsilon$ tende ad 1 quando ϵ tende a zero e ω non è infinito. $\sin(\omega\epsilon) \approx \omega\epsilon$ per ϵ che tende a zero [1] A questo punto abbiamo: $\frac{dx}{dt} = \lim_{\epsilon\to 0} - \frac{\omega\epsilon\sin(\omega t)}{\omega\epsilon} = -\sin(\omega t)$

Riassumiamo Derivate da "sapere", per il momento:

(a) Derivata di una costante =0 (la costante non varia ...)

(b) Derivata di una potenza di t, del tipo: $a + b\,t^n$. Si ha, riguardando i primi due esempi e cercanto di tirare fuori una regola generale:
$\frac{d(a+bt^n)}{dt} = n\,bt^{n-1}$
Se n=1 abbiamo una retta e lasua derivata è il suo coefficente angolare (b nel nostro esempio). La formula data si applica anche se n è negativo (ad

[1] Ricordiamo che, per valori dell' angolo α "piccoli" il $\sin\alpha \approx \alpha$, con il valore di α espresso in radianti. Questo equivale a dire che siamo in una condizione in cui un tratto di circonferenza può essere uguagliato alla corda corrispondente

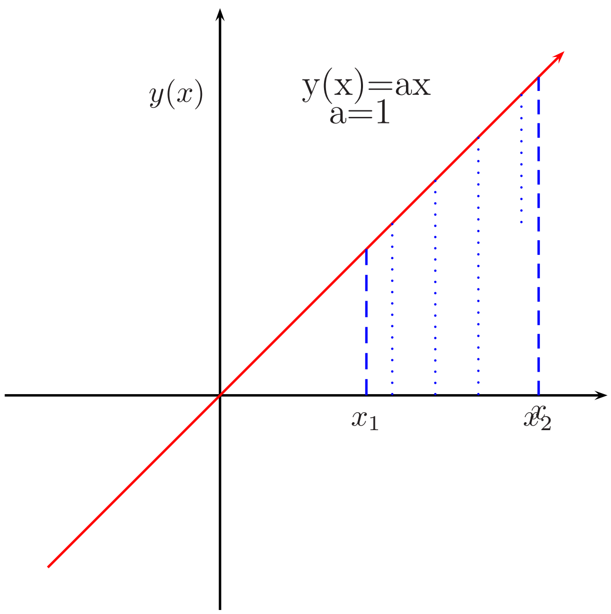

Figura 1: Esempio di integrale, calcolando l' area

esempio, -1,-2) oppure frazionario (esempio: 1/2 -ossia radice quadrata-, -1/2 ...)

(c) Derivata del coseno:
$\frac{d\cos(\omega t)}{dt} = -\omega\ \sin(\omega t)$

(d) Derivata del sin:
$\frac{d\sin(\omega t)}{dt} = \omega\ \cos(\omega t)$

(e) La derivata di una somma (o differenza)è la somma (o differenza) delle derivate (non così per altre operazioni !)

Ora gli integrali che ci servono:

(a) Che un integrale non sia altro che un modo efficente per rappresentare e calcolare l' area "al di sotto" di una funzione data (ossia, se la funzione è una generica y(x), l' area sotto la curva y(x) nel grafico della y in funzione di x.

$$Area(y(x))|_{x_1}^{x_2} \;=\; \int_{x_1}^{x_2} y(x)\,\mathrm{d}x\,. \tag{1}$$

Nal caso in cui $y(x) = K$ costante (ad esempio mg nel caso della forza di gravità, con x la quota), è semplice determinare l' area sotto la $y(x)$, x_1 e x_2. Si tratta di un rettangolo di base $x_2 - x_1$ ed altezza K. E l' area, dunque l' integrale sarà $(x_2 - x_1)\,K$.

$$Area(y(x))|_{x_1}^{x_2} = \int_{x_1}^{x_2} K\,\mathrm{d}x\; = K(x_2 - x_1) \tag{2}$$

In Figura1a $y(x) = a\,x$, dove il coefficiente a è stato posto uguale ad 1, per semplicità. Si tratta di una retta passante per l'origine delle coordinate, L' area da calcolare è tratteggiata in blu in figura, ed è l' area sotto la curva compresa fra le due ascisse x_1 e x_2. Dalla figura non è difficile vedere che l' area in questo caso è l' area di un trapezio, di base maggiore (modo semplice di vederlo) $a\,x_2$, base minore $a\,x_1$ ed altezza $x_2 - x_1$. Dunque
$Area = (a/2)(x_1 + x_2) \cdot (x_2 - x_1)$.
Ricordando, dai prodotti notevoli, che
$(a_1 + a_2) \cdot (a_2 - a_1) = (a_2^2 - a_1^2)$, si ha:

$Area = (a/2)(x_2^2 - x_1^2)$.
E questo è il risultato dell' integrale di sopra. Informazioni più tecniche, importanti per comprendere anche la notazione usata in molti testi:
la funzione che rappresenta la soluzione dell' integrale, ad esempio Kx nel primo caso e $\frac{ax^2}{2}$ nel secondo, ancora non esplicitata nei due estremi (gli estremi di integrazione), si chiama la funzione "primitiva" dell 'integrale dato. La primitiva è quella che si trova risolvendo l' integrale ed infine la si calcola nei due estremi di integrazione calcolando: il valore che essa assume nel secondo estremo (quello in alto nel simbolo) meno il valore che essa assume nel primo estremo:
ossia

$$Int|_{x_1}^{x_2} = \int_{x_1}^{x_2} a\,x\,\mathrm{d}x\,. = \frac{ax^2}{2}|_{x_1}^{x_2} = \frac{a(x_2^2 - x_1^2)}{2} \tag{3}$$

che porta al risultato datoprima.
Dove l' abbiamo incontrata nel corso di Fisica ? Inanzitutto nella dimostrazione del Teorema dell' energia cinetica, ottenuto dalla relazione $\vec{F} = m\vec{a}$ e dalla definzione di lavoro. In tale dimostrazione ci si trova davanti

$$Int|_{v_1}^{v_2} \;=\; \int_{v_1}^{v_2} m\,v\,\mathrm{d}v\,. \tag{4}$$

dove m è la massa dell' oggetto in esame e v la sua velocità.
Poi nel calcolo del lavoro compiuto da una molla, che segua la legge di Hooke $\vec{F} = -K\Delta\vec{x}$.

(b) Dagli esempi fatti possiamo trovare una regola generale, come fatto per la derivata. Non è facilissimo, nè ovvio, lo ammetto .... La regola è la seguente: per ogni n, razionale, sia negativo che positivo, ma diverso da -1 !, si ha che:

$$Int|_{x_1}^{x_2} = \int_{x_1}^{x_2} a\,x^n\,\mathrm{d}x\,. = \frac{ax^{n+1}}{n+1}|_{x_1}^{x_2} = \frac{a(x_2^{n+1} - x_1^{n+1})}{n+1} \tag{5}$$

Ossia la potenza di x aumenta di una unità e la x stessa viene divisa per il fattore (n+1). Se $n = -1$ si ha, ad esempio:

$$Int|_{x_1}^{x_2} = \int_{x_1}^{x_2} a\,\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x\,. = \frac{-a}{x}|_{x_1}^{x_2} = -a(\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1}) \tag{6}$$

Dove lo abbiamo incontrato ? La prima volta nel calcolo del lavoro fatto dalla forza di gravità nel caso generale, ossia non limitato alle vicinanze della superficie terrestre, dove la quota è $h << R_T$.
Facciamo il calcolo. L' integrale è

$$\begin{aligned} L|_{R_1}^{R_2} &= \int_{R_1}^{R_2} (-\frac{G\,M\,m}{r^2})\,\mathrm{d}r && (7)\\ &= \left.\frac{G\,M\,m}{r}\right|_{R_1}^{R_2} && (8)\\ &= G\,M\,m\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)\; : && (9) \end{aligned}$$

Se $R_2 > R_1$ (m si allontana da M): $L < 0 \;\rightarrow\; \Delta E_c < 0$.
Il lavoro fatto dalla gravità è negativo perchè la gravità fa un lavoro resistente in questo caso, ossia tende ad opporsi all' allontanamento dei due corpi.
Se $R_2 < R_1$ (m si avvicina a M): $L > 0 \;\rightarrow\; \Delta E_c > 0$.
Anche in questo caso, se il corpo ritorna nella posizione iniziale il lavoro totale è nullo.
Lavoro fatto dalla forza gravitazionale per portare un corpo dalla distanza R all'infinito:

$$L|_R^{\infty} = -\frac{G\,M\,m}{R}\,. \tag{10}$$

Se $R = R_T$ e $M = M_T$ questa formula si riduce a $-m\,g\,R_T$.

(c) Caso di $x = -1$, dove abbiamo detto non vale la regola precedente.

$$I = \int_{x_1}^{x_2} \frac{a}{x}\,\mathrm{d}x\; = a\; ln(\frac{x_2}{x_1}) \tag{11}$$

Dove si ottiene $\ln(\frac{x_2}{x_1})$ da: $\ln x_2 - \ln x_1$
Dove lo si incontra nel corso di Fisica ?
Inanzitutto in termodinamica, nel calcolo del lavoro su una trasformazione isoterma, ossia T= costante.

$$L|_{V_1}^{V_2} = \int_{V_1}^{V_2} p\,\mathrm{d}V\; = \tag{12}$$

$$L|_{V_1}^{V_2} = \int_{V_1}^{V_2} nRT \, \frac{\mathrm{d}V}{V} = \tag{13}$$

Da cui segue, $L = nRT \; ln(\frac{V_2}{V_1})$.
Positivo se V_2 è maggiore di V_1 (espansione del gas),
negativo se V_2 è minore V_1 (compressione del gas).