Fisica per Farmacia–Pia Astone
(A.A. 08/09, Canale C (studenti P-Z))

1. $\boxed{\textbf{Prima settimana (Lezioni da 1 a 3)}}$

   Introduzione al corso e informazioni varie (libri di testo, esoneri, esami).
   Esame: compito scritto e un orale.
   Lo scritto può essere sostituito con gli esoneri fatti durante il corso e subito dopo la fine del corso. Per gli esoneri è necessaria la presenza (firme a lezione, prese in modo random). Gli esoneri saranno uno a febbraio ed il secondo a maggio. Sono circa 7-8 esercizi brevi, normalizzati in $\approx 38 - 40$. Voto minimo per superarlo: 15. Voto per superarlo con riserva: fra 10 e 14.
   "Riserva" significa che al secondo esonero sarà necessario che lo studente faccia correttamente almeno uno (o entrambi, viene indicato) fra uno o due esercizi indicati, che conterranno dei riferimenti alla prima parte del corso.
   Lo scritto sono 3 esercizi, normalizzati normalmente in trentesimi.
   All' esonero potrete portare solo la calcolatrice e un vostro formulario; allo scritto potrete portare anche libri ed appunti.
   No cellulare, neanche come calcolatrice !!!
   Appelli: scritto e orale a giugno, scritto e orale a luglio, scritto e orale a settembre, orale a novembre, scritto e orale a febbraio, orale ad aprile.
   L' esonero vale un anno accademico (giugno 2008 → aprile 2009)
   Lo scritto vale tre sessioni (scritto di luglio 2008 → febbraio 2009)
   Informazioni relative al corso nel mio sito
   web www.roma1.infn.it/rog/astone/didattica/ e sul server di farmacia (**frm.uniroma1.it**).
   Testo a scelta fra (o altro se giaÌlo avete):
   Luci, Ferrari, Mariani, Pelissetto, "Fisica", vol. 1, Idelson, Gnocchi
   Jewett,Serway "Principi di Fisica" 4^a ed., Edises
   Halliday-Resnick "Fondamenti di Fisica", Ambrosiana
   Per esercizi è molto utile:
   Serway et al., "Guida alla soluzione di problemi da Principi di Fisica", Edises
   Dispense:
   Es. d' esame di fisica (farmacia e CTF), Proff. Bagnaia e Luci (disponibili ai chioschi gialli)
   Un utile supporto di matematica:
   Davidson "Metodi matematici per un corso introduttivo di fisica"

   La **matematica** supposta "nota":
   Un pochino di "scioltezza ed abilit'́ nei passaggi e semplificazioni algebriche,

soluzione di equazioni algebriche del primo e secondo ordine, sistemi di equazioni algebriche. Formule di geometria (perimetro, area, volume di figure e superfici geometriche). Trigonometria.
Notazione scientifica.
Uso della **vostra** calcolatrice.

. . . **Iniziamo** . . .
La misura in fisica. La fisica è una scienza sperimentale dove il concetto di misura è fondamentale.
Il metodo scientifico. Esempi mostrando palline che rimbalzano (e non . . .).
Prima di fare una misura, dobbiamo avere chiaro a quale domanda vogliamo/dobbiamo rispondere e dobbiamo cercare di individuare le grandezze che entrano in gioco nel problema, quelle che non entrano affatto e quelle che, almeno in prima approssimazione, possano essere trascurate.

Importanza di avere sempre sotto controllo:
le dimensioni delle grandezze fisiche (se ho una equazione le dimensioni a sinistra e a destra del segno di uguale devono essere le stesse);
le unità di misura usate (che siano consistenti fra loro);
le cifre significative con le quali riportare un risultato;
saper calcolare l' ordine di grandezza del risultato.
Unità di misura: $\rightarrow$ SI: m, kg, s; sono quelle che ci serviranno subito.
Oggi il metro è definito come la distanza percorsa dalla luce in una frazione $1/c$ (c=velocità della luce nel vuoto) di secondo. Infatti $s = c \times t$ e ho che $s = 1$ m quando $c \times t$= 1 m, dunque $t = (1/c)$ s.
Unità derivate (ad es. il newton, unità di misura della forza nel S.I., il pascal della pressione). Notiamo che a volte è più conveniente – 'naturale' — usare altre unità di misura. Tipicamente multipli o sottomultipli delle unità di base, o altro, laddove questo "ci semplifichi la vita": km, cm, ora, anno, ns, anno-luce, massa solare $M_0 \simeq 1.99 \times 10^{30}$ kg, atmosfera 1.01×10^5 Pa, etc..).
Importanza di saper calcolare, valutare, sapere, gli "ordini di grandezza" (evitiamo banali errori di calcolo con la calolatrice, se sappiamo all' incirca che cosa dobbiamo aspettarci).
Quanto vale, circa, la massa della Terra ? ($\approx 5.98 \times 10^{24}$ kg)
E quella atomica ? ($\approx 10 \times 10^{-27}$ kg). Se le esprimete in grammi ?
Calcolate, senza utilizzare la calcolatrice, quanto vale in metri un anno-luce (ossia la distanza percorsa dalla luce in un anno). L' es. serve ad abituarvi a fare un calcolo approssimativo, per valutare l' ordine di grandezza del risultato.
Sol: 1 anno-luce = $2.99792... \times 10^8 \times 365 \times 86400$ m $\approx 3 \times 10^8 \times 365 \times 10^5$ m $\approx 1095 \times 10^{13} \approx 1 \times 10^{16}$ m=1×10^{18} cm
Ora fatelo con la calcolatrice: troverete $9.454... \times 10^{17}$ m.
E quanto vale la distanza Terra-Sole ? Ricordo solo che la luce del sole impiega circa 8 minuti per arrivare sulla Terra. Questa distanza definisce l' AU, l' "unità astronomica". Svolto a lezione.

Io detterò esercizi, di volta in volta. È molto importante che proviate a farli ! Questi ed altri. Tanti.
Tipicamente, li risolveremo insieme dopo qualche giorno, ma non sottovalutate l' importanza di averci almeno pensato.

Cinematica: studio del movimento dei corpi. Ossia del loro spostamento al passare del tempo.

- Moto rispetto a chi? $\rightarrow$ *Sistema di riferimento.* Serve un riferimento spaziale, ma anche uno temporale (origine ed unità di misura per i tempi, ossia un orologio).
- Moto di chi? $\rightarrow$ Schematizzazione di *punto materiale.*

Cinematica: Caso ad una dimensione: diagramma orario $x(t)$. Ad es. il moto di una macchina su una strada rettilinea.
Partiamo da un esempio di un grafico di x(t), spazio percorso (in ordinata) in funzione del tempo (ascissa).
Concetto intuitivo di velocità:
partendo da stampanti e connessioni di rete grafico, velocità di trasmissione dati in funzione del tempo.Ecc.
Velocità come pendenza, esempi.

2. **Seconda settimana (Lezioni da 4 a 8)**

Significato di $v = \Delta x/\Delta t$. (tipicamente, scegliamo $\Delta t > 0$ -freccia orientata dal 'prima' al 'dopo'- e quindi il segno di v dipende dal segno di Δx).

Diagramma orario x(t); traiettoria y(x), se siamo su un piano. Attenzione al significato diverso delle due rappresentazioni.
Moto uniforme in generale e rettilineo uniforme.
Velocità come 'pendenza' di $x(t)$.
Differenza fra "spazio percorso" e "spostamento" (se vado "avanti e dietro", ad es. in piscina, alla fine lo spostamento è nullo, mentre lo spazio percorso è ben diverso da zero !. Stessa cosa su una pista di atletica o sul tapis-roulant in palestra..)
Grafici orari, con velocità costante e costante su alcuni tratti.
Velocità media e istantanea.
Unità di misura: $\rightarrow$ m, s, m/s. $\rightarrow$ *Conversioni.*
Se v_s= 1 m/s, quanto vale espressa in km/h ?
Ecco la soluzione: $v_h = v_s \frac{10^{-3}}{\frac{1}{3600}}$ km/h = 3.6 km/h.
Ossia, 1 metro/secondo sono 3.6 chilometri/ora. Importante: abituarsi a scrivere le grandezze fisiche con le rispettive unità di misura.
Controllo dimensionale
(il 'controllo dimensionale' è ottimo check: se le 'dimensioni' non sono quelle attese ci sono degli errori nella equazione!).

Spazio percorso come area sotto la curva v(t);
Relazione spazio percorso-velocità nel linguaggio differenziale, partendo dallo spazio percorso Δx come somma di tanti $\Delta x_i = v_i \Delta t_i$
Incremento di posizione fra t_1 a t_2 come 'area' sotto la curva $v(t)$ fra $t = t_1$ e $t = t_2$.

Problemini proposti:

(a) Nella prima metà di un certo percorso un' automobile viaggia a velocità v_1, nella seconda metà a v_2. Calcolare velocità media. [Nota: Applicare la formula ad un percorso x =200 km nei seguenti due casi: I) $v_1 = 100\,\mathrm{m/s}$, $v_1 = 50\,\mathrm{m/s}$; II) $v_1 = 100\,\mathrm{m/s}$, $v_1 = 1\,\mathrm{m/s}$. Calcolare anche il tempo di percorrenza di ciascuna metà del percorso].

(b) Esercizio padrone + cagnolino. Il padrone, a 500 m da casa, cammina verso casa a v_p = 2 m/s, costante. Il cagnolino lo vede, da casa, e gli va incontro con v_c = 4 m/s. Lo saluta e torna a casa "ad avvisare" che il padrone sta arrivando. Esce di nuovo, arriva dal padrone e torna a casa. Fa questo finchè il padrone non è arrivato a casa. Quanta è la strada che ha fatto il cagnolino (non lo spostamento, che è nullo) ? Supponete nulli tutti i "tempi di interazione".
Variante: il padrone porta il cagnolino a passeggiare tutte le mattine. Cagnolino e padrone vanno alla stessa velocità di prima (sempre). La passeggiata dura 1 h. Il padrone vorrebbe far stancare il cagnolino il più possibile durante la passeggiata. Lo fa giocare tirandogli una palla, che il cagnolino corre a prendere e gli riporta. In che direzione deve tirare la palla, affincè il cagnolino "si stanchi di più" ? Sempre davanti a sè, sempre dietro, sempre di lato, oppure in modo "random" ? Anche qui supponete nulli tutti i "tempi di interazione" (ossia il cagnolino prende e dà la palla al padrone praticamente senza fermarsi).

Alcune raccomandazioni per lo scritto:
leggete bene il testo, almeno un paio di volte, scrivete in ordine tutti i dati, dando un nome ad ogno cosa (e utilizzate lo stesso nome nello svolgimento dell' esercizio).

Scrivete chiaramente cosa è noto e cosa viene chiesto. Cercate di capire cosa vi serve per ricavare, da cio' che è noto, ciò che viene chiesto. E date un nome anche a queste grandezze. Se possibile, uno schemino o un disegno del problema aiuta. Imp: non affrettatevi a sfogliare libri, quaderni ... (nello scritto, dove è consentito). Cercate prima di capire bene il problema posto. Attenzione alle unità di misura. Attenzione alle analisi dimensionali. **Arrivate fino in fondo con espressioni algebriche**, sostituite i numeri solo "alla fine".
Inoltre: a lezione fate tutte le domande che volete, non abbiate paura ! Ricordate che durante il compito scritto/esonero, potrete chiedere **solo** chiarimenti sul testo.

Concetto intuitivo di accelerazione.
Moto uniformemente accelerato.
Velocità come 'pendenza' di $x(t)$ e accelerazione come 'pendenza' di $v(t)$ ('pendenza' $\rightarrow$ attenzione ad unità di misura!).
Accelerazione nel linguaggio del calcolo differenziale.
Accelerazione media e istantanea.
Calcolo di $x(t)$ come area sotto la curva $v(t) = v_0 + at$ nel moto uniformamente accelerato: area di un trapezio, con base maggiore $v(t)$,base minore v_0, altezza t.
Grafici orari, con accelerazione costante.
Riepilogo e discussione sui grafici $x(t)$, $v(t)$ e $a(t)$

Δx come somma di tanti $\Delta x_i = v_i \Delta t_i$ (mostrato ieri) e, analogalmente Δv come somma di tanti $\Delta v_i = a_i \Delta t_i$.
Incremento di velocità fra t_1 a t_2 come 'area' sotto la curva $a(t)$ fra $t = t_1$ e $t = t_2$.
Velocità varia linearmente con il tempo; posizione varia quadraticamente. $v(t)$ è una retta; $x(t)$ è una parabola.

Esercitazione

(a) Calcolare quanto tempo impiega a frenare una macchina che decelera con $a = -2$ m/s^2 e viaggiava a velocità $v_0 = 100$ km/h. Fatto il calcolo del tempo: $v^* = 0 = v_0 - |a|t^*$. Da cui: $t^* = v_0/|a| = \frac{100 \times 1000}{3600 \times 2} \simeq 13.9$ s.

(b) Problemi di accelerazione e frenata di veicoli sono assolutamente analoghi.

(c) Valori realistici di accelerazioni e spazio di frenata $s(v, v_0)$ da "Quattroruote":
una utilitaria accelera da 0 a 100 km/h in 12-15 s, una macchina sportiva in circa 8 s, una macchina di F1 in circa 3 s, una moto in circa 5 s, una moto veloce in 3-4 s;
spazio di frenata: BMW xxx, a 60 km/h danno 15.4 m, a 100 km/h danno 45.1 m, moto Guzzi xxx, a 60 km/h danno 15 m, a 100 km/h danno 44 m.
Non dovete sapere a memoria tutti questi numeri, ma sapervi orientare sul loro ordine di grandezza.

(d) Continuiamo il problema della frenata: Calcolato t^*, quanto vale lo spazio di arresto? [$\rightarrow d = d(v_0, a)$]. Notiamo che va con v^2 !
Formula empirica che danno nelle scuole guida, per la distanza di sicurezza: $d \approx (v/10)^2$, con v in km/h, e d in metri. Tiene conto anche dei tempi di riflesso. Porta a valori più alti di quelli dati sopra, perchè deve dare una regoletta valida praticamente sempre..ed è meglio "sbagliare" in eccesso, ovviamente..
Calcolato lo spazio di frenata automobile in tre modi diversi (dopo avere calcolato $t^* = v_0/|a|$):
1) da $s(t^*) = v_0\, t^* - 1/2|a|t^{*2} = 1/2(v_0^2/|a|)$;

2) utilizzando la velocità media la val. varia linearmente da v_0 a 0, (la vel. media è: $\frac{v_{in}+v_{fin}}{2}$), dove v_{in} e v_{fin} sono le velocità iniziale e finale nel periodo di tempo considerato)

$s(t^*) = v_M \times t^*$ con $v_M = v_0/2$, e dove, sostituendo $t^* = v_0/|a|$, ottengo la stessa formula di 1);
3) dall' area del triangolo nel grafico $v(t)$: $A = b \times h/2 = v_0 \times t^*/2$.

(e) Risolto esercizio del calcolo della velocità media di una macchina, assegnato: cosa abbiamo imparato ? che la velocità media non è la media delle velocità ! Basti pensare ad una macchina che, dopo aver percorso parte del tragitto, si ferma .... Il punto da capire è che il tempo di percorrenza su ciascuno dei 2 (ad es.) tratti è inversamente proporzionale alla velocità, ossia la macchina ci mette molto tempo di più a percorrere x km se va "più lenta" di prima. Soluzione: $v_1 = \frac{x}{2t_1}$, $v_2 = \frac{x}{2t_2}$. Da cui:
$t_1 + t_2 = x/2\ (1/v_1 + 1/v_2) = x/2\ \frac{v_1+v_2}{v_1\ v_2}$. Ma: $v_{media} = x/(t_1 + t_2)$, da cui: $v_{media} = 2\frac{v_1\ v_2}{v_1+v_2}$.
Numericamente viene 66.7 km/h nel primo caso e 1 km/h nel secondo caso.
Variante: se la macchina percorre 100 km ($= x/2$) a v_1, poi resta ferma ad es. per 2 ore, poi continua ancora per 100 km a v_2, quale sarà la velocità media ? Soluz.: calcoliamo t_1 e t_2 come prima. Sia $t_3 = 2 \times 3600 = 7200$ s. Avremo $v_{media} = x/(t_1 + t_2 + t_3)$, tanto più bassa quanto maggiore è t_3 (a t_1, t_2 potremmo sostituire l' espressione in funzione di x e di v_1, v_2, mentre t_3 va preso numericamente).
Abbiamo anche fatto il grafico di x(t) e di v(t), nel caso del problema proposto ieri.

(f) Dettato es. 1 di esonero del 2/03/06, marzo 2006 ...non spaventatevi ! Provate a farlo, per rendervi conto ...: Una automobile A viaggia a $v = 18$ m/s costante e sorpassa B, inizialmente ferma. Quando A e B sono appaiate B inizia a muoversi con $a = 4$ m/s^2 costante. Det: 1) il tempo necessario a B per raggiungere A; 2) la distanza percorsa da B per raggiungere A; 3) la velocità di B quando raggiunge A.

Ancora sul moto uniformemente accelerato: moto di una pallina lanciata verso l' alto, con velocità iniziale v_0. Trascuriamo la resistenza dell' aria.
Domanda: come varia l' accelerazione mentre la pallina sale e ricade giù ?
Altre domande alle quali vogliamo rispondere: come varia la velocità ? Quanto vale lo spazio percorso ? Quanto vale lo spostamento ?

Premessa: abbiamo tutti dall' esperienza quotidiana il concetto di accelerazione di gravità, $g = 9.8\,\mathrm{m/s^2}$: tutti i corpi nello stesso punto sulla superficie terrestre, nel vuoto e non soggetti ad 'altre forze', cadono con la stessa accelerazione. Dunque, nel moto della pallina, l' accel. resta sempre costante, la velocità invece cambia.
La pallina sale con velocità che diminuisce sempre, arriva ad una quota (ri-

spetto a me che l' ho lanciata) massima $h_{max} = 1/2\ (v_0^2/g)$ (notate l' analogia -stessa equazione- con lo spazio di frenata) in un tempo $t_{max} = v_0/g$ (anche qui notate l' analogia con il tempo di frenata).
La pallina a t_{max} ha vel. nulla e dopo la vel. cambia segno. Infatti la pallina torna giù e, un attimo prima che io la riprenda, ha vel. in modulo uguale a v_0. Il tempo che ci mette a tornare giù è uguale al tempo che ci ha messo a salire ad h_{max}. Tutto questo per motivi ovvi di "simmetria" (il moto è unif. decelerato prima e unif. accelerato dopo, con la stessa accelerazione in modulo, g).
Facciamo anche il grafico v(t)- 2 triangoli-: lo spostamento completamento è chiaramente nullo.
Notate: tutto questo sarà ripreso, chiarito e capito anche meglio quando ragioneremo in termini di energia meccanica e sua conservazione.
Problemini tipici che si risolvono con questo schema:

(a) Corpo cade da una torre di altezza h (trascurando resistenza dell'aria)
   - A che velocità arriva al suolo?
   - Quanto tempo ci mette?

(b) Corpo lanciato verso l'alto con velocità iniziale v_0:
   - A che altezza arriva?
   - Quanto tempo ci mette?
   - A che altezza ritorna alla posizione di partenza?
   - Quanto ci mette a a tornare?
   - Grafico $z(t)$.
   - Come varia la velocità (con segno) da quando l'oggetto parte verso l'alto a quando torna nella posizione iniziale? ($\rightarrow$ grafico.)
   - Grafico di $a(t)$.

(c) **Espressione, nel moto unif. accelerato, di** $s(v)$ **e** $v(s)$, eliminando il tempo dalle equazioni $s(t)$ e $v(t)$. Da $s - s_0 = v_0\ (t - t_0) + \frac{1}{2}a\ (t - t_0)^2$ e $v = v_0\ (t - t_0) + a\ (t - t_0$, si ha: $(t - t_0) = \frac{v - v_0}{a}$ e, sostituendo nella equazione dello spazio percorso, si arriva a $s - s_0 = \frac{(v-v_0)^2}{2a}$. Notate che è proprio l' espressione che abbiamo ottenuto nel problema dello spazio di frenata e del lancio della pallina verso l' alto.
   Questa espressione può essere utile per risolvere "più velocemente" qualche problema, oltre ad essere importante avere chiaro s e v come sono legati fra loro. In generale, non è una formula che è necessario conoscere ... infatti la si ricava molto facilmente avendo note s(t) e v(t), che invece vanno assolutamente "sapute" e capite.

Esercitazione

(a) Risolto esercizio esonero di marzo 2006. Il punto di partenza, dal quale si risolve il problema, è che il tempo al quale B raggiunge A corrsponde al tempo in cui $s_A = s_B$, ossia $v_A \times t^* = (1/2) \times a \times t^{*2}$. Si ricava $t^* = 2 \times v_A/a=$ 9 s. Il resto è immediato: $s^*_B = (1/2)\ at^{*2}$=162 m; $v^*_B = at^*$=36 m/s.

(b) dettato esercizio treno che percorre metà percorso con moto unif. accel. e metà con moto unif. decelerato. Sugg: risolverlo, dove possibile, in modo "grafico" (ossia dal calcolo delle aree sotto una certa curva.).
Testo: due stazioni distano $d = 1.5$ km. Un treno percorre metà cammino con moto unif. accelerato e l' altra metà con moto unif. dec., ma con stessa $|a|$. La velocità massima raggiunta dal treno è nota: $v_{max} = 50$ km/h. Calcolate l' accel. a e il tempo complessivo T_{tot}. Soluzione, in modo grafico: facendo il grafico della velocità in funzione del tempo, si ha un triangolo di altezza v_{max} e base T_{tot}. Dunque lo spazio complessivo, noto, è anche uguale a $s = (1/2)v_{max}T_{tot}$. Da cui $T_{tot} = 2s/v_{max} = 216$ s. Inoltre, $v_{max} = a\frac{T_{tot}}{2}$, da cui si ricava a=0.13 m/s^2.
Fatelo da soli completamente senza l'uso della grafica.

(c) **Risolvete (dettati):** Calcolare la velocità con la quale arriva in acqua un tuffatore che si tuffa da una piattaforma di h=10 m (trascurando la resistenza dell' aria).

(d) All'istante $t_1 = 10$ s un corpo si trova nel punto $x_1 = 5\,$m. Sapendo che il corpo viaggia con velocità costante $v = -2\,$m/s, calcolare la posizione all'istante $t_2 = 15\,s$.

(e) All' istante $t_1 = 2$ s un corpo ha velocità $v_1 = 2$ m/s. Sapendo che è soggetto ad accel. costante $a = 3$ m/s^2, calcolare velocità e posizione al tempo 6 s.
Ricordatevi sempre di scrivere da una parte tutti i dati con i loro nomi (dare un nome ai dati che non lo hanno nel testo e possibilmente non cambiarlo agli altri)

(f) Un' automobile accelera da 0 a 100 km/h in 7 s. Calcolare l' accelerazione media in m/s^2.
Dati: $v_i = 0$ m/s, v_f=100 km/h=100$\frac{1000}{3600}$=27.8 m/s, $t_i = 0$ s, $t_f = 7$ s.

(g) Un uomo lancia un sasso verso l' alto dal tetto di un palazzo, con $v_i = 12.25$ m/s. Il sasso raggiunge il suolo dopo un tempo $t_f = 4.25$ s. Calcolare:
1) quanto è alto il palazzo; 2) l' altezza massima raggiunta dal sasso; 3) la velocità con cui il sasso raggiunge il suolo.
Dati: $v_i = 12.25$ m/s, $t_i = 0$ s, $t_f = 4.25$ s, accel. di gravità $|g| = 9.80$ m/s^2, diretta verso il basso, $h_{palazzo}$ =?? , h_{max} =??, v_{suolo} =?? Sol: si vede abbastanza facilmente che il calcolo di v_{suolo} è immediato. Iniziamo da qui ...così ci incoraggiamo ...:

(h) Un nuotatore fa, a stile libero, 8 vasche da 50 m in 5'30" (non è un agonista "categoria assoluti", ma è abbastanza bravo..). Calcolare la sua velocità media (utilizzando lo spazio percorso, non lo spostamento !).

(i) Avete idea della velocità media con la quale corre un centrometrista (di atletica) forte, esempio record del mondo ? E di un maratoneta ? E La Pellegrini quando ha fatto il record mondiale dei 400 s.l. ?

3. **Terza settimana (Lezioni da 9 a 11. Venerdi' 14 nov. era sciopero)**

Sistema di coordinate sul piano x,y
Breve introduzione sui vettori: modulo,direzione,verso. Proiezione di un vettore sugli assi di un sistema di coordinate. Fase (angolo formato con l' asse delle x). Versori degli assi coordinati $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$, $\hat{k}$ Posizione in 2 dimensioni $\vec{P} = P_x\hat{\imath}+P_y\hat{\jmath}$, con $P_x = |P|\cos\phi$,$P_y = |P|\sin\phi$.
Modulo $|P| = \sqrt{P_x^2 + P_y^2}$, fase $\phi = atan\frac{P_y}{Px}$.

Sui vettori diremo altro ! **Nota**: atan, arco tangente, sulle calcolatrici è indicato con $\tan^{-1}$. Così come arco seno e arco coseno sono $\sin^{-1}$ e $\cos^{-1}$

Traiettoria sul piano x-y.

Moto del proiettile (sul piano x-y)-Introduzione: oggetto lanciato con vel. iniz. v_0 che forma un angolo α con l' asse x. Importante notare che il moto può essere trattato indipendentemente sui due assi. L' unico legame fra ciò che avviene sull' asse x e sull' asse y è dato dal tempo. Allora: Su x non c' è accelerazione, su y c' è l' acc. di gravità. Provate a risolverlo o almeno a pensarci -da soli o fra voi ...senza libri- calcolando x(t),y(t), il tempo del massimo, il tempo che il proiettile impiega a cadere, v_x, v_y e, se ce la fate y(x).

Moto del proiettile (sul piano x-y): oggetto lanciato con vel. iniziale v_0 formante un angolo α con l' asse delle x. Su x non c' è accelerazione, su y c' è l' acc. di gravità. Importante ancora sottolineare che il moto evolve in modo indipendente in ciascuna direzione: su x e' rettilineo uniforme, su y uniformemente accelerato. Abbiamo calcolato: eq. del moto sui 2 assi x e y. Riflessioni sul valore della velocità al massimo della quota e alla fine del lancio (quota di nuovo zero), sia lungo l' asse x che lungo l' asse y. Velocità al tempo in cui la traiettoria raggiunge il massimo: la velocità lungo x è sempre costante $v_x = v_{0x}$, mentre su y ho che $v_y(t) = v_{0y} - |g|\ t$. Al tempo al quale la quota è massima: $v_y(t_{max}) = 0$ (analogamente a quanto avviene nel lancio sulla verticale). Dunque calcolo facilmente $t_{max} = v_{0y}/|g| = v_0\ sin(\alpha)/|g|$. Da qui calcolo anche $x_{max} = x(t_{max})$ e $y_{max} = y(t_{max})$. Poi il tempo totale (fra il lancio, a quota y=0 e la ricaduta a y=0): 2 t_{max}, per ovvi motivi di simmetria. Calcolo della gittata, valore della coordinata x quando y=0, che è 2 x_{max}; Calcolo della traiettoria (parabolica) e della y_{max}, quota massima raggiunta su y, al tempo che abbiamo chiamato t_{max}. Notiamo ancora l' analogia con il lancio sulla verticale (la quota max è la data dalla stessa formula, ovviamente, basta sostituire v_0 con v_{0y}.).

Esercitazione

(a) Nota: sapete fare la conversione da gradi a radianti e viceversa ? deg2rad= $\pi/180$ e rad2deg=$180/\pi$.

(b) Svolto esercizio pag 86 Serway: un piccolo aereo che viaggia con v=40 m/s lancia un pacco di viveri, sulla verticale rispetto a lui. L' aereo si trova a quota h=100 m dal suolo. Calcolo della posizione x_f dove il pacco raggiungera' il suolo, rispetto alla posizione x_i dove era quando è stato lanciato. Aggiungiamo questa domanda: dove si trova l' aereo quando il pacco raggiunge il suolo ?

(c) Svolto e discusso esercizio mamma-bambino di esonero febbraio 2008. Pensate al problema del cagnolino ! Soluzione: Prendiamo come origine della coordinate spaziale la porta di casa. Chiamando v_m la velocità della mamma e $v_b = \alpha v_m$ quella del bambino, avremo

$s_b \;=\; v_b \cdot t$; $s_m = s_0 - v_m \cdot t$. Mamma e bambino si incontrano quando $s_b = s_m$, ossia $\alpha v_m t^* = s_0 - v_m t^*$, da cui $t^* = \frac{s_0}{v_m(1+\alpha)}$ è il tempo di incontro, e
a) $s^* = \frac{\alpha s_0}{1+\alpha}$;
Notiamo che per $\alpha = 1$ i due si incontrano a metà strada e, per $\alpha >> 1$ si incontrano praticamente ad s_0, mentre per $\alpha = 0$, bambino fermo a casa, si incontrano ... a casa.
b) Se $\alpha = 2$ si ha: $s^* = (2/3)s_0$= 66.67 m da casa.
c) Se v_m ed α sono noti possiamo calcolare t^*:
$t^* = \frac{100}{2 \cdot 2}$= 25 s.
Variante: supponiamo che il bambino, quando vede la mamma, si trovi al primo piano ed impieghi $t_0 = 10$ s per raggiungere la porta di casa. Dove si incontreranno stavolta ?
Soluzione: si può ragionare in diversi modi. Il più diretto è riscrivere l' equazione del moto del bambino aggiungendovi un termine di ritardo temporale:
$s_b \;=\; v_b \cdot (t - t_0)$; $s_m = s_0 - v_m \cdot t$. Mamma e bambino si incontrano quando $s_b = s_m$, ossia $\alpha v_m(t^* - t_0) = s_0 - v_m t^*$, da cui ... fate i conti e le considerazioni sulla ragionevolezza del risultato.

(d) **Soluzione di esercizi. assegnati nei gg. scorsi**. Trovate qui la soluzione di tutti:

(e) All'istante $t_1 = 10$ s un corpo si trova nel punto $x_1 = 5\,\text{m}$. Sapendo che il corpo viaggia con velocità costante $v = -2\,\text{m/s}$, calcolare la posizione all'istante $t_2 = 15\,s$.
Sol: $x(t_2) = x_1 + v\;(t_2 - t_1) = 5 - 2 \times (15 - 10)$=-5 m.

(f) All' istante $t_1 = 2$ s un corpo ha velocità $v_1 = 2$ m/s. Sapendo che è soggetto ad accel. costante $a = 3$ m/s^2, calcolare velocità e posizione al tempo 6 s.
Sol: ricordatevi sempre di scrivere da una parte tutti i dati con i loro

nomi (dare un nome ai dati che non lo hanno nel testo e possibilmente non cambiarlo agli altri)
$t_1 = 2$ s, $v_1 = 2$ m/s, $a = 3$ m/s^2=costante, $s_1 = 0$ m (ce lo scriviamo), $t_2 = 6$ s, v_2 =??, s_2 =??.
1) calcolo v_2: $v_2 = v_1 + a\ (t_2 - t_1) = 2 + 3 \times 4$=14 m/s
2) calcolo s_2: $s_2 = s_1 + v_1\ (t_2 - t_1) + (1/2)\ a(t_2 - t_1)^2 = 0 + 2 \times 4 + 0.5 \times 3 \times 4^2 =$ 32 m

(g) Un' automobile accelera da 0 a 100 km/h in 7 s. Calcolare l' accelerazione media in m/s^2.
Dati: $v_i = 0$ m/s, v_f=100 km/h=100$\frac{1000}{3600}$=27.8 m/s, $t_i = 0$ s, $t_f = 7$ s.
Sol.: $v_f = v_i + a_M\ (t_f - t_i) \rightarrow a_M = (v_f - v_i)/(t_f - t_i) = \frac{27.8}{7}$= 3.97 m/s^2.

(h) Esercizio non dettato, fatelo: Un uomo lancia un sasso verso l' alto dal tetto di un palazzo, con $v_i = 12.25$ m/s. Il sasso raggiunge il suolo dopo un tempo $t_f = 4.25$ s. Calcolare:
1) quanto è alto il palazzo; 2) l' altezza massima raggiunta dal sasso; 3) la velocità con cui il sasso raggiunge il suolo.
Dati: $v_i = 12.25$ m/s, $t_i = 0$ s, $t_f = 4.25$ s, accel. di gravità $|g| = 9.80$ m/s^2, diretta verso il basso, $h_{palazzo}$ =?? , h_{max} =??, v_{suolo} =??
Sol: si vede abbastanza facilmente che il calcolo di v_{suolo} è immediato. $v_{suolo} = v_i - |g|\ (t_f - t_i)$=$12.25 - 9.80 \times 4.25 = -29.4$ m/s (negativa perchè rivolta verso il basso e il nostro riferimento, avendo preso v_i positiva era evidentemente positivo verso l' alto)
Ora dobbiamo calcolare $h_{palazzo}$ (che oltretutto ci serve anche per calcolare h_{max}): sappiamo che al tempo t_f il sasso è a terra, ossia alla quota $y = 0$, dunque si ha:
$y(t_f) = 0 = h_{palazzo} + v_i\ t_f - 1/2\ |g|\ t_f^2 \rightarrow h_{palazzo} = -v_i\ t_f + 1/2\ |g|\ t_f^2$= $-12.25 \times 4.25 + 0.5 \times 9.80 \times 4.25^2 = 36.4$ m.
Ora possiamo calcolare h_{max}, quota raggiunta dal sasso al tempo t^* al quale la velocità si annulla (al solito, v diminuisce mentre il sasso va verso l' alto, poi diventa zero, cambia segno e il sasso inizia a cadere): $t^* = v_i/|g| = 1.25$ s. Dunque si ha: $h_{max} = h_{palazzo} + v_i\ t^* - 1/2|g|\ (t^*)^2 \simeq 44$ m.

(i) Un nuotatore fa, a stile libero, 16 vasche da 50 m in 11'. Calcolare la sua velocità media (utilizzando lo spazio percorso, non lo spostamento !).
Sol: $v_M = \Delta s/\Delta t$, con $\Delta s = 8 \times 50 = 800$ m e $\Delta t = 11 \times 60 = 660$ s. si ricava $v_M = 800/600 = 1.2$ m/s.

Ancora esercitazione

- Assegnato Es. 15 pag. 99 Serway (calciatore calcia il pallone verso la traversa): un calciatore calcia un pallone da una distanza $d = 36$ m dalla porta. il pallone deve evitare la traversa che è alta $h = 2.10$ m. Il pallone viene calciato e parte con un angolo di 53^o rispetto all' orizzontale, alla velocità $v_0 = 20$ m/s. Calcolare: 1) a che distanza passa dalla traversa (sopra o sotto, specificandolo); 2) il pallone supera (sopra o sotto) la traversa nella parte ascendente o discendente

della traiettoria ?
Linee guida sol: conosco la distanza fra il calciatore e la porta d. Allora calcolo il tempo t^* al quale il pallone ha percorso la distanza d sull' asse x (ossia è arrivato alla porta) e calcolo a che quota y^* è al tempo t^*=3 s. Viene $y^* = 3.9$ m, dunque la palla passa sopra la traversa di $3.9 - 2.1$=3.9 m. Per sapere se la supera nel tratto ascendente o in quello discendente della sua traiettoria devo confrontare t^* con t_{max} (tempo al quale ho v_y=0, massimo della quota della traiettoria). Viene $t_{max} = 1.6$ s, ossia minore di t^*, dunque il pallone raggiunge la traversa nella parte discendente della sua traiettoria. dove il segno meno indica che a è diretta verso il basso.

4. **Quarta settimana (Lezioni da 12 a 16. 18 novembre-21 novembre**

Ancora sui vettori: somma, differenza in modo grafico e con le componenti.
Prodotto scalare e prodotto vettoriale.
Svolti alcuni esercizi semplici sui vettori e dettati altri.
Spostamento, velocita' e accelerazione in 2 e 3 dimensioni.
Ricordiamo che, se grafichiamo la traiettoria x-y sul piano (l' estensione a 3 dimensioni è immediata, al momento non ci interessa), poichè la vel. istantanea è $\vec{v}_{ist} = \lim_{\Delta r \to 0}(\Delta\vec{r}/\Delta t)= d\vec{r}/dt$, allora la velocità prende la direzione della tangente alla traiettoria nel punto considerato.
Tenete presente che: l' accelerazione può cambiare il modulo della velocità se esiste una sua componente che è parallela alla traiettoria e si chiama "accelerazione tangenziale"; e/o può cambiare la direzione della velocità se esiste una sua componente che è ortogonale alla traiettoria e si chiama "accelerazione radiale".
IMPORTANTE da capire: il moto evolve in modo indipendente nelle direzioni x,y,z.

Esercitazione
Svolto esercizio 2.4.1 pag. 36 Davidson (calcolo dello spostamento sul piano, nel caso di un moto rettilineo uniforme prima lungo una direzione e poi lungo un' altra direzione):
Motociclista viaggia verso EST da un punto P a vel. costante $v_1 = 50$ km/h per 3 ore. Poi gira verso NORD e viaggia a $v_2 = 65$ km/h per 2 ore. Quanto si è allontanato da P ? Sol: $d_1 = v_1 \times t_1 \ = \ 50 \times 10^3 \times 3 = 150$ km (non serve moltiplicare e dividere per 3600 . . .). $d_2 = v_2 \times t_2 \ = \ 65 \times 10^3 \times 2 = 130$ km. Notiamo che EST e NORD sono due direzioni ortogonali fra loro e facciamo il disegno, da cui $d_P = \sqrt{d_1^2 + d_2^2} = 198.5$ km. Ben diverso dalla strada percorsa dalla moto, che è la somma $d_1 + d_2 = 280$ km.

Altri esercizi sui vettori e moto in due dimensioni (dal libro Luci: capitolo 3)

Esercizio di esonero incontro mamma-bambino scorso anno

Cambiamento di sistema di riferimento:
Commenti semplici:

Ricordiamo le operazioni su vettori: prodotto di un vettore per uno scalare (es. $\vec{F} = m\,\vec{a}$) e operatore derivata (es. $\vec{a} = \mathrm{d}\vec{v}/\mathrm{d}t$). Somma di vettori: dati $\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$ e $\vec{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$, dal punto di vista matematico il vettore somma $\vec{c}$, ovvero $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ è ottenuto sommando le componenti, ovvero $c_x = a_x + b_x$, etc. Dal punto di vista fisico:

- si possono solo grandezze omogenee, e quindi, solo vettori omogenei ("mele con mele e patate con patate", come si diceva alle elementari);
- va prima provato che tale operazione abbia senso, ad esempio
  - Somma di due forze: $\vec{F}_c = \vec{F}_a + \vec{F}_b$: l'effetto di dell'applicazione simultanea di $\vec{F}_a$ e $\vec{F}_b$ è esattamenta uguale a quella di $\vec{F}_c$ se le due forze sono applicate ad un punto materiale. L'effetto è un più complicato se le forze sono applicate ad un corpo esteso.
  - Somma di due velocità: $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \vec{v}_3$ ha senso se $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ e $\vec{v}_3$ hanno un significato ben preciso e se le velocità sono molto piccole rispetto a quella della luce (trasformazione Galileiana delle velocità, vedi nel seguito.). Se invece le velocità sono confrontabili con quella della luce tale formula di somma non è applicabile ($\rightarrow$ teoria della relatività ristretta di Einstein).

Trasformazione galileiana delle velocità. In genere, se un corpo si muove con $\vec{v}$ nel sistema di riferimento S, e il sistema di riferimento si muove rispetto a S' con velocità costante $\vec{v}(S)$:

$$\vec{v}' = \vec{v}(S) + \vec{v} \tag{1}$$

$$\vec{a}' = \vec{a} \tag{2}$$

Se la velocità di S rispetto a S' è costante allora l' accelerazione del corpo nei 2 sistemi di riferimento è la stessa.
Caso del nuotatore sul fiume:

$$\vec{v}_{nR} = \vec{v}_{nF} + \vec{v}_{FR}\,, \tag{3}$$

ove $\vec{v}_{FR}$ è la velocità del fiume rispetto alla riva, $\vec{v}_{nF}$ la velocità del nuotatore rispetto al fiume e $\vec{v}_{nR}$ la velocità del nuotatore rispetto alla riva. Scegliendo opportunamente gli assi abbiamo $\vec{v}_{FR} = (v_F, 0)$, $\vec{v}_{nF} = (v_L, v_T)$ (ove v_L e v_T stanno per velocità longitudinale e trasversale rispetto alla corrente), per cui $\vec{v}_{nR} = (v_F + v_L, v_T)$. Casi elementari sono quando la velocità del nuotatore è solo lungo la corrente o trasverale ad essa.
Problemi, entrambi svolti e ampiamente discussi:
Ricordatevi di fare sempre dei "ragionamenti al limite", per verificare se una formula trovata o una vostra intuizione, sono corrette.

(a) Un uomo corre con v_P=5 km/h rispetto alla strada (riferimento in quiete). Un' automobile procede nella stessa direzione con v_a=50 km/h (riferimento in moto). Trovare la velocità dell' uomo rispetto all' auto. Il risultato è che il guidatore vede l' uomo avvicinarsi ad una velocità di -45 km/h. Qui un ragionamento al limite potrebbe essere: e se l' uomo è un supeeroe e scappa alla stessa velocità della macchina ? Ovviamente il guidatore deve vederlo fermo, perchè si mantengono sempre alla stessa distanza relativa.

(b) Si immagini una gara di nuoto su un fiume, con le corsie, lunghe 50 m, disposte parallelamente al verso della corrente. Il fiume ha una velocità di 1 m/s. Calcolare il tempo che un centometrista farà sul fiume se nuota ad una velocità tale che in una piscina olimpionica ($2 \times 50\,\mathrm{m}$) avrebbe fatto 60 s netti. Attenzione al solito problema che la velocità media non è la media delle velocità. Vanno calcolati i tempi nei due tratti e poi sommati. Abbiamo calcolato l' espressione del tempo totale in funzione delle velocità e dello spazio. Traccia della sol:
Sia s=50 m; $v_n = 100/60 = 1.67$ m/s velocità del nuotatore in piscina, ossia quella che ora ha rispetto al fiume; $v_F = 1$ m/s vel. del fiume, che una volta si somma e una volta si sottrae a quella del nuotatore.
Si ha: $t_1 = s/(v_n - v_F)$, $t_2 = s/(v_n + v_F)$, da cui: $t = t_1 + t_2 = 2s\frac{v_n}{v_n^2 - v_F^2}$.
Ragionamenti al limite: cosa succede se la vel. del fiume e quella del nuotatore sono uguali in modulo ? E se la vel. del fiume fosse nulla ?

(c) Un fiume scorre con velocità v_F= 5 km/h (ad esempio, verso Est) Una barca va con velocità v_b=10 km/h sul fiume in direzione trasversale a quella di scorrimento della corrente (verso Nord).
   i. A che velocità la barca si muove rispetto alla riva? (vettore e modulo). Avremo $\vec{v_{br}} = (5\,i, 10\,j)$ km/h. Da cui $|v_{br}| = \sqrt{5^2 + 10^2} = 11.2$ km/h.
   ii. Trovare l'angolo fra la direzione del moto della barca e quella di scorrimento dell'acqua. Troviamo: $\phi = arctg\frac{10}{5}$= 63.4 ^{o}, rispetto all' asse indicato con il versore i

(d) "Endless pool" o "Counter-current" pool: sono allenanti. Cercate su google !

Moto circolare uniforme: fra qualche lezione

Dinamica

(a) Introduzione alla dinamica e al concetto intuitivo di forza (forza come variazione dello stato di moto di un oggetto). Punto di vista di Aristotele e di Galileo. Esempi riferendosi a forze che si equilibrano ("statica"), forze che mettono in moto un corpo ("dinamica"), forza peso, forza centrifuga (che ci trascina verso l' esterno-o l' interno- della macchina quando percorriamo una curva).

(b) Principio d' inerzia (primo principio della dinamica o prima legge di Newton); Sistema di riferimento inerziale.

(c) Secondo principio della dinamica: $F = m\,a$ (seconda legge di Newton), da imparare a leggere '$a = F/m$', nel senso che i problemi tipici sono quelli di dedurre la cinematica dei corpi a partire dalle forze in gioco. F sta per *risultante delle forze* che agiscono su m. Unità di misura della forza (newton);

Primo esempio di forza:

(a) *Forza gravitazionale (legge della gravitazione di Newton)* fra due corpi:

$$F = -G \frac{m_1 m_2}{d^2} \tag{4}$$

con m_1 e m_2 la massa dei due corpi, d la loro distanza (fra i loro 'centri' se si tratta di corpi estesi — un concetto che sarà chiarito nel seguito) e G una costante opportuna tale che se le masse sono espresse in kg e la distanza in m, la forza risultante sarà in Newton (N): $G = 6.67300\times10^{-11}\,\mathrm{m^3kg^{-1}s^{-2}} = 6.67300 \times 10^{-11}\,\mathrm{N\,m^2/kg^2}$. Il segno negativo sta ad indicare che la forza è *attrattiva*.

(b) Nota imp.: le cose vanno come se la massa della Terra fosse tutta concentrata nel suo centro. Accenno al "teorema di Gauss".

(c) massa gravitazionale;

(d) È maggiore la forza con la quale la Terra attira uno di noi o quella con la quale noi attiriamo la Terra ?

(e) Notiamo l' analogia con la *Forza elettrostatica* (di Coulomb) fra due corpi carichi:

$$F = k_0 \frac{Q_1 Q_2}{d^2} \tag{5}$$

ove Q_1 e Q_2 sono le cariche espresse in Coulomb (C), d come sopra e k_0, altra costante, di valore $k_0 = 9 \times 10^9\,\mathrm{N\,m^2/C^2}$.
Si noti come questa forza può essere repulsiva o attrattiva a seconda del segno relativo delle cariche.
Entrambe (grav. ed elettr.) hanno la stessa struttura e sono forze "centrali", che agiscono a distanza, non per contatto.

5. **Quinta settimana (Lezioni da 17 a 21 (ma 25/11-ve 28/11))**

Continuiamo con le forze: *Forza gravitazionale fra due corpi*:

$$F = -G \frac{m_1 m_2}{d^2} \tag{6}$$

Conoscendo la formula della forza si può determinare l'accelerazione da $a = F/m$ (se questa è la sola forza agente):

(a) *forza gravitazionale*: $a_1 = -G\, m_2/d^2$, $a_2 = -G\, m_1/d^2$
(caso particolare di uma massa m sulla superficie terrestre: $F = -G\, M_T\, m/R_T^2$, da cui $a = -G\, M_T/R_T^2 \equiv -g$);
$R_T = 6.37\ 10^6$ m, $M_T = 5.98\ 10^{24}$ kg. g viene ≈ 9.80 m/s^2; provate a fare il conto con la calcolatrice.

(b) Massa inerziale e massa gravitazionale;

(c) : Concetto di campo (gravitazionale, elettrostatico). $\vec{C} = \vec{F}/s_{campo}$ dove s_{campo} è la sorgente del campo (massa o carica nei casi considerati). Ad esempio la massa della Terra.

(d) Teorema di Gauss per il campo gravitazionale: senza dimostrazione. Lo faremo poi per il campo elettrico e in modo intuitivo per la forza gravitazionale. La Terra, schematizzata come una sfera perfetta, attira un corpo sulla sua superficie come se tutta la sua massa fosse concentrata nel centro.

(e) $\vec{g}$ all' equatore e ai poli. Il valore convenzionale di g un valore medio assunto convenzionalmente che approssima il valore dell'accelerazione di gravit prodotta al livello del mare ad una latitudine di $45,5\,$deg dalla Terra su un grave lasciato in caduta libera. Il suo valore aumenta con la latitudine: 9.823 m/s^2 ai poli e 9.789 m/s^2 all'equatore.

Forza e accelerazione

(a) Riprendiamo l' esempio della attrazione gravitazionale Terra-palla sulla superficie e palla-Terra. Le due forze $\vec{F_{Tp}}$ e $\vec{F_{pT}}$ sono uguali e contrarie, applicate una alla palla e l' altra alla Terra, ma le due accelerazioni sono MOLTO diverse (stessa forza non vuol dire stessa accelerazione, ovviamente). Ossia:

(b) In modulo, la forza con la quale la Terra attira la palla e quella con la quale la palla attira la Terra è la stessa. La forza gravitazionale ha un' espressione simmetrica nelle 2 masse (quella che esercita la forza e quella che ne risente). Ma allora, come mai la palla casca verso la Terra e la Terra non casca verso la palla ?

Come detto, stessa forza non vuol dire stessa accelerazione ... Noi cadiamo sulla Terra con accelerazione $\vec{g}$, mentre l' accelerazione di cui la Terra risente è $\vec{g}\ m/M_{terra}$, dove il rapporto m/M_{terra} è piccolissimo. Se m è circa 50 kg ad es., $50/5.98 \times 10^{24} \approx 8 \times 10^{-25}$, ossia le Terra non subisce alcuna accelerazione per causa nostra ... e per fortuna continua il suo moto imperturbata.

Ora andiamo avanti e discutiamo il

(c) **Terzo principio della dinamica (azione e reazione)**. Attenzione: azione e reazione sono applicate a corpi diversi ! Esempio con la forza gravitazionale e con un oggetto in equilibrio su un tavolo: mg e N, forza normale che il tavolo esercita sull' oggetto, non sono una coppia azione-reazione. Una coppia azione reazione, ad es., è la forza che il tavolo esercita sull' oggetto, applicata all' oggetto e quella che l' oggetto esercita sul tavolo, applicata al tavolo.

Esempio con elastico che tira un corpo. Bilancio quando il corpo è in equilibrio sul tavolo, con me che tiro l' elastico a cui è attaccato. Quale forza mi sta contrastando ?

Altri esempi di forze, iniziamo con la molla:

(a) *Forza elastica* (di una molla)

$$F = -k\,x\,, \tag{7}$$

ove x è preso dalla posizione di equilibrio (a volte si incontra Δx invece di x, ad indicare che si tratta di una differenza rispetto a x_0 di equilibrio) e k è una costante, dipendente dalla molla, di unità N/m.
La forza è negativa se x è positivo, positiva se x è negativo, in quanto è una *forza di richiamo* verso la posizione di equilibrio $x = 0$.

Dinamometro (bilancia a molla): molla in verticale. Si attacca la massa che si vuole misurare. Per la legge di Hooke, si ha un allungamento della molla (rispetto alla posizione di riposo) pari, all' equilibrio, ad mg: $K\Delta x = m\ g$. La scala del dinamometro viene tarata in unità di massa, grammi o kg, supponendo nota g (messa al valore tipico Terra . . . sulla Luna questa bilancia non darebbe il valore di massa corretto . . .)

Notiamo che massa e peso sono due entità diverse, l' una si misura in kg e l' altro in newton. La massa è una caratteristica intrinseca e univoca del corpo, mentre il peso dipende dalla forza con la quale si viene attratti dal corpo celeste sul quale ci si trova. Con il dinamometro si misura la massa, supponendo nota e costante l' acc. di gravità. Se vogliamo una misura di massa indipendente da g dobbiamo usare una "bilancia a due bracci".

Continuiamo con altri esempi di forze

(a) *Forza di attrito statico e dinamico* indipendente dalla velocità su piano orizzontale:

$$F = -\mu_s\,m\,g\,\hat{v}\,, \tag{8}$$

$$F = -\mu_d\,m\,g\,\hat{v}\,, \tag{9}$$

ove μ_s è il *coefficiente di attrito statico*, μ_d è il *coefficiente di attrito dinamico*, m la massa del corpo e $\hat{v}$ il *versore* della velocità.
Questa forza è sempre frenante.

(b) *Forza di viscosità* dipendente linearmente dalla velocità:

$$F = -\beta\,v\,, \tag{10}$$

ove β è un opportuno coefficiente e v la velocità.

(c) *Forza di tensione* un filo inestensibile fissato ad un corpo esercita sul corpo una forza T. La forza si trasmette lungo tutto il filo. Non sottovalutate l' importanza delle forze di tensione !

(d) *Forza normale* quando un corpo comprime una superficie risente di una forza N da parte della superficie. ortogonale alla superficie stessa;

In generale ricordiamo che conoscendo la formula della forza si può determinare l'accelerazione da $a = F/m$ (se questa è la sola forza agente):

(a) *forza elettrostatica*: $a_i = (1/m_i)\, k_0\, Q_1\, Q_2\, /d^2$;
(b) *forza elastica*: $a = -(K/m)\, x$;
(c) *forza di attrito dinamico* $a = -\mu_d\, g$;
(d) *forza di viscosità* $a = -(\beta/m)\, v$;

Tutto..o quasi..sull' attrito
Attrito statico e dinamico;
Esempi sperimentali: peso trascinato da un elastico ("molla") sul piano della cattedra e su un altro materiale (panno,vimini). Stesso esperimento aumentando il peso (usiamo una scatolina piena di palline di vetro) Cosa si osserva ? Scatolina su un foglio di carta: se tiro il foglio "lentamente", la bottiglietta si muove con il foglio, se dò uno strattone il foglio si muove e la scatolina resta ferma. Perchè ?

Valori tipici di μ_S e μ_D. Li trovate comunque sul libro.
Importante ricordare che sono entrambi, per definizione, minori di 1 e adimensionali. Es.: acciaio-acciao: 0.74,0.54; gomma-cemento: 1,0.8; vetro-vetro: 0.94,0.4; articolazioni: 0.01, 0.003 (basso, per fortuna ...)

Calcolo della tensione del filo con una massa attaccata nei 3 casi: equilibrio, lo spingo verso il basso, lo tiro verso l' alto. La busta della spesa si sta rompendo..: cosa conviene fare rapidamente ? Tirarla verso l' alto o spingerla verso il basso ?

Esercitazione Pesare un pacco in ascensore, con $a > 0$,$a < 0$ e $a = g$ (si ha la "caduta libera" se il cavo dell' ascensore si spezza ...). Immaginiamo la massa da pesare m_p attaccata nell' ascensore ad un dinamometro. Con una bilancia sotto sarebbe la stessa cosa. Sol: prendo il rif. positivo verso l' alto. In generale: $\vec{T} + m_p\, \vec{g} = m_p\, \vec{a}$, dove $\vec{T}$ è la tensione della fune, $\vec{a}$ l' accel. dell' ascensore.
Ascensore che sale, $\vec{a} = a$, positivo. Si ha: $T - m_p\, g = m_p\, a$ da cui $\rightarrow T = m_p(a + g)\ >\ m_p g$, ossia il pacco "pesa di più"; Ascensore che scende, $\vec{a} = -a$, negativo. Si ha: $T - m_p\, g = -m_p\, a$ da cui $\rightarrow T = m_p(g - a)\ <\ m_p g$, ossia il pacco "pesa di meno"; Cavo che si spezza, $\vec{a} = \vec{g}$. Si ha: $T - m_p\, g = -m_p\, a$ da cui $\rightarrow T = m_p(g - a) = 0$, ossia il pacco "non pesa nulla";
Per capire l' entità dell' effetto riscriviamo la relazione $T = m_p(g \pm a)$: $T = m_p\, g(1 \pm a/g)$. Dunque l' entità dell' effetto dipende dal rapporto a/g. Se $a = 2$ m/s l' effetto è del 20%.

Dettato esercizio da svolgere: (Es.7 pag. 131 Serway) trovare accelerazione, modulo e fase, date $\vec{F_1}$ e $\vec{F_2}$ che agiscono su una massa, inizialmente a riposo, $m = 5$ kg. Le due forze hanno modulo, rispettivamente, 20 N e 15 N e formano fra loro a) un angolo $\alpha = 90^o$ e b) un angolo $\alpha = 60^o$. Soluzione più avanti negli appunti (dopo settima settimana)

Dettato: un oggetto lanciato verticalmente verso l'alto impiega 4 secondi prima di tornare al punto di partenza. Trovare:
1) l'altezza massima alla quale arriva l'oggetto; 2) la velocità che esso possiede quando è a metà dell'altezza massima (si trascuri la resistenza dell'aria). Soluzione Più avanti vedremo che si può svolgere anche con il bilancio energetico.

(a) **Piano inclinato senza attrito**. Importante una scelta semplice e sensata degli assi. Prendiamo x parallelo al piano e y ovviamente ortogonale al piano. Equilibrio su y, moto unif. accel. su x, con $a = m\ g\ \sin(\alpha)$, dove α è l' angolo formato dal piano inclinato con l'orizzontale.
"Situazioni limite: $\theta = 0$ (accelerazione nulla) e $\theta = \pi/2$ (accelerazione pari a g) Fate, esercizio sul piano inclinato (pag. 124 Serway): un bambino trattiene ferma una slitta che pesa 77 N su un pendio privo di attrito (ghiacciato, il bambino ha scarpe chiodate), che forma un angolo di $\alpha = 30^o$ con l' orizzontale. Calcolare a) il modulo della forza che il bambino deve esercitare sulla fune, b) il modulo della forza che il piano inclinato esercita sulla slitta. Sol: a) all' equilibrio (slitta ferma) $F_b = (m_s\ g) \sin\alpha$= $77\times \sin\alpha$= 77 $\times$ 0.5=38.5 N; b) $F_p = (m_s\ g) \cos\alpha$= $77\times \cos\alpha$= 77 $\times$ 0.86=66.7 N;

(b) **Piano inclinato con attrito**: situazione dinamica e situazione statica. Nella situazione dinamica un corpo sul piano scivola verso il basso con accel. minore della situazione in cui non c' è attrito: $a = g \sin(\alpha) - \mu_D g \cos(\alpha)$. Siamo nella situazione in cui la gravità lo fa scivolare verso il basso e l' attrito tende a frenare questo moto verso il basso. Le 2 accelerazioni hanno segno opposto fra loro !
Invece $a = -(g\ sin(\theta) + \mu_D\ g\ cos(\theta)$ nel caso in cui la massa stia salendo sul piano (perchè è stata spinta). Il corpo sale per un certo tratto, rallentato finchè non si ferma, sia dalla forza di gravità che dall' attrito. Notiamo dunque che le forze di gravità e attrito, in questa situazione, ostacolano entrambe il moto e pertanto hanno lo stesso segno. Se non ci fosse attrito il corpo salirebbe di più. Studiamo ora il caso di equilibrio: calcolo di $tan\theta_S = \mu_s$ e di $tan\theta_D = \mu_D$ (angolo tale che il corpo continui a muoversi con v=costante, ossia $a = 0$).
Mostrato in classe, con un "piano inclinato" fatto con una scatola (vuota, di cioccolatini) e un pesetto (scatoletta di palline). Vediamo che, per inclinazioni basse, il pesetto non scivola. Da una certa inclinazione in poi scivola. Se aggiungiamo un panno fatto di materiale tale che l' attrito con la scatola sia maggiore di quello del solo vetro del pesetto usato, notiamo una grande differenza nella inclinazione minima del piano. Possiamo anche calcolare μ_S, inclinando il piano alla massima inclinazione possibile senza che il pesetto scivoli e misurando, con il metro, i due cateti del triangolo rettangolo formato dal piano con la cattedra ($\mu_D = l_y/l_x$). Lo facciamo con l' aiuto di due studentesse e misuriamo: $ipotenusa$ = 40 cm, l_y = 14 cm. Da qui si ricava l_x =?? cm. Dunque $\mu_D = l_y/l_x$ =, che significa un angolo di circa xx^o. Fatelo !

Esercitazione: matematica e cinematica Vedi appunti alla pagina web, sotto "Altro materiale didattico": cinematica e derivate...che fra pochi giorni mettero' Grafico e commenti sulle funzioni $cos(\omega t + \phi_0)$ e $sin(\omega t + \phi_0)$.

6. $\boxed{\textbf{Sesta settimana: lezioni 22-26 (da Ma 2 dic.)}}$

(a) **Moto circolare uniforme (lezione con G. D' Agostini)**.
Metterò appunti dettagliati, visto che l' approccio è diverso dai libri che avete.
Periodo (tempo per fare un giro $T = 2\pi r/v$), frequenza ν (numero di giri in un secondo, misurata in hertz=1/s), velocita' angolare ω (angolo $\Delta\theta$ spazzato in un tempo Δt, misurata in rad/s,
$\omega = 2\pi/T$).
Se ad esempio il periodo è 1 s, la frequenza sarà 1 Hz (ossia in un secondo ho fatto 1 giro) e la velocità angolare 2π (in un secondo ho spazzato un angolo 2π).

(b) Accelerazione tangenziale: cambia il modulo della velocità
e radiale: cambia la direzione del vettore velocità.

(c) Accelerazione centripeta a_c (non c'e' accelerazione tangenziale, perchè il modulo della velocità è costante): radiale e diretta verso il centro della circonferenza. a_c in funzione di v,di ω, di T e di ν.
$|v| = \omega\ r$; $a_c = -v^2/r = -\omega^2\ r = -(\frac{2\pi}{T})^2\ r$

(d) Forza centripeta. Attenzione: non è una nuova forza ! Nel diagramma delle forze non va disegnata una freccia che corrisponde alla forza centripeta !
L' acc. centripeta, e dunque la forza centripeta, viene data da una delle forze in gioco nel problema in esame. Esempi classici:
sasso che ruota legato ad una corda $\rightarrow$ tensione della corda: $\vec{T} = m\vec{a}$ da cui $T - ma = 0$, $T = ma = m\omega^2 r = mv^2/r$;
Sasso che ruota legato ad una molla $\rightarrow K\vec{x}$:
Terra che ruota attorno al Sole $\rightarrow$ forza gravitazionale;
Automobile in curva $\rightarrow$ attrito statico delle ruote sull' asfalto.

Accelerazione centripeta ed esempi:

(a) Moto circolare uniforme e accelerazione centripeta:
accelerazione centripeta della Terra nel suo moto attorno al Sole (con calcolo approssimato della distanza Terra-Sole partendo dall' informazione che la luce del Sole impiega circa 8 minuti per raggiungere la Terra);
Come si fa ? $d_{TS} \approx 8.3$ min-luce$= 8.3 \times 60 \times 3 \times 10^8$ m $\approx 1.5 \times 10^{11}$ m.
Inoltre $T_{1anno} = 365 \times 86400$ s $\approx 3.2 \times 10^7$ s. $a_{cTS} = (\frac{2\pi}{T})^2\ d_{TS} \approx 5.95 \times 10^{-3}$ m/s^2.

(b) Accelerazione centripeta della Terra nel suo moto di rotazione su sè stessa e conseguenze sul valore di g.
Notiamo inanzitutto che la pulsazione, ossia la frequenza di rotazione della Terra attorno al suo asse è ovviamente ovunque la stessa, mentre la velocità lineare v dipende dalla distanza dall' asse di rotazione, ed è pertanto massima all' equatore e nulla ai poli. Il periodo è di un giorno

$T = 24 \times 3600 = 86400$ s, $R_T = 6.37 \times 10^6$ m.
$a_{cT} = (\frac{2\pi}{T})^2\ R_T \approx 3 \times 10^{-2}$ m/s^2, se siamo all' equatore, dove è massima. Dunque è ovunque molto minore di g. E' nulla ai poli.

(c) Se sto su una bilancia all' equatore $\vec{T}+m\vec{g} = m\vec{a}$, prendendo il rif. positivo verso l' esterno: $T - m\ g = m\ a = -m\ \omega^2\ R_T \rightarrow\ \ T = m(g - \omega^2\ R_T)$. Dunque l' accelerazione risultante, pertanto il peso, è diminuita dalla presenza dell' acc. centripeta, ma numericamente l' effetto è trascurabile. L' effetto è massimo all' equatore, diminuisce andando verso i Poli, a latitudini più alte, ed è nullo ai Poli.

(d) Derivazione della terza legge di Keplero da $-GM_s m_p/d^2 = m_p(2\pi/T)^2\ d$. Si trova che $T^2 \approx d^3$. Nelle orbite dei satelliti o pianeti la forza centripeta è dovuta alla forza di gravità.
d qui è il raggio dell' orbita del pianeta o satellite considerato. Mercurio era il messaggero degli dei ed era chiamato "piè veloce". Perchè è stato dato questo nome proprio al pianeta più vicino al Sole ?

(e) Trovare la distanza dal centro della Terra di un satellite geostazionario. Il punto di partenza è capire cosa vuol dire "geostazionario": rispetto alla Terra è fermo (se non fosse così i satelliti non potrebbero essere utilizzati nella trasmissione dei segnali). Dunque un satellite geostazionario deve ruotare attorno alla Terra con lo stesso periodo con il quale la Terra ruota su sè stessa: durata di un giorno siderale 86140 s ($\approx$ durata del giorno solare medio).
Capito questo: $G\,M_T/d^2 = a_c = \frac{(2\pi)^2}{T^2}\ d$; $M_T = 5.98\ 10^{24}$ kg. Si trova $d^3 = \frac{M_T g T^2}{(2\pi)^2}$, da cui $d \simeq 4.2 \times 10^4$ km, distanza dal centro della Terra, ossia circa 36000 km dalla superficie.

(f) Esercizio (Serway pag. 95 es. 3.7): Una astronave è in orbita al di sopra della superficie terrestre a 200 km. Il periodo dell' orbita è $T = 88.2$ minuti. Calcolare l' acc. centripeta a_c e la velocità v. Notiamo che la distanza dal centro della Terra è: $d = R_T + 200 \times 10^3$ m=66.5×10^6 m.
Confrontate il valore dell' acc. centripeta ottenuta con g e rifletteteci sopra.
Viene $a_c = 9.25$ m/s^2. E $v = \frac{2\pi d}{T}$ viene circa 28000 km/ora.

(g) Calcolare la massima velocità alla quale posso far ruotare, su un piano orizzontale, un sasso di massa m nota, attaccato ad una corda di lunghezza nota l, la quale sopporta una massima tensione T_{max} prima di rompersi:
Sol: $T = mv^2/l$, da cui $v_{max} = \sqrt{T_{max} l/m}$.

Moto armonico:

(a) Dal moto circolare uniforme proiettando i vettori x(t), v(t) e a(t) su un diametro.
Avete già visto che $x(t) = R\ \cos(\omega t + \phi_0)$; $v(t) = -\omega R\ \sin(\omega t + \phi_0)$;
$a(t) = -\omega^2 R\ cos(\omega t + \phi_0) = -\omega^2 x(t)$;
Dove ϕ_0 è una fase iniziale, tipicamente la potremo prendere nulla. Ricordo

ancora che l' angolo "spazzato" è $\alpha = \omega t + \phi_0$, in analogia con lo spazio "percorso" $s = vt + s_0$.

(b) Equazioni del tipo $d^2x/d^2t + Kx = 0$ rappresentano sempre un moto armonico con $\omega = \sqrt{K}$ e $T = (2\pi)/\sqrt{K}$.

Molla e moto armonico:

i. Se la lunghezza iniziale era L_0 e aggiungo una massa $m \rightarrow$ posizione di equilibrio L_{eq}, tale che forza elastica bilancia forza di gravità. Con riferimento verso il basso:

$$mg - k\,(L_{eq} - L_0) \;=\; 0\,. \tag{11}$$

Per una generica posizione $L = L_{eq} + x$

$$\begin{aligned} F_x &= mg - k\,(L - L_0) = mg - k\,(L_{eq} + x - L_0) && (12)\\ &= mg - k\,(L_{eq} - L_0) - k\,x && (13)\\ F_x(x) &= -k\,x\,. && (14)\end{aligned}$$

Ricordando "$F = m\,a$", otteniamo $a_x(x) = -(k/m)\,x$, ovvero

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}\,t^2} \;=\; -\frac{k}{m}\,x\,. \tag{15}$$

ii. Cosa ci ricorda la relazione (15) ?: $\rightarrow$ moto circolare uniforme. Calcolo di $\omega = \sqrt{(k/m)}$ e $T = 2\pi\sqrt{(m/k)}$.

(c) Il **pendolo** semplice: periodo delle piccole oscillazioni ($sin\theta \approx \theta$). Massa m legata ad un punto da un filo inestensibile di lunghezza l e massa trascurabile. Coordinata curvilinea s lungo la circonferenza, con $s = 0$ in corrispondenza della verticale e verso positivo quando l'angolo θ è "a destra". Scomposizione delle forze:

$$\begin{aligned} m\,g\cos\theta &\;\Rightarrow\; \text{compensata dalla tensione del filo} && (16)\\ -m\,g\sin\theta &\;\Rightarrow\; \text{forza tangente} \Rightarrow \text{moto di}\,m. && (17)\end{aligned}$$

Di nuovo, da "$F = m\,a$", segue

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}\,t^2} &= -g\,\sin\theta && (18)\\ l\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}\,t^2} &= -g\,\sin\theta && (19)\\ \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}\,t^2} &= -\frac{g}{l}\,\sin\theta, && (20)\end{aligned}$$

ove abbiamo usato la relazione $s = l\,\theta$ (che deriva dalla definizione di radiante: $\theta = s/l$). Nell'approssimazione di piccoli angoli ($\theta \ll 1$, con θ

espresso in radianti): $\sin\theta \approx \theta$, ove l'approssimazione si intende valida per $\theta \lessapprox 0.1$ radianti, ovvero $\lessapprox 5$ gradi:

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}\,t^2} \approx -\frac{g}{l}\,\theta\,. \tag{21}$$

Cosa ci ricorda la relazione (21)? : $\rightarrow$ moto circolare uniforme:

$$\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}\,t^2} = -K\,z\,, \tag{22}$$

ove z è una generica variabile dipendente dal tempo, ovvero $z(t)$.
Pulsazione $\omega = \sqrt{g/l}$, periodo $T = 2\pi\sqrt{l/g}$.

(d) **Esercitazione:** Calcolate il semiperiodo di un pendolo di lunghezza 1 m. Calcolate di quanto devo allungare o accorciare il filo del pendolo per avere lo stesso periodo sulla Luna.

Ancora sulla dinamica

(a) concetto di "filo inestensibile" e tensione $\vec{T}$: la tensione viene trasmessa identica su tutto il filo, masse collegate da un filo inestensibile si muovono con la stessa accelerazione (in modulo)

(b) La carrucola. Macchina di Atwood (es. 4.4 pag. 124 Serway): calcolo tensione del filo e dell' accelerazione delle 2 masse. Discussione del caso $m_1 = m_2$, in cui si ha $T = m_1\,g = m_2\,g$ e il sistema è in equilibrio ($\vec{a}$=0). E discusso il caso $m_1 >> m_2$, che corrisponde alla "caduta libera", $|\vec{a}| = |\vec{g}|$ con l' ovvio vincolo dato dalla lunghezza del filo. Per risolverlo abbiamo preso l' asse y positivo verso l' alto per entrambe le masse. Notiamo che la tensione T è la stessa per entrambe, rivolta verso l' alto, mentre l' acc. è la stessa in modulo $|a_1| = |a_2|$, ma opposta in segno (se una massa sale l' altra scende). Avremmo anche potuto prendere il rif. positivo verso l' alto per descrivere il moto di m_1 e positivo verso il basso per descrivere il moto di m_2, ad esempio. Basta essere consistenti con la scelta fatta nello scrivere le equazioni. Il risultato non cambia.

Esercitazione

(a) Dettato e svolto in parte, es. 33 pag. 133 Serway. Completatelo, trovate qui la soluzione completa. Testo: 2 masse $m_1 = 8$ kg, $m_2 = 2$ kg collegate da filo e carrucola su un piano s.a., m_1 è sul piano, mentre m_2 è sulla verticale, attaccata al filo. Su m_1 agisce una forza F_x costante. Domande: a) per quali valori di F_x, la massa m_2 accelera verso l' alto ? b) per quali valori di F_x, la tensione della fune è nulla ? ; Sol: riferimento x positivo verso destra, diretto come F_x e y positivo verso l' alto. $F_x - T = m_1 a$, $T - m_2 g = m_1 a$, dove a è la stessa per le due masse, anche nel segno (se m_1 va verso destra, m_2 sale: accel. positiva per tutte e due le masse). Sommando le 2 equazioni ho: $F_x - m_2 g = (m_1 + m_2)a$, da cui $a = \frac{F_x - m_2 g}{m_1 + m_2}$.

Dunque l' acc. è positiva se F_x è maggiore di $m_2 g = 19.6$ N.
Seconda domanda: dobbiamo ricavare T e porla uguale a zero. $T = F_x - m_1 a = F_x - m_1 \frac{F_x - m_2 g}{m_1 + m_2} = \frac{F_x m_2 + m_1 m_2 g}{m_1 + m_2}$, che è nulla per $F_x = -m_1 g = -78.5$ N.
In quali casi abbiamo che l' accel. è pari a g, ossia la caduta libera ? Supponiamo $F_x = 0$. Se $m_2 >> m_1$ allora, dalla eq. di a, si a che a=-g,

- **Settima settimana: ma 9 Dic-gi 13 Dic-ve 14Dic**

  Esercitazione
  Provate a fare: (esempio discusso a fondo a lezione, scorsa settimana) es. variazione da es. 29 pag. 133 Serway: un corpo è spinto su un piano inclinato s.a., con velocità iniziale $v_0 = 5$ m/s. Il piano forma un angolo $\theta = 20^o$ con l' orizzontale. Dom: cosa succede ? Quanta strada fa il corpo ? Rispondere alla stessa domanda nel caso in cui ci sia attrito con $\mu_D = 0.5$. Notiamo che in questo caso il corpo è spinto verso l' alto, con una certa velocità iniziale, a differenza del caso del corpo che scivola in giù sul piano inclinato. Ora sia la forza di gravità che l' attrito si oppongono al moto e lo rallentano. Dunque il segno relativo dell' acc. dovuta alla gravità e di quella dovuta all' attrito ora è lo stesso ! Soluzione: Dati: $v_0 = 5$ m/s, il piano forma un angolo $\theta = 20^o$, $\mu_D = 0.5$. Inoltre: $sin(\theta) = 0.34$, $cos(\theta) = 0.94$. Prendiamo direttamente la relazione $x(v)$ nel moto unif. accelerato con accelerazione a: $x(v) = \frac{v^2 - v_0^2}{2a}$, dove $v = 0$ alla fine (il corpo si ferma) e $a = -g\ sin\theta$ nel primo caso e $a = -(g\ sin\theta + \mu_D\ g\ cos\theta)$ nel secondo caso, con attrito. Il corpo, in entrambi i casi, sale per un certo tratto, rallentato finchè non si ferma nel primo caso solo dalla forza di gravità e nel secondo caso sia dalla gravità che dall' attrito. Notiamo che le forze di gravità e attrito, in questa situazione, ostacolano entrambe il moto. La decelerazione è maggiore in presenza di attrito. Avremo:
  1) solo gravità: $a = -9.8 \cdot 0.34 = -3.35$ m/s^2 e $x = 25/(2 \cdot 3.35)$=3.73 m;
  2) gravità e attrito: $a = -(9.8 \cdot 0.34 + 9.8 \cdot 0.5 \cdot 0.94) = -7.96$ m/s^2 e $x = 25/(2 \cdot 7.96)$=1.57 m. Verificate i conti !

  Cilindro al Luna Park: es. 53 pag. 174 Serway: cilindro del Luna Park che ruota attorno al suo asse, in modo tale da bloccare una persona sulla parete, quando il pavimento viene tolto. Calcolare quanto deve valere il periodo di rotazione affinchè la persona non cada. Il coeff. di attrito statico vale $\mu_S = 0.4$ e il raggio del cilindro $R = 4$ m. Trovate qui la traccia soluzione:
  asse y, positivo verso l' alto: $f_a - mg = 0$;
  asse x, positivo verso l' asse: $n = mv^2/R$;
  dove $f_a = \mu_s n$ è la forze di attrito statico e $\vec{n}$ è la reazione del vincolo, ossia della parete che spinge la persona verso l' asse del cilindro.
  Da qui: $\mu_s\ mv^2/R = mg$ per avere equilibrio. Sostituendo $v = \frac{2\pi R}{T}$, si ha

$T <= T_{eq} = \sqrt{\frac{\mu_s R 4\pi^2}{g}}$ =2.54 s. E viene $\omega >= 2.47$ rad/s.

Forze apparenti:

(a) Partendo dall' esercizio automobile in curva, su piano orizzontale, introdotto il concetto di forza apparente, che in questo caso chiamiamo centrifuga $\vec{f}_{centrifuga} = -m\vec{a_c}$. Radiale e diretta verso l' esterno: $\vec{T} + \vec{f}_{centifuga} = 0$, dove $f_{centrifuga} = mv^2/r$. L' equazione $F = ma$ è posta = 0 perchè, ragionando come se le fosse apparenti davvero esistessero, io sono fermo, e "penso" che su di me agiscano 2 forze che si equilibrano: l' attrito delle ruote sull' asfalto, che mi tira verso l' interno, e una forza apparente, ora centrifuga, che mi spinge verso l' esterno.

(b) Le forze apparenti sono una manifestazione del principio di inerzia. Questo vale anche se sono su un treno o macchina che frena: ci sentiamo "spinti". Verso dove ? Da cosa ?

(c) Esempio 5.7 pag. 152 Serway: trovare la max velocità che può avere un' auto in curva su strada piana con μ_s, senza sbandare. Ragioniamo in termini di forze apparenti: la forza centrifuga ci spinge verso l' esterno e l' attrito "reagisce" tirandoci verso l' interno, finchè ce la fa ... ossia, per velocità maggiori di un certo valore, la forza di attrito non riesce a compensare la forza centrifuga e la macchina slitta verso l' esterno della curva: $f_a = -\mu_s N$, dove $N = mg$ (la macchina è su una strada piana), $f_a + f_{centrifuga} = 0$; $f_{centrifuga} = mv^2/r$ (r=raggio della curva). Dunque, per non sbandare: $mv^2/r < \mu_S mg$. Da cui: $v_{max} = \sqrt{\mu_S g r}$. Se $\mu_S = 0.5$ e r=35 m, si ha: $v_{max} = 47.2$ km/h. Se la macchina, a velocità 10m/s, sbanda in un giorno di pioggia, quanto vale μ_S ? $\mu_S = v^2/(rg)$=0.186.

(d) Possiamo risolvere così anche l' esercizio sulla misura del peso di un oggetto (oppure di noi stessi su una bilancia) su un ascensore accelerato con $a > 0$ e $a < 0$, confronto analisi fatta dai due diversi punti di vista: nell' ascensore e fuori, come era stato svolto qualche lezione fa. $\vec{T} + \vec{f}_{apparente} + mg$=0, dove $\vec{f}_{apparente} = -m\vec{a}$. Ossia, se l' ascensore sale verso l' altro: $T - mg - ma = 0$, che porta allo stesso risultato ottenuto senza il concetto di forza apparente.

Lavoro, energia cinetica

(a) Definizione del **lavoro** in caso *unidimensionale* e per forza costante: $L = F\,\Delta s$ ("forza per spostamento").
Lavoro nel caso di forza che dipende dalla posizione: $L = \sum_{i=1}^{n} L_i = \sum_{i=1}^{n} F_i \Delta_{x_i}$ e limite ($n \to \infty$; $\Delta_{x_i} \to 0$):

$$L|_{x_1}^{x_2} \;=\; \int_{x_1}^{x_2} F(x)\,\mathrm{d}x\,. \tag{23}$$

(b) Lavoro come area sotto la curva F(x).

(c) Lavoro sul piano x-y. Prodotto scalare fra due vettori (forza e spostamento in questo caso).

(d) lavoro totale nel caso di più forze agenti su un corpo.

(e) Esempio persona che trascina una valigia per un tratto Δx, considerando anche l' attrito: calcolo del lavoro compiuto da tutte le forze, nei 2 casi in cui 1) la forza che tira la valigia sia parallela all' asse del moto; 2) la forza che tira la valigia formi un angolo α con l' asse del moto (in questa situazione $N = mg - F\sin\alpha$).

(f) Definizione dell'energia cinetica e connessione al lavoro mediante il teorema dell'energia cinetica (o delle 'forze vive'), consequenza di "$F = m\,a$":

$$\begin{aligned} L|_{x_1}^{x_2} = \int_{x_1}^{x_2} F(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{x_1}^{x_2} m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}x & (24)\\ &= \int_{x_1}^{x_2} m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\,v\,\mathrm{d}t & (25)\\ &= \int_{x_1}^{x_2} m\,v\,\mathrm{d}v & (26)\\ &= \frac{1}{2}\,m\,v^2\Big|_{x_1}^{x_2} = \frac{1}{2}\,m\,v^2(x_2) - \frac{1}{2}\,m\,v^2(x_1) & (27)\\ &= E_c(x_2) - E_c(x_1)\,, & (28)\end{aligned}$$

avendo definito $E_c = (1/2)\,mv^2$ come **energia cinetica**:

$$\rightarrow \quad L|_{x_1}^{x_2} \;=\; \Delta E_c|_{x_1}^{x_2}\,. \tag{29}$$

Unità di misura del lavoro e dell'energia: Joule = Newton×m, simbolo J.

Lavoro ed energia cinetica:
ricordiamo sempre che con ΔE_c intendiamo sempre $E_c(finale) - E_c(iniziale)$, ossia en. cinetica finale meno en. cinetica iniziale. Non sbagliate con i segni.

Esempio 1: lavoro della forza di richiamo dell'oscillatore armonico:

∗ dalla posizione di equilibrio ($x = 0$) alla generica posizione x:

$$\begin{aligned} L|_0^x &= \int_0^x F(x')\,\mathrm{d}x' = \int_0^x (-k\,x')\,\mathrm{d}x' & (30)\\ &= -\frac{1}{2}\,k\,x^2 & (31)\end{aligned}$$

→ lavoro negativo (indipendentemente dal segno di x — quello che conta è che forza e spostamento siano discordi): $\Delta E_c < 0$: la velocità diminuisce:

$$\frac{1}{2}m\,v^2(x) \;=\; \frac{1}{2}m\,v^2(0) - \frac{1}{2}\,k\,x^2\,; \tag{32}$$

∗ dalla generica posizione x alla posizione di equilibrio ($x = 0$):

$$L|_x^0 = \int_x^0 (-k\,x')\,\mathrm{d}x' \quad (33)$$

$$= \frac{1}{2}\,k\,x^2 \quad (34)$$

→ lavoro positivo (indipendentemente dal segno di x — quello che conta è che forza e spostamento siano concordi): $\Delta E_c > 0$: la velocità aumenta:

$$\frac{1}{2} m\,v^2(0) = \frac{1}{2} m\,v^2(x) + \frac{1}{2}\,k\,x^2\,; \quad (35)$$

Si noti inoltre come la somma del lavoro per andare da 0 a x e di quello per andare da x a 0 sia nulla: $L|_0^x + L|_x^0 = 0$.
Fatto anche il calcolo grafico del lavoro , disegnando il grafico di $\vec{F}(x)$ (retta passante per l' origine, con pendenza negativa -K), e calcolando l' area sotto la retta.

→ Discussione sui vantaggi di usare il lavoro invece di risolvere in dettaglio le equazioni del moto.

Ricordate che "lavoro negativo" vuol dire un lavoro resistente, ossia la forza si oppone (resiste) alla causa che provoca lo spostamento. Il lavoro fatto dalla gravità quando allontaniamo fra loro due corpi è pertanto negativo, perchè la forza di gravità è sempre attrattiva.

Ancora su lavoro, energia cinetica e introduciamo l' energia potenziale:
Esempio 2: lavoro della forza di gravità in prossimità della superficie terrestre, ovvero '$-mg$', con g approssimativamente costante, da una quota iniziale z_1 ad una quota finale z_2

$$L|_{z_1}^{z_2} = \int_{z_1}^{z_2} (-m\,g)\,\mathrm{d}z \quad (36)$$

$$= -m\,g\,(z_2 - z_1) \quad (37)$$

Se $z_2 > z_1$ (il corpo è salito): $L = -m\,g\,h < 0 \;\rightarrow\; \Delta E_c < 0$.
Se $z_2 < z_1$ (il corpo è disceso): $L = m\,g\,h > 0 \;\rightarrow\; \Delta E_c > 0$.
(h, definito positivo, è la differenza di quota dal punto più alto al punto più basso.) Anche in questo caso, se il corpo ritorna nella posizione iniziale il lavoro totale è nullo.

Esempio 3: lavoro della forza di attrito mentre il corpo si sposta da x_1 a $x_2 > x_1$ (indicando con d la distanza fra i due punti):

$$L|_{x_1}^{x_2} = \int_{x_1}^{x_2} (-\mu_D\,F_N)\,\mathrm{d}x \quad (38)$$

$$\begin{aligned} &= -\mu_D\, F_N\,(x_2 - x_1) = -\mu_D\, F_N\, d && (39) \\ (&= -\mu_D\, m\, g\, d\ ,\ \text{caso particolare }) \,. && (40) \end{aligned}$$

Se invertiamo il verso del moto anche la forza cambia segno ($F = -\mu_D\, F_N\, \hat{v}$):

$$\begin{aligned} L|_{x_2}^{x_1} &= \int_{x_2}^{x_1} (\mu_D\, F_N)\, \mathrm{d}x && (41) \\ &= \mu_D\, F_N\,(x_1 - x_2) && (42) \\ &= -\mu_D\, F_N\,(x_2 - x_1)\ : && (43) \end{aligned}$$

Lavoro sempre negativo: $L|_{x_1}^{x_2} = -\mu_D\, F_N\, d$ se si va da x_1 a x_2 e poi si ritorna a x_1 si sommano i lavori negativi: $\rightarrow L_{tot} = -2, \mu_D\, F_N\, d$.

In alcuni tipi di forze (molla, gravità, elettrostatica) il lavoro compiuto su un ciclo è nullo. Inoltre, in questi casi si osserva come l'energia cinetica 'sparisca' e poi 'ricompaia' (esempio: lancio di oggetto verso l'alto) in virtù della relazione $L|_{x_1}^{x_2} = \Delta E_c|_{x_1}^{x_2}$. Si ipotizza quindi, per questo tipo di forze, che quando l'energia cinetica 'sparice' (o semplicemente diminuice), essa si trasformi in un altro tipo di energia *meccanica*: **energia potenziale**:

diminuzione di energia cinetica $\rightarrow$ aumento di energia potenziale

(e viceversa)

$$\Delta E_c|_{x_1}^{x_2} = -\ \Delta E_p|_{x_1}^{x_2} \quad \Rightarrow \quad \Delta E_p|_{x_1}^{x_2} = -\ L|_{x_1}^{x_2}\ . \tag{44}$$

* Tutte le forze $\rightarrow L_{tot}|_A^B = \Delta E_c|_A^B$, ove il pedice *tot* indica che si tratta del lavoro fatto dalla risultatnte di tutte le forze che agiscono sul corpo, conservative o non.
* Forze conservative $\rightarrow L_{F_{cons}^{(i)}}\Big|_A^B = -\ \Delta E_p^{(i)}\Big|_A^B$, ove l'indice i indica che la relazione è valida per ciascuna delle forze conservative in gioco
* Se sono presenti solo forze conservative: si conserva l'energia meccanica totale: $E_c + E_p = costante$:

$$E_c(in) + E_p(in) \;=\; E_c(fin) + E_p(fin) \tag{45}$$

$$\Delta E_c|_{x_1}^{x_2} = -\ \Delta E_p|_{x_1}^{x_2} \quad \Rightarrow \quad \Delta E_p|_{x_1}^{x_2} = -\ L|_{x_1}^{x_2}\ . \tag{46}$$

La (46) definisce (a meno di una costante) l'energia potenziale. Nota: sia per l'energia cinetica che per l'energia potenziale il lavoro fornisce la variazione dell'energia, ma, mentre per l'energia cinetica esiste uno 'zero

naturale', corrispondente ad una velocità nulla, nell'energia potenziale tale 'zero naturale' non sempre esiste. In genere, dato un problema è conveniente fissare lo zero dell'energia potenziale in posizione del suo minimo (in quel problema).
Esempio 1 (molla)

$$\Delta E_p|_0^x = -L|_0^x = \frac{1}{2}\,k\,x^2 \qquad (47)$$

$$E_p(x=0)=0 \;\Rightarrow\; E_p(x) = \frac{1}{2}\,k\,x^2\,. \qquad (48)$$

Esempio 2 (forza di gravità "-mg"). Se il moto dell'oggetto si svolge da un livello minimo (es. tavolo, pavimento, piano stradale, etc.), conviene prendere tale livello come riferimento per lo zero dell'energia potenziale:

$$\Delta E_p|_0^h = -L|_0^h = m\,g\,h \qquad (49)$$

$$E_p(h=0)=0 \;\Rightarrow\; E_p(h) = m\,g\,h\,. \qquad (50)$$

- **-Proposte di esercizi- Ne faremo alcuni a lezione**

  Esercizi su cinematica, dinamica, lavoro ed energia cinetica

  (a) Esercizio di esonero del 2/03/06:
  Il periodo di rotazione del piatto di un giradischi è T=1.8 s. Si colloca una piccola moneta sul piatto e si mette in moto il giradischi. La moneta rimane in quiete rispetto al piatto se la si colloca ad una distanza minore di 9.2 cm dall'asse di rotazione, altrimenti, per una distanza maggiore, inizia a muoversi. Quanto vale il coefficiente di attrito statico tra la moneta ed il piatto?
  Sol: La forza centripeta deve essere fornita dalla forza di attrito statico, troviamo innanzitutto la velocità angolare:
  $\omega = 2\pi/T = 2\pi/1.8 = 3.49\ rad/s$
  $F_c = m\omega^2 R = \mu_s mg \Rightarrow \mu_s = \omega^2 R/g = 3.49^2 \cdot 0.092/9.8 = 0.11$

  (b) Es. di esonero 2/03/06:
  Un blocco di massa 15 kg viene spinto con una velocità iniziale di 4.6 m/s, su per un piano inclinato che forma un angolo di 30° con l'orizzontale. Il coefficiente di attrito dinamico tra il blocco ed il piano è di 0.34. Determinare:
  a)lo spazio percorso dal blocco prima di fermarsi
  b) il lavoro fatto dalla forza di attrito
  Sol: Le due proiezioni della forza di gravità parallella e ortogonale al piano inclinato sono:
  $F_\parallel = mg \cdot \sin\alpha$ e $F_\perp = mg \cdot \cos\alpha$
  La forza di attrito dinamico è: $F_a = \mu_d \cdot N = \mu_d \cdot mg \cdot \cos\alpha$

a) Lo spazio percorso si ricava facilmente - si potrebbe anche fare con la cinematica, fatelo da soli - dal teorema dell'energia cinetica, prendendo in considerazione il lavoro fatto dalla forza di attrito e dalla forza gravitazionale, per quest'ultima si considera la proiezione della forza sul piano inclinato:
$L = (\vec{F_a}+\vec{F_g})\cdot\vec{s} = -(\mu_d \cdot mg \cdot \cos\alpha + mg \cdot \sin\alpha)\cdot s = \Delta K = 0 - \frac{1}{2}mv^2$
$\Rightarrow s = \frac{v^2}{2g(\mu_d \cos\alpha + \sin\alpha)} = \frac{4.6^2}{2\cdot 9.8\cdot(0.34\cdot\cos 30° + \sin 30°)} = 1.36\ m$

b) $L = \vec{F_a} \cdot \vec{s} = -\mu_d \cdot mg \cdot \cos\alpha \cdot s = -0.34 \cdot 15 \cdot 9.8 \cdot \cos 30° \cdot 1.36 = -58.9\ J$

(c) Es. di esonero 2/03/06:
La massa campione di 1.0 kg è agganciata ad una molla di costante elastica incognita. Quando la massa viene messa in oscillazione si osserva che il periodo è di 1.43 s. Quando si rimpiazza la massa campione con un oggetto di massa sconosciuta, si nota che il periodo di oscillazione è di 1.85 s. Determinare: a)la costante elastica della molla, b) la massa dell'oggetto sconosciuto.
Sol: Il periodo di un pendolo è: $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$
$\Rightarrow k = m \cdot (\frac{2\pi}{T})^2 = 1 \cdot (\frac{2\pi}{1.43})^2 = 19.3\ N/m$
b) $m = k \cdot (\frac{T}{2\pi})^2 = 19.3 \cdot (\frac{1.85}{2\pi})^2 = 1.67\ kg$
Da notare che, a parità di molla (cioè di k), vale la relazione: $m/T^2 =$ costante, quindi:

$m_2 = m_1 \cdot (\frac{T_2}{T_1})^2 = 1 \cdot (\frac{1.85}{1.43})^2 = 1.67\ kg$

(d) Esercizio dettato: serve per vedere se avete capito i vettori. Testo: Date le forze $\vec{F_1} = (3, 1, 2)$ N e $\vec{F_2} = (-1, -5, 1)$ N, trovare a) l' angolo fra di esse; 2) il valore di un' altra forza $\vec{F_3}$ tale che le tre forze, applicate contemporaneamente ad un punto materiale, non ne cambino la velocità.
Sol. numerica: a) $\alpha = 1.88$ rad; b) $\vec{F_3} = (-2, 4, -3)$ (modulo 5.4 N).

(e) Un pendolo compie 30 oscillazioni al minuto. L' angolo massimo di oscillazione vale $\theta_0 = 4$ gradi. Trovare: a) la pulsazione; b) la velocità angolare e c) l' accelerazione angolare del filo, entrambe al tempo $t = 0.25$ s a partire dall' istante in cui $\theta = \theta_0$.
Sol. numerica: a) 3.14 rad/s ; b) -8.9 gradi/s; c) -28 gradi/s^2.
Soluzione: $T = 2$ s; $\omega = \pi$ rad. $\theta_0 = 4$ gradi, massima ampiezza angolare.
$\theta(t) = \theta_0\ \cos(\omega\ t)$; ossia, a t=0, l' angolo deve valere θ_0 (max); $\dot{\theta}(t) = -\omega\theta_0\ \sin(\omega\ t)$; $\ddot{\theta}(t) = -\omega^2\theta_0\ \cos(\omega\ t)$; Se θ_0 è in gradi, il risultato viene in gradi al secondo, per la velocità, e gradi al secondo quadrato per l' accelerazione. ω va espresso in radianti/secondo.

(f) Un oggetto, lanciato, parallelamente al terreno, da una torre alta 60m su un terreno pianeggiante tocca terra a distanza 40 m dalla base della torre. Calcolare il modulo della velocità dell' oggetto al momento dell' impatto.
Sol. numerica: 28 m/s.

Altri esercizi

(a) Soluzione esercizio lancio verso l' alto, dettato nella quinta settimana Un oggetto lanciato verticalmente verso l'alto impiega 4 secondi prima di tornare al punto di partenza. Trovare:
1) l'altezza massima alla quale arriva l'oggetto; 2) la velocità che esso possiede quando è a metà dell'altezza massima (si trascuri la resistenza dell'aria). Sol:
1) Per simmetria, il tempo di salita è pari a quello di discesa. Dunque $t_{max} = 2$ s. L' oggetto deve avere una velocità iniziale v_0, altrimenti non andrebbe verso l' alto.
La ricaviamo da $v = v_0 - gt$, ponendo v=0 a $t = t_{max}$. Si ha $v_0 = g\, t_{max}$. dunque l'altezza raggiunta è data da:
$h_{max} = g\,(t_{max})^2 - g\,(t_{max})^2/2$. Avendo sostituito l' espressione di v_0 nella formula dello spazio. Ossia
$h_{max} = g\,(t_{max})^2/2$=9.8 $2^2/2$= 19.6 m.
Notiamo anche che il problema poteva anche essere risolto con il concetto di velocità media e moto uniforme equivalente a quello dato. La velocità va, nel tratto in salita, da v_0 a 0, dunque $\overline{v} = v_0/2$. Poi $h_{max} = \overline{v}\, t_{max}$, che porta allo stesso risultato.
2) Per trovare la velocità per la quota $z = h_{max}/2$ usiamo l' espressione della velocità in funzione dello spazio percorso nel modo uniformemente accelerato (si può anche passare per l' uso della variabile tempo), $v^2 - v_0^2 = 2a\,h$, con $h = h_{max}/2$ e $a = -g$
$v_m = \sqrt{v_0^2 - 2g\,\frac{h_{max}}{2}} = 13.9\,\mathrm{m/s}$ Più avanti vedremo che si può svolgere anche con il bilancio energetico

(b) Soluzione esercizio dettato quinta settimana: (Es.7 pag. 131 Serway) trovare accelerazione, modulo e fase, date $\vec{F_1}$ e $\vec{F_2}$ che agiscono su una massa, inizialmente a riposo, $m = 5$ kg. Le due forze hanno modulo, rispettivamente, 20 N e 15 N e formano fra loro a) un angolo $\alpha = 90^o$ e b) un angolo $\alpha = 60^o$. Soluzione:
La forza risultante su m è: $\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2}$, l' accelerazione è: $\vec{a} = \frac{\vec{F_1}+\vec{F_2}}{m}$.
Prendiamo, per entrambe le situazioni, l' asse x lungo la direzione e con il verso di $\vec{F_1}$. L' asse y lungo la direzione e con il verso di $\vec{F_2}$ come è nel primo caso. Dunque, nel primo caso ciascuna forza agisce solo su un asse, nel secondo caso la forza $\vec{F_2}$ va proiettata su x ($F_2 \cos\alpha$) e su y ($F_2 \sin\alpha$). Si ha dunque:
Caso 1: $\vec{a} = \frac{20\hat{\imath}+15\hat{\jmath}}{5}$.

Da cui: $|a|$= 5 m/s2 e fase 36.9^o
Caso 2: $\vec{a} = \frac{(20+15\cdot0.5)\hat{\imath}+15\cdot0.87\hat{\jmath}}{5}$
dove 0.5 e 0.87 sono rispettivamente $\cos\alpha$ e $\sin\alpha$.
Da cui: $|a|$= 6.1 m/s2 e fase 25.3^o

(c) Un oggetto di massa 1 kg è posto su un piano scabro. Si determina empiricamente che affinché l'oggetto cominci a scivolare è necessario inclinare il piano di 30 gradi. Successivamente il piano è riposizionato orizzontalmente e l'oggetto è tirato con una molla di costante elastica $k = 1000\,\mathrm{N/m}$. Determinare di quando si è allungata la molla quando l'oggetto comincia a muoversi. Sol:
Dall'angolo in cui l'oggetto comincia muoversi otteniamo il coefficiente di attrito statico, in quanto $mg\sin\theta = \mu_s mg\cos\theta$, ovvero $\mu_s = \tan\theta$, pari a $1/\sqrt{3} = 0.577$ con i dati del problema. Quando il piano è orizzontale la condizione di 'stacco' è data da $k\,\Delta x = \mu_s mg$, da cui $\Delta x = \mu_s mg/k = 5.6\,\mathrm{mm}$

(d) Un orologio a pendolo viene portato sulla Luna, dove ricordiamo che $g_L = g/6$. Quanto tempo impiegano le sfere dell' orologio ad indicare un tempo apparente di 12 h ? Sol:
Periodo del pendolo sulla luna $T_L = 2\pi\sqrt{l/g_L}$= $2\pi\sqrt{(6\cdot l)/g}$, dove g=9.8 m/s^2. Dunque: $T_L = \sqrt{6}T_T$, maggiore del periodo sulla Terra, T_T. Dunque, 12 ore apparenti sulla luna sono date da un tempo maggiore di 12 ore, ossia $t_L^{12h} = \sqrt{6}\cdot 12$= 29.4 ore.

(e) Un topolino è fermo a 2 m dalla tana, quando vede un gatto, alla distanza di 2 m, che sopraggiunge alla velocità di 4m/s. Gatto, topo e tana sono allineati. Con quale velocità il topolino deve scappare, per raggiungere la tana senza essere acchiappato dal gatto ? Sol:
Il topo deve percorrere almeno d_T=2 m, nel tempo t_G in cui il gatto percorre $d_G = d_T + 2$= 4 m, alla velocità v_G = 4 m/s. Si ha: $t_G = d_G/v_g = 1$ s.
Dunque $v_T > d_T/t_G$= 2 m/s.

(f) 2) Un' auto di massa m=1200 kg viaggia alla velocità di 100 km/h, quando il guidatore vede un ostacolo davanti a lui e frena improvvisamente bloccando le ruote. Sapendo che il coeff. di attrito dinamico è $\mu_D = 0.75$, determinare: a) la strada percorsa prima di fermarsi; b) il lavoro fatto dalla forza di attrito. Sol:
1) Usiamo lavoro-energia cinetica. $L_T = \Delta E_c = 0 - (1/2)mv_i^2$, con v_i = 100 km/h, e $L_T = L_{attrito} = -\mu_D mg\Delta s$. Da queste si ricava: $\Delta s = (1/2)v_i^2/(\mu_d g)$, con $v_i = \frac{100\times10^3}{3600}$=27.78 m/s; $\Delta s = \frac{27.78^2}{2\ 0.75\ 9.8}$ = 52.5 m;
2) $L_{attrito} = -\mu_D mg\Delta s = -0.75\times1200\times9.8\times52.5 \approx -4.6\times10^5$ J.
Per risolvere 1) avremmo potuto anche usare la cinematica, fatelo: moto uniform. accelerato, con accel. negativa, pari a $a = \frac{f_{attrito}}{m}$ =

$-\frac{\mu_D mg}{m} = -7.35$ m/s^2, velocità finale nulla e vel. iniziale v_i data. Il tempo che la macchina impiega a fermarsi è $t^* = v_i/|a| = 3.8$ s (da $v = v_i - |a|t$).

7. **Ottava settimana: Lu 15 Dic-ma 16/12 Ve 19 inizio vacanze**

Problemini dettati e svolti parzialmente insieme:

(a) Corpo cade da h=10 m, calcolare $\rightarrow$ velocità finale;
Soluzione: $v = \sqrt{2gh}$ =14 m/s.

(b) Corpo lanciato verso l'alto con $v_0 = 10\,\mathrm{m/s}$: a che altezza arriva?
Sol: $(1/2)mv^2 = mgh$, da cui $h = \frac{v^2}{2g}$

(c) Molla, di K, massa e massimo spostamento noti. Calcolare v_{max}.
$(1/2)Kx^2_{max} = (1/2)mv^2_{max}$.

(d) Molla, di $T = 0.1$ s m=100 g x_{max}=2 cm. Calcolare v_{max}.
Sol: si calcola $K = m(\frac{2\pi}{T})^2$ e $v_{max} = \sqrt{(}K/m)\; x_{max}$, che è inoltre ωx_{max}

Esempio 4: lavoro della forza di gravità, caso generale, da una distanza iniziale R_1 and una distanza finale R_2.
Per l' integrale vedi sotto "Altro materiale didattico"

$$L|_{R_1}^{R_2} = \int_{R_1}^{R_2} (-\frac{G\,M\,m}{r^2})\,\mathrm{d}r \tag{51}$$

$$= \left.\frac{G\,M\,m}{r}\right|_{R_1}^{R_2} \tag{52}$$

$$= G\,M\,m\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right) : \tag{53}$$

Se $R_2 > R_1$ (m si allontana da M): $L < 0 \;\rightarrow\; \Delta E_c < 0$.
Il lavoro fatto dalla gravità è negativo perchè la gravità fa un lavoro resistente in questo caso, ossia tende ad opporsi all' allontanamento dei due corpi.
Se $R_2 < R_1$ (m si avvicina a M): $L > 0 \;\rightarrow\; \Delta E_c > 0$.
Anche in questo caso, se il corpo ritorna nella posizione iniziale il lavoro totale è nullo.
Lavoro fatto dalla forza gravitazionale per portare un corpo dalla distanza R all'infinito:

$$L|_R^\infty = -\frac{G\,M\,m}{R}\,. \tag{54}$$

Se $R = R_T$ questa formula si riduce a $-m\,g\,R_T$.

Esempio 4: Velocità di fuga: quanto deve valere v_0 sulla superficie terrestre affinché, in assenza di resistenza dell'aria, un corpo lanciato verso l'alto possa arrivare a 'distanza infinita' con 'velocità nulla'? [R.: $E_c(R = R_T) = 1/2\,m\,v_0^2$,

$E_c(R=\infty)=0$: $\rightarrow$ calcolare ΔE_c ed eguagliarlo con il lavoro compiuto dalla forza gravitazionale: $\rightarrow$ conti]

Esempio 4 : Forza di gravità, caso generale: energia potenziale

$$\Delta E_p|_{R_0}^{R} \;=\; G\,M\,m\left(\frac{1}{R_0}-\frac{1}{R}\right). \tag{55}$$

Non si può scegliere $R_0=0$, in quanto $\Delta E_p|_{R_0}^{R}\rightarrow\infty\;\forall R$. Si potrebbe scegliere R_0 uguale al raggio del pianeta. Si preferisce scegliere lo zero in corrispondenza di $R_0\rightarrow\infty$, ovvero in corrispondenza del suo massimo (idem per la forza di Coulomb in elettrostatica):

$$E_p(R=\infty)=0\;\;\Rightarrow\;\;E_p(R)=-\frac{G\,M\,m}{R}\;: \tag{56}$$

niente di veramente strano: quello che conta è che, passando da R_1 a R_2 con $R_2>R_1$, si abbia $E_p(R_2)>E_p(R_1)$:

$$\begin{aligned}\Delta E_p|_{R_1}^{R_2} &= E_p(R_2)-E_p(R_1) &(57)\\ &= -\frac{G\,M\,m}{R_2}-\left(-\frac{G\,M\,m}{R_1}\right) &(58)\\ &= G\,M\,m\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right). &(59)\end{aligned}$$

Si noti come questa definizione è compatibile con $E_p(h)=m\,g\,h$, se si pensa che quest'ultima sia valida in prossimità della superficie terrestre, ove le variazioni di g con l'altezza sono trascurabili.
Infatti: $E_p(R_T+h)=-\frac{G\,M_T\,m}{R_T+h}=-\frac{G\,M_T\,m}{R_T(1+h/R_T)}$, dove h/R_T è molto minore di 1. Notando che, in generale, $\frac{1}{1+\epsilon}$, con $\epsilon<<1$, può essere scritto come:

$$\frac{1}{1+\epsilon}=\frac{1}{1+\epsilon}\cdot\frac{1-\epsilon}{1-\epsilon} \tag{60}$$

$$=\frac{1}{1-\epsilon^2}\cdot(1-\epsilon)\approx(1-\epsilon) \tag{61}$$

avendo trascurato ϵ^2 rispetto ad 1, si ha che:

$$E_p(R_T+h)=-\frac{G\,M_T\,m}{R_T(1+h/R_T)}\approx-\frac{G\,M_T\,m}{R_T}\cdot(1-h/R_T)= \tag{62}$$

$$-\frac{G\,M_T\,m}{R_T}+\frac{G\,M_T\,m\,h}{R_T^2}==E_p(R_T)+m\,g\,h \tag{63}$$

Indipendenza del lavoro dal percorso nel caso di una forza conservativa, come conseguenza dell' essere nullo il lavoro su un ciclo. Esempio del piano inclinato, dove il lavoro $mg\sin\theta\Delta x$ è anche dato da mgh, con $h = \Delta x \sin\theta$. Discussione anche "intuitiva" notando che questo viene fuori dal fatto che mentre, ad es., la forza di attrito (non conservativa) cambia direzione se l' oggetto che si muove cambia direzione, la gravità (conservativa) è sempre diretta verso il basso, ossia non cambia direzione. Dunque il prodotto scalare $\vec{F} \cdot \vec{s}$ nel caso dell' attrito è diverso nei due casi in cui il verso del moto cambia, ossia se $\vec{s}$ cambia, mentre nel caso della gravità il prodotto scalare è sempre lo stesso e conta solo la proiezione dello spostamento sull' asse z, ossia sull' asse dove cè la gravità.

Esercitazione:

(a) Svolti esercizi fra quelli scritti in questi appunti, dettati in aula o distribuito il testo.

(b) un oggetto lasciato scivolare (velocità iniziale nulla)) lungo un piano inclinato privo di attrito arriva alla base del piano con velocità $v_a = 4$ m/s. Determinare con che velocità arriverebbe alla base lo stesso oggetto, se fosse stato lasciato scivolare con velocità iniziale $v_0 = 3$ m/s.
Sol: v_b= 5 m/s.

(c) Un oggetto percorre 1 m scivolando lungo un piano privo di attrito inclinato di 30 gradi rispetto all' orizzontale. Sul piano orizzontale il corpo è soggetto ad attrito e percorre 4 m prima di fermarsi. Calcolare μ_D.
Sol: $\mu_D = 0.125$

(d) Automobile in curva, di raggio R su strada inclinata senza attrito (liscia): calcolare la velocità per non sbandare. Impostazione del problema:
α: angolo del piano inclinato rispetto al piano orizzontale; θ: angolo della reazione vincolare rispetto al piano orizzontale (ovvero $\theta = \pi/2$ - α). Asse orizzontale= asse x, positivo verso l' esterno della curva;
Dinamica: forze in gioco: $\vec{F_g} = [0, -mg]$ $\vec{T} = [-T\cos(\theta), Tsin(\theta)]$
$\vec{F_{tot}} = \vec{F_g} + \vec{T} = [-Tcos(\theta), -mg + T\sin(\theta)]$.
B) Cinematica/dinamica:
Dall' espressione di F_{tot} si ricava:
sull' asse y: $-mg + T\sin(\theta) = 0$, $T = \frac{mg}{\sin\theta}$
sull' asse x: $-T\ \cos(\theta) = -mv\ 2/R$.
Da cui, sostituendo il valore di T, semplificando ed esplicitando la velocità, si ha: $v = \sqrt{Rg\tan\theta}$.
Notiamo che questo valore è un valore esatto. Se la velocità fosse diversa, sia minore che maggiore, la macchina scivolerebbe a distanza minore o maggiore dal centro della curva.

(e) Es. su conservazione energia meccanica con la molla: dati $x_{max} = 4$ cm, $T = 1$ s, $m = 200$ g, trovate la velocità v_h per $x = 0.5 \cdot x_{max}$.
Sol: $E_c + E_p =$ costante. Dunque $\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Kx^2$=costante= $\frac{1}{2}Kx^2_{max}$ (ad

$x = x_{max}$ l' energia è solo potenziale). Ora sostituiamo alla generica posizione x il valore $x = 0.5x_{max}$. Troviamo:
$\frac{1}{2}mv_h^2 + \frac{1}{2}K(0.5x_{max})^2 = \frac{1}{2}Kx_{max}^2$. Da cui $\frac{1}{2}mv_h^2 = \frac{1}{2}Kx_{max}^2 \cdot (1 - 0.5^2)$, ossia $v_h = \sqrt{(K/m) \cdot x_{max}^2 \cdot (1 - 0.25)}$.
$K = m\ (2\pi)^2/T^2 \simeq 7.9$ N/m, v_h=0.21 m/s. Controllate i conti.
Anche qui, cosa vi ricorda l' espressione di v_h ? Ora è un pò più complicato della volta scorsa. Vi aiuto: il $cos60^o$=0.5, $sin60^o$=0.866 e $\sqrt{0.75} = 0.866$. e stiamo calcolando la velocità ad $x = 0.5x_{max}$.
Sol: Analogia con la proiezione del moto circolare uniforme sul diametro. Ricordate le espressioni di x,v e a ? Nell' analogia ovviamente x_{max} ha il ruolo del raggio della circonferenza. $|v_h| = \omega x_{max} sin(\alpha)$, con $\alpha = 60^o$ in quanto sono ad x=0.5 x_{max}.

8. **Nona settimana: 8/01 (34-37 lezione)**

Ancora sul lavoro:

(a) Definizione di Potenza (media e istantanea);
unità di misura della potenza (watt e cv);
1 cv = 735.5 W $\approx$ 0.74 kW.
Quanto sono in kW 100 cv ?
Espressione della potenza nel caso di forza costante $P = F \cdot v$;
kWh= 1000 watt $\times$3600 s: attenzione è una unità di energia e non di potenza. Dalla definizione si ha che 1 kWh=3.6 $\times 10^6$ J.

(b) Una lampadina da 60 W. Calcolare l' energia elettrica consumata in 1 ora di funzionamento. Sol: $E_{el} = 60 \times 3600$ watt $\times$ secondo=2.16 $\times 10^5$ J.

(c) Sulla potenza: svolto es. 6.8 pag. 200 Serway (ascensore di massa M=1000 kg e portata max m=800 kg. Una forza di attrito costante $f_a = 4000$ N ne ritarda il moto verso l' alto. Trovare 1) la potenza minima erogata dal motore perchè l' ascensore salga verso l' alto con $v = 3$ m/s costante. Trovare 2) l' espressione della potenza (istantanea) se invece è accelerato verso l' alto, con accelerazione costante $a = 1$ m/s^2.
Attenzione alla validità della espressione $P = F \cdot v$: deve essere costante la forza F, non la velocità. In questo esercizio, poichè $T - (m + M)g - f_a = ma$, ho che T è costante sia nel primo caso, dove a=0, che nel secondo caso, dove a=costante. Posso dunque applicare la formula $P = T \cdot v$ in entrambi i casi. Nel primo la potenza è anch'essa costante, nel secondo la potenza è funzione del tempo. Viene: $T = 2.16 \times 10^4$ N nel primo caso e $T = 2.34 \times 10^4$ N nel secondo. $P = 64.8$ kW nel primo caso e $P(t) = T \cdot (v_0 + at)$ nel secondo, funzione del tempo.
Perchè "potenza minima" ? È quella che corrisponde ad ascensore carico, ossia l' ascensore deve funzionare a pieno carico, dunque la potenza deve essere almenoo quella calcolata. Non più piccola.

Esercitazione Svolti esercizi di esonero di compiti 2006-2008.

Impulso e quantità di moto

(a) Problema del cannoncino di massa M che spara proiettile di massa m. Schematizziamo la spinta del proiettile come una forza costante che agisce in un intervallo Δt. Riscriviamo "$\vec{F} = m\,\vec{a}$":

$$\begin{aligned} \vec{F} &= m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} && (64)\\ &= \frac{\mathrm{d}(m\,\vec{v})}{\mathrm{d}t} && (65)\\ &= \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} && (66)\end{aligned}$$

avendo chiamato indicato $\vec{p} = m\,\vec{v}$ la *quantità di moto* dell'oggetto di massa m. Se F è costante segue

$$\begin{aligned} \Delta\vec{p} &= \vec{F}\,\Delta t && (67)\\ \vec{p}(t_2) &= \vec{p}(t_1) + \vec{F}\times(t_2 - t_1) \quad (F \text{ costante})\,. && (68)\end{aligned}$$

La quantità "$\vec{F}\,\Delta t$", per $\vec{F}$ costante in Δt, è chiamata *impulso della forza*: $\rightarrow$ causa variazione di quantità di moto. Ne segue, per la velocità

$$\begin{aligned} \Delta\vec{v} &= \frac{1}{m}\vec{F}\,\Delta t && (69)\\ \vec{v}(t_2) &= \vec{v}(t_1) + \frac{1}{m}\vec{F}\times(t_2 - t_1) \quad (F \text{ costante})\,. && (70)\end{aligned}$$

Abbiamo trovato un modo semplice per ricavarsi la quantità di moto (e quindi la velocità del proiettile). Ancora due problemi: a) cosa succede se la forza varia nel tempo? b) cosa succede al cannoncino?

a) Se $\vec{F}$ varia con il tempo, ovvero abbiamo $\vec{F}(t)$, in analogia a quanto visto per le variazioni di posizione e velocità:

$$\begin{aligned} \Delta\vec{p}\,\big|_{t_1}^{t_2} &= \sum_i \Delta\vec{p}_i = \sum_i \vec{F}_i \Delta t_i && (71)\\ &\rightarrow \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t)\mathrm{d}t\,, && (72)\end{aligned}$$

che definisce l'impulso di una forza anche per forze variabili con il tempo.
b) Principio di azione e reazione (terzo principio della meccanica): forze uguali e contrarie:

$$\vec{F}_A^{(B)} = -\vec{F}_B^{(A)}\,, \qquad (73)$$

ove $\vec{F}_A^{(B)}$ sta per "forza su A dovuta a B", e analogo per $\vec{F}_B^{(A)}$. Analizziamo le variazioni di quantità di moto di A e B:

$$\begin{aligned} \Delta\vec{p}_A^{\,(B)}\Big|_{t_1}^{t_2} &= \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_A^{\,(B)}(t)\mathrm{d}t &(74)\\ &= -\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_B^{\,(A)}(t)\mathrm{d}t &(75)\\ &= -\,\Delta\vec{p}_B^{\,(A)}\Big|_{t_1}^{t_2} &(76)\end{aligned}$$

ovvero

$$\Delta\vec{p}_A^{\,(B)}\Big|_{t_1}^{t_2} + \Delta\vec{p}_B^{\,(A)}\Big|_{t_1}^{t_2} = 0\,. \tag{77}$$

In una interazione fra due corpi la quantità di moto viene scambiata da un corpo all'altro. Se il sistema fisico è formato soltanto da due corpi (ovvero essi non hanno, almeno approssimativamente, interazioni con il resto del mondo), la loro *quantità di moto totale si conserva.*

Si noti come l'espressione di sopra sia in effetti vettoriale: la conservazione si applica alle tre componenti: se le interazioni con 'il resto del mondo' avviene soltanto in una o due delle componenti, la conservazione vale nelle rimanenti. Si noti inoltre come, per arrivare all'espressione di conservazione si è assunto che il principio di azione e reazione valga istantante per istante.

Quantità di moto del cannoncino:

- posto su piano senza attrito, e coordinata x orizzontale, positiva nella direzione di moto del proiettile:
  * lungo x i due oggetti sono soggetti soltanto alla loro forza reciproca: $\rightarrow$ sistema isolato $\rightarrow$ p_x si conserva (chiamiamolo semplicemente p). Essendo proiettile e cannone inizialmente fermi

$$\begin{aligned} p_1 + p_2 &= 0 &(78)\\ p_2 &= -p_1 &(79)\\ M\,v_2 &= -m\,v_1 &(80)\\ v_2 &= -\frac{m}{M}\,v_1 &(81)\end{aligned}$$

  * lungo la componente verticale la risultante delle forze è nulla: il moto di proiettile e cannoncino si mantiene sull'asse x.
- ancorato saldamente al terreno: in pratica il cannoncino è solidale con il terreno e quindi, con buona approssimazione, con la Terra (a meno che l'esplosione sia talmente potente da sollevare la piattaforma sulla quale il connoncino era ancorato...): in pratica si considera che cannoncino e Terra formino un solo corpo di massa 'infinita' rispetto al proiettile: $m/M \rightarrow 0$: il cannoncino non si sposta (ma il sistema

cannoncino-Terra acquista la quantità di moto $-m\,v_1$: un oggetto di massa 'infinita' può variare la sua quantità di moto senza (apprezzabilmente) variare la sua velocità.
Esempio di persona che saltella: la Terra varia continuamente la propria quantità di moto senza subire spostamenti.

– Conservazione della quantità di moto: caso generale.
Se abbiamo un sistema isolato di oggetti, ovvero tali che essi interagiscono solo con gli altri oggetti di tale sistema, ma non con il resto del mondo, per ogni intervallo di tempo dt possiamo estendere la (77) a tutte le coppie ij, ovvero

$$\mathrm{d}\vec{p}_i^{\,(j)} + \mathrm{d}\vec{p}_j^{\,(i)} = 0\,. \tag{82}$$

Ne risulta che, istante per istante, è nulla la variazione della quantità di moto totale del sistema $\mathrm{d}\vec{p} = \sum_{i,j} \mathrm{d}\vec{p}_i^{\,(j)}$.

$$\begin{aligned} \text{Sistema isolato:} & \\ &\rightarrow\ \ \mathrm{d}\vec{p} = 0 && (83)\\ &\rightarrow\ \ \vec{p}(t) = \textit{costante}. && (84)\\ & && (85)\end{aligned}$$

Altri esempi: persona inizialmente ferma su laghetto ghiacciato che riesce a muoversi lanciando un oggetto; razzo nel vuoto che accelera 'spruzzando' del gas (o altro) ad alta velocità; Terra che 'assorbe' le variazioni di quantità di moto di quanti saltellano sulla terra.

(b) **Sistema isolato**. La quantità di moto totale di un sistema isolato si conserva: $\vec{p}_{tot}(t) = \sum_i \vec{p}_i = \sum_i m_i \vec{v}_i(t) = cost$. Sono tre condizioni: $p_{x_{tot}}$, $p_{y_{tot}}$ e $p_{z_{tot}}$.

(c) **Esempio svolto**: urto auto ($m_a = 1000\,\mathrm{kg}$) e camion ($m_c = 10000\,\mathrm{kg}$), trascurando attriti ed assumendo rimangano attaccati: casi $v_a = 50\,\mathrm{km/h}$ e $v_c = 0$ e velocità scambiate, ossia $v_c = 50\,\mathrm{km/h}$ e $v_a = 0$. Calcolo del $\rightarrow \Delta v$ per i due mezzi nei due casi (ma nota: le forze che subiscono le persone dipendono da accelerazioni, $\Delta v/\Delta t$: importanza di 'attutire' l'urto, ovvero aumentare Δt).

(d) Sistema di punti materiali interagenti e soggetti a forze reciproche (**interne**) ed **esterne**:

$$\vec{F}_i = \sum_j \vec{F}_i^{(j)} + \vec{F}_i^{(ext)} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\vec{p}_i}{\mathrm{d}t} = \vec{F}_i\,. \tag{86}$$

Sommando su tutti i punti materiali otteniamo

$$\begin{aligned} \sum_i \frac{\mathrm{d}\vec{p}_i}{\mathrm{d}t} &= \sum_i \vec{F}_i && (87)\\ \frac{\mathrm{d}\sum_i \vec{p}_i}{\mathrm{d}t} &= \sum_{i,j} \vec{F}_i^{(j)} + \sum_i \vec{F}_i^{(ext)}\,, && (88)\end{aligned}$$

ma, per il principio di azione-reazione, le forze interne si annullano a coppie nella sommatoria in quanto $F_i^{(j)} = -F_j^{(i)}$. La variazione nel tempo della quantità di moto totale del sistema è dovuta soltanto alle forze esterne:

$$\sum_i \vec{F}_i^{(ext)} = \sum_i \frac{\mathrm{d}\vec{p}_i}{\mathrm{d}t} \tag{89}$$

$$\vec{F}^{(ext)} = \frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t} \tag{90}$$

$$\tag{91}$$

ove $\vec{F}^{(ext)}$ è la *risultante* delle forze esterne.

Ancora sulla conservazione della quantità di moto in un sistema isolato:
La quantità di moto totale di un sistema isolato si conserva: $\vec{p}_{tot}(t) = \sum_i \vec{p}_i = \sum_i m_i \vec{v}_i(t) = costante$. Sono tre condizioni: $p_{x_{tot}}$, $p_{y_{tot}}$ e $p_{z_{tot}}$.
Centro di massa del sistema (media delle posizioni pesata con le masse):

$$x_{CM}(t) = \frac{\sum_i m_i x_i(t)}{\sum_i m_i} \tag{92}$$

$$v_{x_{CM}}(t) = \frac{\mathrm{d}x_{CM}(t)}{\mathrm{d}t} \tag{93}$$

$$= \frac{\sum_i m_i \,\mathrm{d}x_i(t)/\mathrm{d}t}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i v_{x_i}(t)}{\sum_i m_i} = \frac{p_{x_{tot}}(t)}{M_{tot}} \tag{94}$$

etc. per y e z

$$\vec{v}_{CM}(t) = \frac{\vec{p}_{tot}(t)}{M_{tot}}\,. \tag{95}$$

Sistema isolato: $\vec{p}_{tot}$ costante: $\rightarrow \vec{v}_{CM}$ costante.
Abbiamo visto che la variazione nel tempo della quantità di moto totale del sistema è dovuta soltanto alle forze esterne:

$$\sum_i \vec{F}_i^{(ext)} = \sum_i \frac{\mathrm{d}\vec{p}_i}{\mathrm{d}t} \tag{96}$$

$$\vec{F}^{(ext)} = \frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t} \tag{97}$$

$$= M\,\frac{\mathrm{d}\vec{v}_{CM}}{\mathrm{d}t} \tag{98}$$

$$= M\,\vec{a}_{CM}\,, \tag{99}$$

ove $\vec{F}^{(ext)}$ è la *risultante* delle forze esterne e M è la somma delle masse del sistema. È come se il CM si comportasse come un punto materiale di massa M

(seconda legge della meccanica generalizzata ad un sistema di punti materiali). Segue:

$$L^{(ext)} = \int_A^B F^{(ext)} \cdot \mathrm{d}x = \Delta \left(\frac{1}{2} M v_{CM}^2 \right) \Big|_A^B : \tag{100}$$

il lavoro fatto dalla risultante delle forze esterne è pari alla variazione di *energia cinetica di traslazione* del CM (nota: il sistema possiede anche energia cinetica dovuta al movimento interno).

9. $\boxed{\textbf{Decima settimana: 13/01 (38-42 lezione)}}$

Introduzione ai **problemi di urto**:
Schemi di urto di due oggetti in approssimazione di sistema isolato:

Sempre Si conserva quantità di moto:

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 \;=\; m_1\vec{v'}_1 + m_2\vec{v'}_2 \tag{101}$$

Urti elastici Si conserva anche energia cinetica totale:

$$\frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 \;=\; \frac{1}{2}m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2'^2 \tag{102}$$

Urti anelastici parte dell'energia 'meccanica' (cinetica) è persa: $\rightarrow$ calore, 'etc.'.
Nota: gli urti in cui i corpi rimangono attaccati appartengono a questa classe, li chiamiamo
(nel CM energia cinetica sparisce): "urti completamente anelastici", sono particolarmente semplici da trattare.

Urto elastico frontale (unidimensionale).
Riprendiamo le leggi di conservazione (101)-(102) degli urti elastici, riscrivendole nel modo seguente:

$$m_1\, v_1 - m_1\, v'_1 \;=\; m_2\, v'_2 - m_2\, v_2 \tag{103}$$

$$m_1 v_1^2 - m_1 v_1'^2 \;=\; m_2 v_2'^2 - m_2 v_2^2\,, \tag{104}$$

ovvero

$$m_1\,(v_1 - v'_1) \;=\; +m_2\,(v'_2 - v_2) \tag{105}$$

$$m_1\,(v_1^2 - v_1'^2) \;=\; m_2\,(v_2'^2 - v_2^2)\,, \tag{106}$$

dalle quali, dividendo membro a membro (la seconda diviso la prima) e ricordandosi che $a^2 - b^2 = (a+b)\,(a-b)$, si ottiene

$$v_1 + v'_1 \;=\; v_2 + v'_2\,, \tag{107}$$

ovvero

$$v_1 - v_2 \;=\; (v'_2 - v'_1)\,. \tag{108}$$

La (107) ci dice che in un urto elastico frontale la somma della velocità iniziale e finale di una particella è pari alla somma della velocità iniziale e finale dell'altra particella. Più interessante è la 'lettura' della (108): **in un urto elastico la velocità relativa fra le due particelle viene invertita (ma resta costante in modulo)**. Notiamo che la (108) fornisce la soluzione immediata al problema in tutti i casi in cui una delle due masse sia molto maggiore dell' altra. In questo caso infatti la pallina (o altro) di massa maggiore, dopo l' urto, prosegue imperturbata (ossia senza cambiare velocità) il suo moto. Dunque nell' equazione resta solo incognita la velocità dopo l' urto della pallina di massa (molto) più piccola. Esempi: pallina contro racchetta da tennis, boccia contro boccino fermo, boccino contro boccia ferma.

Inizieremo a fare le considerazioni possibili utilizzando la (108)., conoscendo solo le 2 vel. iniziali e sapendo che una massa è molto maggiore dell' altra.

Esercitazione:

(a) Mostrati esempi di lancio di palline: 1) da ping-pong contro una pesante;
2) pesante contro ping-pong;
3) confronto fra pallina da ping-pong che cade sul tavolo lasciata da sola e la stessa pallina quando cade messa in un tubo di cartone o carta con sotto un' altra pallina "pesante" (che rimbalza).In questa situazione va molto più in alto (se si è fatto un bel lancio verticale ...) di prima, a parità di quota da cui viene lasciata cadere. Infatti acquista anche la velocità $2V_1$ dalla pallina pesante (caso 1 dei 3 esempi che vedremo domani);
4) colpiamo la pallina da ping-pong, messa sul bordo della cattedra, lanciandole contro quell pesante. Poi facciamo il contrario. Osserviamo cosa succede nei due casi. La pallina da ping-pong cade molto più lontano dell' altra, perchè ?

Urto elastico frontale (unidimensionale).
Riprendiamo da:

$$v_1 + v'_1 \;=\; v_2 + v'_2\,, \tag{109}$$

ovvero

$$v_1 - v_2 \;=\; (v'_2 - v'_1)\,. \tag{110}$$

Inizieremo a fare le considerazioni possibili utilizzando la (108)., conoscendo solo le 2 vel. iniziali e sapendo che una massa è molto maggiore dell' altra:
1) racchetta V_1 contro pallina $-V_2$:
(o calciatore che colpisce una palla al volo, boccia che colpisce un boccino che le va incontro ...) La differenza di velocità fra racchetta e pallina vale $V_1-(-V_2) = V_1+V_2$ e tale sarà la differenza fra la velocità finale della palla e quella della racchetta. Ma, nell'approssimazione di massa infinita della racchetta la velocità di quest'ultima non viene modificata dall'urto (si pensi al caso limite auto-moscerino). Quindi la velocità finale della palla vale $V'_2 - V'_1 = V_1 - V_2$ e $V'_2 = V_1 + (V_1 + |V_2|) = 2V_1 + |V_2|$.
2) boccia V_2 contro boccino fermo $V_1 = 0$:
Qui $V'_2 = V_2$, da cui: $V_2 - V'_1 = 0 - V_2$ e $V'_1 = 2V_2$
3) boccino V_2 contro boccia ferma $V_1 = 0$:
La boccia resta ferma e il boccino rimbalza all' indietro con la stessa velocità V_2,

ossia $V_2' = -V_2$.
Urti parzialmente anelastici: una parte dell'energia meccanica viene persa. Esempio: rimbalzi di pallini normali. Misura (indiretta) della frazione di energia persa dalla misura delle quote successive ad ogni rimbalzo (nota: l'inelasticità può dipendere anche dalla velocità di impatto e, quindi, dalla quota iniziale).
Ora continuiamo per studiare gli altri casi: da una di queste due equazioni e dalla (104) otteniamo un sistema di equazioni lineari, la cui soluzione è:

$$v'_1 = \frac{2\,m_2\,v_2 + (m_1 - m_2)\,v_1}{m_1 + m_2} \tag{111}$$

$$v'_2 = \frac{2\,m_1\,v_1 + (m_2 - m_1)\,v_2}{m_1 + m_2} \tag{112}$$

Notazione: possiamo scrivere, in generale:

$$(v'_2 - v'_1) = \epsilon(v_1 - v_2)\,. \tag{113}$$

dove ϵ ("fattore di conversione") è compreso fra 0 e 1, e vale:
$\epsilon = 1$ in un urto elastico, $\epsilon = 0$ in un urto completamente anelastico;
$\epsilon \approx 0.8$ per le palline da biliardo, $\epsilon \approx 0.58$ per le bocce.
Casi particolari:

$\boxed{v_2 = -v_1}$:

$$v'_1 = \frac{m_1 - 3\,m_2}{m_1 + m_2}\,v_1 \tag{114}$$

$$v'_2 = \frac{3\,m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\,v_1 \tag{115}$$

Sottocaso interessante:

$\underline{m_1 = m_2}$:

$$v'_1 = -v_1 \tag{116}$$

$$v'_2 = v_1 \tag{117}$$

→ entrambe rimbalzano all'indietro, invertendo il vettore velocità.

$\boxed{v_2 = 0}$:

$$v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\,v_1 \tag{118}$$

$$v'_2 = \frac{2\,m_1}{m_1 + m_2}\,v_1 \tag{119}$$

Sottocasi interessanti:

$\underline{m_1 = m_2}$

$$\begin{aligned} v'_1 &= 0 \quad (120) \\ v'_2 &= v_1 \ : \quad (121) \end{aligned}$$

le particelle si scambiano il moto: quella che era ferma si muove con v_1, l' altra si ferma.

$\underline{m_1 \ll m_2}$ (ovvero urto contro un corpo di 'massa infinita')

$$\begin{aligned} v'_1 &= -v_1 \quad (122) \\ v'_2 &= 0 \ : \quad (123) \end{aligned}$$

la particella inizialmente in moto rimbalza; l'altra resta 'praticamente' in quiete (ma ha assorbito una quantità di moto pari a $2m_1v_1!$);

$\underline{m_1 \gg m_2}$ (esempio urto di palla grande contro 'pallino'):

$$\begin{aligned} v'_1 &= v_1 \quad (124) \\ v'_2 &= 2\,v_1 \ : \quad (125) \end{aligned}$$

la palla pesante prosegue praticamente imperturbata, mentre la seconda 'schizza' in avanti con velocità doppia della palla che l'ha colpita.

$\boxed{v_1 = V_1,\, v_1 = -V_2,\, m_1 \gg m_2}$ con V_1 e V_2 definite positive. (Caso fisico: racchetta contro pallina che viaggia in senso opposto)

$$\begin{aligned} v'_1 &= V_1 \quad (126) \\ v'_2 &= 2\,V_1 + V_2 \ : \quad (127) \end{aligned}$$

la pallina rimbalza con una velocità pari alla sua velocità iniziale, aumentata del doppio della velocità della racchetta (ecco perché i tiri al volo contro palla che viene incontro sono particolarmente 'potenti').

Esercitazione. Svolti o proposti esercizi vari, fra cui:

(a) **Esonero cinematica:**
Due dischi inizialmente uniti e in quiete su un piano orizzontale senza attrito, sono allontanati da una esplosione interna e si muovono alla velocità di $v_1 = 50$ cm/s e $v_2 = -20$ cm/s. Determinare: 1) la velocità del centro di massa; 2) il rapporto fra le due masse; 3) Supponendo che il disco più grande abbia massa $M = 100$ g, trovare l' energia cinetica totale dei due dischi. Sol:
1) Ricordando che $\vec{v}_{CM} = \frac{\vec{p}_{tot}}{M_{tot}}$, e che la quantità di moto di un sistema isolato (i due dischi) si conserva, abbiamo che $\vec{v}_{CM}$= costante=0 (era nulla all' inizio, prima dell' esplosione).
2) conservazione quantità di moto: $(m_1+m_2)v_i = m_1|v_1| - m_2|v_2|$, segue, poichè $v_i = 0$, che $m_1|v_1| = m_2|v_2|$ e dunque $\frac{m_1}{m_2} = \frac{|v_2|}{|v_1|}$=20/50=0.4.
3)Dunque se m_2=M=100 g (massa maggiore= velocità minore), si ha che $m_2 =$ 40 g. $E_c = (1/2)m_1v_1^2 + (1/2)m_2v_2^2$= 7×10^{-3} J.

(b) Urti
Un ladro, dopo aver rubato da un treno che viaggia alla velocità di 6 m/s un sacco postale di massa 20.0 kg, lo getta ad un complice appostato in prossimità dei binari e con sua grande sorpresa vede quest'ultimo, appena afferrato il sacco, spostarsi nella stessa direzione del treno ad una velocità di 1.2 m/s (misurata rispetto ai binari). Quanto vale la massa del complice? Soluzione: $m_p = 20$ kg, $v_{treno} = 6$ m/s, $v_{finale} = 1.2$ m/s. Si tratta di un urto completamente anelastico. Conservazione quantità di moto:
$m_p v_{treno}$=$(m_C + m_p)v_{finale}$
(il pacco inizialmente è sul treno, dunque ha la veloc. v_{treno}). Da cui si ha: $(m_C + m_p) = m_p v_{treno}/v_{finale}$, $m_C = m_p v_{treno}/v_{finale} \ - m_p = \frac{20\times 6}{1.2} - 20$= 80 kg.
Note: abbiamo preso come riferimento i binari, ossia la Terra. Avremmo anche potuto fare i conti prendendo il treno come riferimento e il risultato non sarebbe ovviamente cambiato.
Notiamo anche che il complice doveva stare su una superficie scivolosa, tipo ghiaccio,... altrimenti sarebbe rimasto fermo o al massimo sarebbe caduto... Calcolata anche la $\Delta\vec{p}$.

(c) Esempi di calcolo $\Delta\vec{p}$ di ciscuna delle due palline che urtano. Attenzione ai segni !

(d) Una pallina cade da 1 metro. Sapendo che nel rimbalzo sul pavimento viene perso il 20% dell'energia meccanica, si determini la velocità immediatamente dopo il rimbalzo.
Generalizzate al caso di n rimbalzi. Traccia della soluzione:
Traccia della soluzione:
$(1/2)mv^2 = mgh(1 - 0.2) = mgh \times 0.8$ (se l' en. meccanica si fosse conservata avremmo avuto semplicemente $(1/2)mv^2 = mgh$). Da cui $v = \sqrt{2gh0.8}$. Nota sulla cons. della quantità di moto che porta la pallina, schematizzata sempre come punto materiale, a mantenere solo la componente verticale della velocità.

(e) Data una forza costante $F = 2000$ N, applicata ad un corpo inizialmente fermo di massa m=50 g, per un tempo Δt di 1 secondo, calcolare la velocità finale raggiunta dal corpo, la sua velocità media e lo spazio percorso nel tempo Δt.
Sol: l' impulso dà la variazione della quantità di moto. Dunque $p_f = mv_f = F\Delta t$, da cui si ha: $v_f = \frac{2000\times 1}{0.05} = 4 \times 10^4$ m/s. La velocità media è: $v_m = (v_f - v_i)/2 = 2 \times 10^4$ m/s. Lo spazio percorso $s = 1/2\ a(\Delta t)^2$, con $a = F/m$. Oppure con $s = v_m t$. Oppure $L = fs = \Delta E_c$.

(f) Svolto Esercizio su urti e lavoro: oggetto di massa 1 kg urta con velocità 10 m/s un altro oggetto di massa 3 kg. I due corpi rimangono attaccati. Il moto avviene su un piano di μ_D=0.2. Calcolare la distanza che i due corpi percorrono dopo l' urto prima di arrestarsi. Note: l' urto è anelastico. Si calcola v'. Poi si applica $L = \Delta E_c$, dove il lavoro L è compiuto dalla forza di attrito ($f_a = -\mu_D(m_1 + m_2)g$). Risultato: la distanza percorsa è 1.6 m. Da svolgere anche con l' uso della cinematica, fatelo !

(g) Un proiettile di massa 20 g colpisce un oggetto a riposo di massa 1 kg. Sapendo che i corpi nell' urto rimangono attaccati e che nell' urto si sono persi 160 J di energia meccanica, calcolare la velocità iniziale del proiettile. Risultato: $v_i = 127.7 m/s$. Traccia: conservazione dela quantità di moto nell' urto; differenza fra l' en. cinetica prima dell' urto e l' energia cinetica dopo l' urto pari a ΔE_c =160 J.

(h) **oscillazioni** Una massa di 2 kg è appesa ad un filo inestensibile lungo l=1.5 m. Oscilla, raggiungendo nel punto più alto della traiettoria un angolo di 10^o con l' orizzontale. Trovare 1) la v_{max} del corpo; 2) la T_{max} (tensione massima) del filo; 3) il numero di oscillazioni al minuto. Sol:
1) Fare un disegno chiaro della situazione. Si vede, geometria dei triangoli, che la quota h_{max}, rispetto allo zero definito quando il filo del pendolo è sulla verticale (ossia a $\theta = 0$), raggiunta a $\theta = 10^o$, è $h_{max} = l - l\cos\theta$). La v_{max}, che si ha quando il filo è sulla verticale, si ottiene con $E_c(max) = E_p(max)$, ossia $(1/2)mv_{max}^2 = mgh_{max}$, da cui $v_{max} = \sqrt{2gh_{max}}$=0.67 m/s;
2) la tensione del filo è massima quando è sulla verticale, perchè la componente della forza peso $mg\cos\theta$, che deve essere contrastata dalla tensione del filo, è massima ($\theta = 0, \cos\theta = 1$)). Dunque, avendo preso il rif. verso l' alto, $T - mg\cos\theta = mv^2/l$, che diventa per $\theta = 0$, $T_{max} - mg = mv_{max}^2/l$ (forza centripeta verso il punto dove è appeso il pendolo). Si ricava T_{max}= 20.2 N
3) ν = 1/T, con $T = 2\pi\sqrt{l/g}$=2.456 s, ν = 0.41 Hz e il numero di oscillazioni al minuto è 60×0.41=24.4 (anche $60/T$).

(i) Dettato e in seguito svolto es.: auto che avanza a v=40 km/h costanti impiegando P=5kW. Calcolare la forza del motore, supponendola dipendere linearmente dalla velocità, e il coefficente di proporzinalità fra la forza e la velocità (coeff. della forza di resistenza dell' aria, assunta dipendere linearmente da v. Il grafico che descrive la forza in funzione della velocità è una retta passante per l' origine). Traccia della soluzione: poichè P e v sono entrambe costanti, la forza del motore F_m è costante. Dunque $F_m = P/v = 450$ N. $\beta = F_m/v = 338$ Ns/m. Trovato β potremmo rispondere anche ad un' altra domanda: calcolarare forza e potenza nel caso in cui la macchina viaggi a velocità v_2, diversa. Si ha $F_2 = \beta v_2$ e $P_2 = F_2 v_2$.

Ancora esempi di **urti** completamente anelastici: il pendolo 'balistico'.

Forze di viscosità

(a) Moto in presenza di forze ritardanti dipendenti dalla velocità, sia linearmente, $\vec{f_r} = -\beta\vec{v}$, che con il quadrato, $\vec{f_r} = -1/2\ D\rho A v^2 \hat{v}$. D = coeff. adimensionale (verificatelo), ρ = densità del mezzo;
A= area sul piano ortogonale alla velocità Eq. del moto di una pallina di

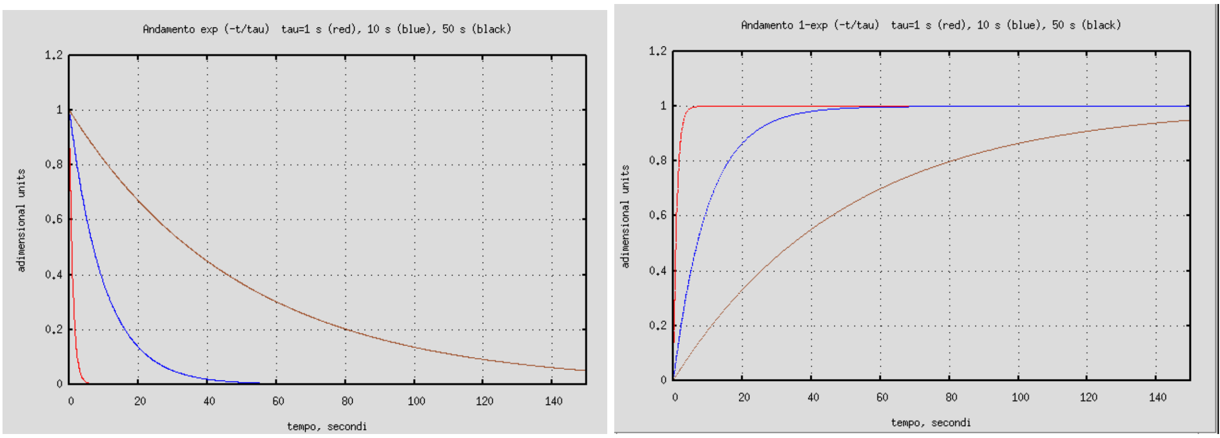


Figura 1: Grafico delle funzioni $\exp^{(-t/\tau)}$ e $(1 - \exp^{(-t/\tau)})$ per 3 valori di τ

massa m che “cade” in un mezzo viscoso : $mg - \beta v = ma = mdv/dt$. Velocità limite: all’ aumentare di v, l’ accelerazione $a = mg - \beta v$ diminuisce. Ad un certo istante si ha $a = 0$, ossia $v_{lim} = mg/\beta$ e, poichè l’ accelerazione è nulla la velocità r esta costante e pari a v_{lim}. Esempio di una biglia che cade in un bicchiere di olio. Discussione della soluzione dell’ equazione differenziale $dv/dt + (\beta/m)v = g$. Concetto di “costante di tempo” $\tau = m/\beta$, dunque $v_{lim} = g\tau$ in questo caso. Vi torna, ragionandoci, che la costante di tempo aumenti all’ aumentare della massa m ? E invece diminuisca all’ aumentare del coefficente di viscosità ? Ragionateci !

(b) Calcolo delle dimensioni di β e di $\tau = m/\beta$, nel caso di moto in presenza di forze ritardanti.

(c) Nota: non risolviamo l’ equazione differenziale, perchè ancora non avete fatto abbastanza matematica. Lo faremo più avanti nel corso, in altri contesti che portano alla stessa equazione. Dunque dovreste, almeno per il momento “fidarvi” della soluzione e cercare invece di capire bene tutte le spiegazioni concettuali che abbiamo fatto. Ossia:

(d) Significato della costante di tempo τ in generale e nel caso di moto in presenza di forze ritardanti dipendenti dalla velocità.

(e) sottolineiamo che questo tipo di andamento `“importante”. Esempio -solo per capirsi con qualcosa di familiare- la misura della febbre con termometri da 5 minuti, 3 minuti . . . ; tipico andamento anche della carica e scarica del condensatore. Vedremo in dettaglio entrambi questi problemi.

(f) Grafico delle funzioni $\exp^{-t/\tau}$ e $(1 - \exp^{-t/\tau})$ (vedi Fig.1).

I fluidi: statica generalità
Numero di Avogadro, mole.
Densità, dati i valori di densità dell' acqua, aria e ferro, come esempio.
Pressione: definizione e unità di misura ($1\ N/m^2 = 1\ pascal$)
Pressione atmosferica: 1 atm=$1.013 \cdot 10^5$ Pa
Fluido a riposo: preso un elementino di fluido la somma delle forze di volume (mg) e di pressione ($p_i\ A_i$) deve essere nulla
Variazione di pressione con la profondità: legge di Stevino. Conseguenza è che la pressione ha lo stesso valore in tutti i punti alla stessa quota, indipendentemente dalla forma del contenitore.
Risolto esercizio: Quanto varia la pressione se al mare ci immergiamo di 10 m?
Vasi comunicanti (conseguenza della legge di Stevino)
Legge di Pascal (conseguenza della legge di Stevino)
Il martinetto idraulico.

Esercitazione Svolto es. 15-3 dispense (legge di Stevino) tubo ad U con acqua e olio in equilibrio statico, sono dati i livelli di acqua e olio nelle due colonnine ($l_a = 135$ mm,$l_o = l_a + d$, $d = 12.3$ mm, l_a e l_o rispetto alla base delle 2 colonnine). Calcolare la densità dell' olio.
Sol: la pressione p_1, alla base delle 2 colonnine, è data da:
$p_1 = p_a + \rho_{olio}\,(l_a + d)$, e da $p_1 = p_a + \rho_{acqua}\,l_a$. Uguagliando si ha: $\rho_{olio} = \frac{\rho_{acqua}\,l_a}{l_a+d} = \frac{10^3 \times 0.135}{(0.135+0.0123)} = 0.9 \times 10^3$ kg/m^3.
Notiamo che il fatto che $\rho_1\,l_1 = \rho_2\,l_2$, ossia che il prodotto ρl=costante è proprio il significato della legge di Stevino. Se il fluido è uno solo, questo porta al principio dei vasi cominicanti. .

10. $\boxed{\textbf{Undicesima settimana: da Ma 20/01 (43-47 lezione)}}$

Misure di pressione: **il barometro di Torricelli** (h colonnina di mercurio, che dà 1 atm). $\rho_{Hg} = 13.6 \times 10^3$ kg/m^3, h_{Hg}=0.76 m=760 mm.
Quanto deve essere alta la colonnina se il liquido anzichè mercurio è acqua ? Facciamo il calcolo e valutiamo che è circa 10 m. Vediamolo in pratica: mostrato bicchiere colmo di acqua, rovesciato (con un foglio di carta appoggiato sopra, per mantenere piano il livello dell' acqua mentre giriamo il bicchiere): l' acqua non cade. Ovviamente finchè il pezzo di carta non si bagna e inizia a rompersi

atmosfera, pascal, mmHg, torr, bar. 1 mmHh=133 pascal. 1 bar= 10^5 pascal. 1 torr $\approx$ 1 mmHg.

Il principio di Archimede Dimostrazione e considerazioni.
Fatto il calcolo: dato un corpo di massa m, volume V_0, densità ρ_0 che galleggia su un fluido di densità ρ_F con V_x immerso, trovare il rapporto V_x/V_0. Si ha equilibrio se:

$-mg + F_a = 0$. Esplicitando: $\rho_0\, V_0\, g = \rho_F\, V_x\, g$, da cui $V_x/V_0 = \rho_0/\rho_F$, ovviamente valida solo se $\rho_0 \leq \rho_F$, infatti V_x non può essere maggiore di V_0, e nel caso di $\rho_0 > \rho_F$ il corpo affonderebbe.

Esercitazione

(a) Svolto es. di esonero (princ. di Archimede) sulla statica dei fluidi (es. 5 esonero pag. 261 dispense): calcolo del carico max che può portare una zattera di massa e volume noti. Zattera larga 2 m, lunga 6 m, con un bordo di 40 cm di altezza sull' acqua, di massa, senza carico, 250 kg. Calcolare il carico max. Sol: $V = 2 \cdot 6 \cdot 0.4 = 4.8$ m^3 noto. All' equilibrio: $(M + m_x)g = \rho_a V g$, dove M=massa zattera, m_x max carico. Da cui: $m_x = \rho_a V - M$=4550 kg.

(b) È ragionevole il fatto che la zia di Harry Potter, per come si vede nel film e per come è descritto nel libro "Il prigioniero di Azkaban", si alzi in volo, se supponiamo che la magia di Harry sia servita solo a "gonfiarla" ? Ed è ragionevoli che riesca a trascinare anche lo zio in volo ?
Discussione e soluzione. Supponiamo che la zia pesi M=100 kg e che Harry l' abbia gonfiata con un fluido di peso trascurabile, ossia la sua massa resti M. $Mg \leq \rho_{aria} V_{zia} g$ da cui: $V_{zia} >= \frac{M}{\rho_{aria}} = \frac{100}{1} = 100$ m^3, ossia il volume che dovrebbe avere la "zia gonfiata" è decisamente maggiore di quello che si vede nel film, o che si deduce dal libro (passa attraverso la finestra ...). E ancora di più quando trascina lo zio, altrettanto pesante, in volo. Ne deduciamo che la magia di Harry è consistita anche nel farla volare. Nota: se approssiamo la forma della "zia gonfiata" con una sfera, di volume $V = (4/3)\pi r^3$, ricaviamo il raggio $r = \frac{V}{(4/3)\pi} = \frac{100}{4.19} = 2.8$ m, ossia un diametro di circa 6 m.

Dinamica dei fluidi: generalità, schematizzazione di fluido ideale,
Linee di flusso;
Equazione di continuità $A_1 v_1 = A_2 v_2$ e portata in volume: le dimensioni del prodotto AV sono m^3/s, dunque questo prodotto rappresenta la "portata in volume". La "portata in massa" sono invece kg/s;
Teorema di Bernoulli;
Nota: si può ricavare la legge di Stevino applicando il teorema di Bernoulli;
Tubo di Venturi. Paradosso idrodinamico.
Ricordare dunque che: dall' eq. di continuità segue che la velocità del fluido aumenta se la sezione del condotto diminuisce e, dal teorema di Bernoulli applicato ad un condotto orizzontale, segue che all' aumentare della velocità la pressione diminuisce.

Esercitazione sui fluidi

(a) Portanza dell' aereo. Teoria e poi svolto esercizio (vedi dopo)

(b) Scoperchiamento dei tetti in una bufera.

(c) La pressione nel corpo umano. Considerando 100 mmHg all' altezza del cuore, svolto il calcolo (con Stevino) della pressione ai piedi e sul capo. Sui piedi,

supponendo 1.2 m fra cuore e piede, viene una pressione di 188 mmHg. A 0.5 m di altezza dal cuore, viene 63 mmHg.
Approssimiamo il sangue con un fluido di stessa densità dell' acqua. Strozzatura di una vena: dalla relazione fra sezione, pressione e densità (Bernoulli su quota orizzontale) spieghiamo gli eventi impulsivi che precedono la catastrofe, ossia l' ischemia della vena.

(d) **Esercizio aereo:** Se l' aria scorre sulla superficie superiore dell' ala di un aereo a $\vec{v_s} = 150$ m/s e su quella inferiore a $\vec{v_i} = 120$ m/s, si trovi: 1) la differenza di pressione fra le due superfici; 2) se l' area dell' ala è $S = 15$ m^2, si trovi la forza agente verso l' alto sull' ala. Sol:
Si tratta di un problema da risolvere con Bernoulli su quota orizzontale. 1) $p_s + (1/2)\rho_a v_s^2 = p_i + (1/2)\rho_a v_i^2$, da cui $p_i - p_s = (1/2)\rho(v_s^2 - v_i^2)$= $(1/2)\,1.28(150^2 - 120^2)$= 5.18 kPa, con p_i maggiore di p_s, come aspettato essendo v_i minore di v_s.
2) $\vec{F} = \vec{F_i} - \vec{F_s}\ (p_i - p_s)\vec{S}$ =7.8 $\times 10^4$ N, rivolta verso l' alto.

(e) Un cubo di ferro di lato $l = 0.5$ m, è in un recipiente pieno di mercurio. si ha: $\rho_{Hg} = 13.6 \times 10^3$ kg/m^3, $\rho_{Fe} = 7.86 \times 10^3$ kg/m^3. 1) Dire se il cubo galleggia o no e perchè.
2) Se galleggia, determinare l' altezza d di cui è sotto il livello del mercurio. Sol:

1) ρ_{Fe} minore di ρ_{Hg} dunque galleggia
2) Sotto il livello avremo un parallelepipedo rettangolo con due dimensioni pari a l e la terza incognita d. $V_{cubo} = l^3$, $V_{imm} = l^2\,d$. Equilibrio se: $m_{cubo} g = \rho_{Hg} V_{imm} g$, da cui $V_{cubo}\rho_{Fe} g = \rho_{Hg} V_{imm} g$,
$V_{imm} = \frac{\rho_{Fe}}{\rho_{Hg}} V_{cubo}$ e, sostituendo le espressioni dei volumi:
$d = \frac{\rho_{Fe}}{\rho_{Hg}} l = 0.29$ m.

(f) **Esercizi presi dall' esonero CTF febbraio 2006**

11. **Dodicesima e tredicesima settimana: da Ma 27/01 alla pausa (48-52 e 53-57 lezione)**

Due settimane di sola esercitazione Svolti esercizi tipici di esonero.
Ne scrivo alcuni.

(a) **Fluidi** La pressione sul fondo di un serbatoio di acqua è di $p_0 = 2 \times 10^5$ Pa superiore a quella atmosferica (ossia $p_2 = p_A + p_0$). Determinare: a) la profondità dell' acqua nel serbatoio; b) se dell' acqua viene versata nel serbatoio al ritmo di 750 l/min e si vuole mantenere costante il livello dell' acqua, quale dovrà essere la superficie di un foro praticato sul fondo del serbatoio ? c) quale sarà la velocità di uscita dell' acqua dal serbatoio in queste condizioni ? (sezione del serbatoio molto maggiore di quella del foro). Sol:
$\Delta p = \rho g h$. Da cui h= 20.4 m.
Voglio che $A_1 v_1 = A_2 v_2$, dove con 2 indico il flusso in uscita e con 1 quello in

entrata. $A_1 v_1 = 750$ l/min $= \frac{750\ 10^{-3}}{60}$ =0.0125 m^3/s. Da cui $A_2 = \frac{A_1 v_1}{v_2}$. Per calcolare v_2 uso Bernoulli, con la pressione $p_1 = p_2 = p_A$ e con $v_1 = 0$. p_2 è uguale alla pressione atmosferica perche' c' è il foro. Si ha: $v_2 = \sqrt{2gh}$ e $A_2 = 6.25\ 10^{-4}$ m^3.

(b) **Fluidi** Appoggiando un peso di $m_1 = 10$ g nel centro di una tavoletta di legno di $M = 100$ g che galleggia sull'acqua si osserva che la fa affondare fino ad un determinato punto. Ripetendo l'esperimento con la stessa tavoletta, ma facendola galleggiare su una soluzione salina, si nota che per farla affondare fino al punto precedente il peso deve essere di $m_2 = 15$ g. Determinare la densità relativa (rispetto all'acqua) della soluzione salina. Sol:
Indichiamo con V il volume incognito immerso nel fluido, abbiamo: $\rho_a \cdot V \cdot g = (m_1 + M)g$ e $\rho_x \cdot V \cdot g = (m_2 + M)g$ dividendo le due equazioni si ha: $\frac{\rho_x}{\rho_a} = \frac{m_2+M}{m_1+M} = \frac{15+100}{10+100} = 1.045$

(c) **Meccanica punto** Uno slittino scivola da un pendio di angolo $\alpha = 45^o$ a velocità costante. Det. il coefficente di attrito dinamico slittino-neve e la velocità finale, se lo stesso slittino scende da una pista di angolo $\beta = 60^o$ ed altezza h=100 m.

(d) **Urti** Due auto, a e b, si scontrano all' incrocio fra due strade perpendicolari. Le masse delle auto sono $m_a = 2400$ kg e $m_b = 1200$ kg. Le velocità prima dell' urto sono $v_a = 30$ km/h e $v_b = 60$ km/h. Supponendo l' urto completamente anelastico, determinare modulo e angolo rispetto alla direzione iniziale di a, del vettore velocità dopo l' urto

(e) **Oscillazioni**.
Es. 6.7 pag. 161 Serway, non è banalissimo: blocco di massa m a distanza h dall' estremità di una molla inizialmente a riposo, viene lasciato cadere sulla molla. Calcolare la compressione massima. Nota $k = 1000$ N/m h=1 m e m=1.6 kg.
1)Preso lo zero dell' energia potenziale gravitazionale nella situazione in cui la molla è stata compressa, a distanza $(h+d)$ dalla posizione iniziale della massa. d è l' incognita.
2)Soluzione data con il bilancio energetico:nella situazione di max compressione tutta l' energia potenziale della massa è energia potenziale della molla:

$$mg(h+d) = \frac{Kd^2}{2} \tag{128}$$
$$d^2 - Cd - Ch = 0 \tag{129}$$
$$C = \frac{2mg}{K} \tag{130}$$

3)Soluzione data con il lavoro e teorema dell' energia cinetica, applicati alla situazione in cui la massa è caduta di h, ossia ha appena toccato la molla e ha velocità v (la sua velocità iniziale era 0):

$$\begin{aligned}
mg(h+d) &= mgd + \frac{mv^2}{2} && (131)\\
v &= \sqrt{2gh} && (132)\\
L &= \int_0^d (mg - Kx)\,\mathrm{d}x && (133)\\
L &= \Delta E_c = 0 - \frac{mv^2}{2} && (134)\\
mgd - \frac{Kd^2}{2} &= -\frac{mv^2}{2} = -mgh && (135)\\
d^2 - Cd - Ch &= 0 && (136)\\
C &= \frac{2mg}{K} && (137)
\end{aligned}$$

ossia, ovviamente, arriviamo alla stessa Equazione con entrambi i procedimenti (il primo è chiaramente più semplice). Abbiamo una eq. di secondo grado, ossia avremo 2 soluzioni. Le 2 soluzioni, per come è stata ricavata l' Equazione, sono le 2 posizioni nelle quali l' energia della molla è tutta potenziale, ossia la posizione di max compressione (risposta al problema) e quella di max elongazione. Nota: ogni volta cha abbiamo una Eq. di secondo grado avremo 2 soluzioni, di cui una sarà la soluzione al nostro problema e l' altra ha comunque un significato fisico e bisognerebbe sempre cercare di capire quale è.

$$\begin{aligned}
d_{+,-} &= \frac{C}{2} \pm \sqrt{(\frac{C^2}{4} + Ch)} && (138)\\
d_{+,-} &= 0.0157 \pm 0.1767 && (139)\\
d_{+} &= 0.192 && (140)\\
d_{-} &= -0.161 && (141)
\end{aligned}$$

Notiamo che:

- il sistema (massa+molla) oscilla attorno a $\frac{C}{2} = 0.0157$ con ampiezza 0.1767;
- il fatto che $\frac{C}{2} = \frac{mg}{K} = 0.0157$ sia la nuova posizione di equilibrio lo si può anche vedere dalla relazione di equilibrio del sistema $mg = Kd_{eq}$;
- le due radici $d_{+,-}$, di cui d_+ è la risposta al problema, sono ampiezze di oscillazione prese rispetto alla posizione iniziale di riposo della molla e per questo non sono uguali in valore assoluto. Ma stressiamo il fatto che rispetto alla nuova posizione di equilibrio il sistema oscilla con ampiezza massima (sia in compressione che in allungamento)= 0.1767.

(f) Svolto esercizio n. 5 pag. 234 Serway: sferetta, m=5 g,che scivola su una guida senza attrito, da una quota $h = 3.5R$ percorrendo una traiettoria circolare da un certo punto in poi: trovare la velocità, in funzione di R, ad una

certa quota A (quando è in cima alla traiettoria circolare, A=2R) e la forza normale agente sulla sferetta. Dunque conservazione dell' energia meccanica per trovare la velocit'a e diagramma delle forze ricordando che ma in questo caso è $-mv^2/R$ se ragioniamo in termini di forza centripeta. NOTA: non è un moto circolare uniforme perchè l' en. cinetica e dunque la velocità varia con la quota (E_c+E_p=costante), dunque ci sarà sia accelerazione radiale (centripeta) che tangenziale. Ma questo non cambia nulla nel calcolo della forza normale agente sulla sferetta in A. Traccia della sol.:
Per trovare la velocità in A=2R si applica la conservazione dell' en. meccanica: $mhg = (1/2)mv_A^2 + mg2R$. Da cui: $v_A = \sqrt{3gR}$ (h=3.5 R, e (3.5R-2R)=1.5R). Per la normale: normale, forza peso e centripeta in A sotto tutte dirette verso il basso (la pallina deve stare all' interno della guida, che dunque la "preme" sempre da sotto): $n + mg = mv_A^2/R$, dunque $n = mv_A^2/R - mg = 2mg$=0.098 N.

(g) Esercizio della prova di esonero (una vera "prova" in vista dell' esonero), a febbraio 2006:
1) un blocco di 2 kg è spinto contro una molla di $K = 500$ N/m, accorciandola di 20 cm. Esso viene poi lasciato andare e la molla lo spinge lungo una superficie orizzontale priva di attrito, e poi su un piano inclinato di 45^o anche esso privo di attrito. Determinare: a) la velocità del blocco quando abbandona la molla; b) la distanza percorsa lungo il piano inclinato. Aggiungiamo anche: la quota h alla quale arriva; l' en. potenziale alla quota massima.
Sol: Notiamo che c' è scritto "energia" nel titolo ...
1) Conservazione dell' energia (en. meccanica della molla compressa= en. cinetica del blocco non appena si stacca): (1/2) Kx^2 = (1/2) mv_b^2, da cui: $v_b = x\sqrt{K/m}$= $0.2 \times \sqrt{\frac{500}{2}}$=3.2 m/s.
2) Per calcolare la distanza percorsa sul piano inclinato utilizziamo lavoro-energia cinetica. Il lavoro è quello svolto dalla forza di gravità, che tende a riportare il blocco verso il basso. Non c' è attrito. Dunque: $L = -mg \sin\theta \Delta x = 0 - 1/2mv_b^2$ (avendo ora preso l' asse x lungo il piano inclinato, positivo verso l' alto; la vel. iniziale del blocco è v_b, quella finale nulla). Si ricava: $\Delta x = (1/2)v_b^2/(g\sin\theta)$=0.721 m.
3) Domande aggiunte: la quota h si ricava dal Δx, infatti h è un cateto del triangolo rettangolo che ha Δx come ipotenusa: $h = \Delta x \sin\theta$; l' en. potenziale del blocco alla quota massima è ovviamente mgh, che deve coincidere con l' en. iniziale (visto che non ci sono forze dissipative e in h l' en. cinetica del blocco è nulla): $mgh = 1/2Kx^2$=10 J
(formula semplicissima che potrebbe essere un altro modo per calcolare h e anche Δx).
Domanda: come cambiano le cose se sul piano inclinato ci fosse stato attrito, con $\mu_D = 0.2$? (da porgli e lasciargliela come esercizio).

(h) Esercizio. di esonero (dispense di esercizi): quanto vale la velocità angolare a cui dovrebbe ruotare la Terra affinchè la forza centripeta all' equatore sia uguale al peso di un corpo ivi situato; quanto varrebbe T ? Se un uomo che pesa ordinariamente 900 N stesse in piedi su una bilancia all' Equatore, quale sarebbe l' indicazione della bilancia ? Quanto sarebbe la durata del giorno solare medio ?

Prima di risolvere l' esercizio, ridiscussa l' equazione $\vec{F} = m\vec{a}$ nel caso di m sulla superficie della Terra, in piedi su una bilancia all' Equatore: $-mg + T = -m\omega^2\, R_T$, da cui $T = m(g - \omega^2 R_T)$. T è la reazione del vincolo. Nel problema in esame imporre $g = \omega^2 R_T$ corrisponde a $T = 0$, ossia ad assenza di vincolo. Dunque il peso di una persona su una bilancia all' Equatore è nullo. Notiamo che la soluzione $\omega = \sqrt{g/R_T} = 0.0012$ rad/s è identica a quella del problema del corpo in orbita attorna alla Terra, a distanza R_T o del corpo nel tunnel passante per il centro della Terra, problema che faremo. Infatti sono tutti casi in cui non esiste un vincolo (“caduta libera“)

La durata del giorno solate medio sarebbe dunque $T = \frac{2\pi}{\sqrt{g/R_T}} \approx 5045$ s.

(i) **Fluidi** Una cisterna cilindrica chiusa disposta verticalmente, alta $h_0 = 20$ m e con un raggio di 1 m, contiene per metà acqua e per l'altra metà aria ad una pressione di 2 atm. Sul fondo della cisterna viene praticato un foro circolare di 1 cm di raggio. Determinare: a) la velocità di uscita dell'acqua; b) la portata del getto d'acqua R. Sol:

a) Si applica l'equazione di Bernoulli tra un punto sulla superficie dell'acqua dentro la cisterna ed un punto nell'acqua che sta uscendo dal foro. Si tenga presente che l'acqua esce “contro” la pressione atmosferica, mentre la pressione al si sopra dell'acqua nella cisterna è di 2 atmosfere. Si tenga inoltre presente che la velocità di abbassamento dell'acqua nella cisterna può essere trascurata rispetto alla velocità con la quale l'acqua esce dal foro (vedi l' equazione di continuità nei fluidi):

$2P_0 \;+\; \rho g h \;=\; P_0 \;+\; \frac{1}{2}\rho v^2$ dove $h = h_0/2 = 10$ m

$\Rightarrow\; v \;=\; \sqrt{\frac{2P_0}{\rho} + 2gh} \;=\; \sqrt{\frac{2 \cdot 1.01 \cdot 10^5}{10^3} + 2 \cdot 9.8 \cdot 10} = 19.9\; m/s$

b) $R \;=\; v \cdot S \;=\; v \cdot \pi r^2 \;=\; 19.9 \cdot \pi (10^{-2})^2 \;=\; 62.5 \cdot 10^{-4}\; m^3/s \;=\; 6.2\; l/s$

(j) Potenza di una centrale idroelettrica:

$$P \;=\; \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(mgh)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\, gh\,, \qquad (142)$$

ove $\mathrm{d}m/\mathrm{d}t$ è pari al flusso di acqua (in massa, ovvero in kg/s). Dati reali (centrale ENEL della diga sul Tevere di Castel Giubileo, 29/4/05):

- volume di acqua convogliata alle turbine: 180 m^3/s;
- dislivello: 7 m;
- potenza elettrica generata: 12 MW

dai quali ricaviamo dm/dt = 180000 kg/s (densità acqua= 1000 kg/m^3), da cui $P = 1.80\,10^5\,\mathrm{kg/s} \times 9.8\,\mathrm{m/s^2} \times 7\,\mathrm{m} = 1.2\,10^7\,\mathrm{W} = 12\,\mathrm{MW}$, in accordo con il dato avuto dalla centrale (vuol dire che, a parte arrotondamenti e approssimazioni, l'efficienza di conversione da potenza meccanica a potenza termica è molto elevato).

(k) Determinare la massa complessiva m_{atm} dell' atmosfera terrestre, noto R_T = 6.37 10^6 m e la pressione atmosferica p_a). Determinare anche il volume, nota la densità, supposta costante (Es. 15.1-5 pag. 534 Serway). Sol:
Ci deve essere equilibrio fra la forza di gravità sulla massa m_{atm}, diretta verso la superficie terrestre (basso) e la spinta di Archimede, diretta verso l' alto. Dunque $m_{atm}g = \rho_{aria}V_{atm}g = p_{atm}S_{atm}$, dove $S_{atm} = 4\pi R_T^2$. Siamo ricorsi all' uso dell' espressione in funzione della pressione atmosferica perchè è la grandezza che conosciamo, mentre il volume non lo conosciamo. Dunque: $m_{atm} = \frac{p_{atm}S_{atm}}{g} = 1.013 \times 10^5 \times 4\pi \times (6.37 \times 10^6)^2\ /9.8 = 5 \times 10^{18}$ kg. E il volume vale $V_{atm} = m_{atm}/\rho_{aria} = \frac{5\times10^{18}}{1.3} \approx 4 \times 10^{18}$

(l) Un corpo di massa 2 kg si muove su un piano orizzontale liscio con $v = 3$ m/s e urta contro una molla di $K = 450$ N/m vincolata ad un estremo su un piano verticale. Calcolare:
1) la max compressione della molla
2) supponendo che il piano sia scabro e che la massa urti la molla alla stessa velocità comprimendola (max compressione) di $x'_{max} = 18$ cm, trovare il μ_D e il lavoro fatto dalle forze di attrito dopo l' urto.
Sol: $x_{max} = 0.2$ m= 20 cm; $\mu_D = 0.48$; $L_{fa} = 1.71$ J

(m) Un blocco di massa $m = 6.4$ kg è appoggiato ad una parete verticale. Il coeff. di attrito statico blocco-parete è $\mu_S = 0.76$. Trovare: 1) il valore minimo di una forza $\vec{F}$ orizzontale, che spinge il blocco contro la parete, senza farlo scivolare; 2) se $F = 50$ N e $\mu_S = 0.6$, calcolare l' accelerazione (modulo,direzione e verso) a cui è soggetto il blocco.
Sol numerica: $F_{min} = 82.6$ N; a= 5.12 m/s^2, diretta verso il basso.

(n) Durante una gara di motocross una motocicletta corre in direzione di un fossato. Sul bordo di questo è stata costruita una rampa con un angolo di 10° con l'orizzontale per permettere alla motocicletta di saltare il fossato. Se, per superare il fossato, la motocicletta deve saltare una distanza orizzontale di 7 m, quale deve essere il modulo della sua velocità quando si stacca dalla rampa?
Sol: si può usare l' equazione della gittata, ponendola $R = 7$ m

(o) Ad una boa di volume 200 l e $m_b = 20$ kg è appesa una catena di volume trascurabile e $m_c = 100$ kg. Alla catena è attaccato un corpo di volume trascurabile. Trovare:
a) la massa max del corpo appeso, tale che la boa non affondi

b) se il corpo avesse massa $m_x/2$ trovare la frazione di volume che affiora. Sol: a) $V_{boa} = 200$ l= 200 dm^3=0.2 m^3. $(m_b + m_c + m_x)g = V_{boa}g\rho_A$ da cui si ricava m_x= 80 kg.

b) Sol 1: $(m_b + m_c + m_x/2)g = \alpha V_{boa}g\rho_A$
qui α è la frazione di volume che è sotto l' acqua. $M_T = (m_b+m_c+m_x/2 = 160$ kg, $\alpha = \frac{M_T}{V_{boa}\rho_A}$. Si trova $\alpha = 0.8$, dunque la frazione di volume che emerge è $1 - \alpha = 0.2$. b) Sol 2: $(m_b + m_c + m_x/2)g = (1 - \alpha)V_b g\rho_A$
qui α è la frazione di volume che emerge l' acqua. Si trova $\alpha = 0.2$, consistente con la definizione data di α.

(p) Si osserva che la velocità limite raggiunta da una pallina lasciata cadere in un fluido è $v_{lim} = 10$ m/s. Determinare la velocità che la pallina aveva dopo 1 secondo.

Esercitazione fatta in classe dagli studenti 29/01/09: prova per l' esonero:

(a) **Dinamica** Un carico di 100 kg viene sollevato di 10 m mediante un cavo, con accelerazione costante uguale, in modulo, ad $a = 0.2 \cdot g$ m/s^2, dove g è l' accelerazione di gravità. Determinare: 1)la tensione del cavo, 2) il lavoro complessivo compiuto sul carico, 3) la velocità finale del carico.

(b) **Fluidi** Una boa, che affiora sul mare, ha volume V_b= 100 l e massa trascurabile. È ancorata sul fondo del mare con una catena di ferro di spessore trascurabile che ha massa per unità di lunghezza 4 kg (spiegazione: ossia la sua densità lineare è $\lambda = dm/dx = 4$ kg/m). Trovare la max profondità a cui la boa può essere ancorata senza essere trascinata sott' acqua (spiegazione: ossia la max lunghezza della catena).

(c) **Urti:** Una pallina viene lanciata contro un' altra di massa identica, inizialmente a riposo, su un terreno scabro. Il coefficente di attrito dinamico sia $\mu_D = 0.8$. Si consideri l' urto fra le due palline elastico. Calcolare la velocità con la quale la prima deve urtare la seconda, affinchè quest' ultima si fermi dopo 2 m.

(d) **Fluidi:** Abbiamo una fontana con il getto rivolto verso l' alto. L' acqua esce da un tubo di diametro 2 cm, alla velocità di 8 m/s. Calcolare: 1) il diametro del getto all' altezza di 2 m; 2) la quota massima a cui arriva l' acqua.

(e) **Cinematica** Un oggetto lanciato verticalmente verso l'alto impiega 2 secondi prima di tornare al punto di partenza. Trovare:
1) l'altezza massima alla quale arriva l'oggetto; 2) la velocità che esso possiede quando è ad 1/3 dell'altezza massima (si trascuri la resistenza dell'aria).

(f) **Urti** In un urto fra due corpi A e B, che formano un sistema isolato, A subisce una variazione di quantità di moto $\Delta\vec{p}_A = \{1, -4, 3\}$ kg m/s. Sapendo che B, di massa 2 kg, aveva inizialmente una quantità di moto $\vec{p}_{B_{in}} = \{1, 4, -3\}$ kg m/s, trovare la sua velocità ed energia cinetica dopo l'urto.

(g) **Dinamica** Un oggetto di massa 1 kg è posto su un piano scabro. Si determina empiricamente che affinché l'oggetto cominci a scivolare è necessario inclinare il piano di 30 gradi. Successivamente il piano è riposizionato orizzontalmente e l'oggetto è tirato con una molla di costante elastica $k = 1000$ N/m. Determinare di quando si è allungata la molla quando l'oggetto comincia a muoversi.

(h) **Oscillazioni** Un orologio a pendolo viene portato sulla Luna, dove ricordiamo che $g_L = g/6$. Quanto tempo impiegano le sfere dell' orologio ad indicare un tempo apparente di 12 h ?

Esercitazione: discussa soluzione esercitazione fatta dagli studenti:

(a) Un carico di 100 kg viene sollevato di 10 m mediante un cavo, con accelerazione costante uguale, in modulo, ad $a = 0.2 \cdot g$ m/s^2, dove g è l' accelerazione di gravità. Determinare: 1) la tensione del cavo, 2) il lavoro complessivo compiuto sul carico, 3) la velocità finale del carico. Soluzione:
Prendiamo il sistema di riferimento verso l' alto, nella direzione del moto. Se indichiamo con T la tensione del cavo e con m la massa del carico, avremo $T - mg = ma$.

a) T=mg+ma=mg(1+0.2)=1.18 kN

b) $L_t = T\,h - mgh = 1.96$ kJ, oppure , poichè la forza comlessiva è $F = ma$=196 N, si ha anche che $L_t = F \cdot h$=196 $\cdot$ 10=1.96 kJ.

c) $L_t = \Delta E_c$, dunque (poichè la velocità iniziale è nulla) $v_f = \sqrt{2\,L_t/m}$=6.3 m/s. O anche $v_f = \sqrt{2ah}$, che porta allo stesso risultato (si ottiene o dal lavoro L_t scritto come mah, o dalla rel. velocità-spazio nel moto unif. accelerato: $v_f^2 - v_0^2 = 2a(s - s_0)$).

(b) **Fluidi** Una boa, che affiora sul mare, ha volume V_b= 100 l e massa trascurabile. È ancorata sul fondo del mare con una catena di ferro di spessore trascurabile che ha massa per unità di lunghezza 4 kg (spiegazione: ossia la sua densità lineare è $\lambda = dm/dx = 4$ kg/m). Trovare la max profondità a cui la boa può essere ancorata senza essere trascinata sott' acqua (spiegazione: ossia la max lunghezza della catena). Sol:
equilibrio: $M_c g = \rho_a V_b g$, dove la massa della catena è $M_c = \lambda l$. Da qui si calcola $l = 25$ m

(c) **Urti:** Una pallina viene lanciata contro un' altra di massa identica, inizialmente a riposo, su un terreno scabro. Il coefficente di attrito dinamico sia $\mu_D = 0.8$. Si consideri l' urto fra le due palline elastico. Calcolare la velocità con la quale la prima deve urtare la seconda, affinchè quest' ultima si fermi dopo 2 m.

Sol: Ricordiamo che in un urto elastico centrale $v_1 - v_2 = v_2' - v_1'$ e che, se le due masse sono uguali, le due velocità si scambiano. Ossia $v_2 = 0 = v_1'$ e $v_2' = v_1$, dove v_1 è la velocità che dobbiamo calcolare. $L_{attrito} = -\mu_D mg\Delta x = \Delta E_c$, dove $\Delta x = 2$ m e $\Delta E_c = (1/2)mv_f^2 - (1/2)mv_i^2$ è la variazione di energia cinetica. $v_f = 0$ e $v_i = v_1$. Si ricava: $v_1 = \sqrt{2\mu_D g\Delta x} = \sqrt{2 \cdot 0.8 \cdot 9.8 \cdot 2} = 5.6$ m/s

(d) **Fluidi:** Abbiamo una fontana con il getto rivolto verso l' alto. L' acqua esce da un tubo di diametro 2 cm, alla velocità di 8 m/s. Calcolare: 1) il diametro del getto all' altezza di 2 m; 2) la quota massima a cui arriva l' acqua.

Sol: 1) Si usa Bernoulli e l' equazione della portata (velocità inversamente proporzionale al diametro del getto).
$(1/2)\rho v_1^2 + \rho g h_1 + p_1$=

$(1/2)\rho v_2^2 + \rho g h_2 + p_2$, con $v_1 = 8m/s$, $h_1 = 0$, $h_2 = 2$ m, $\rho =$ densità dell' acqua, e $p_1 = p_2 = p_{atm}$.
Portata $= A_1 v_1 = A_2 v_2$. Dunque: $(1/2)\rho v_1^2 =$
$(1/2)\rho v_2^2 + \rho g h_2$, da cui si ricava $v_2 = \sqrt{v_1^2 - 2gh_2} = \sqrt{8^2 - 2 \cdot 9.8 \cdot 2} = 4.98$ m/s. Ora serve l' equazione della portata, dove mettiamo $A_1 = \pi(d_1/2)^2$, $A_2 = \pi(d_2/2)^2$, con $d_1 = 2$ cm e d_2 da calcolare. Si ricava: $d_2 = d_1\sqrt{v_1/v_2}$=0.02 $\sqrt{8/4.98}$=0.025 m
2) Si usa Bernoulli, con le considerazioni fatte prima, tenendo presente che, alla quota massima, la velocità del getto diventa zero:
$(1/2)\rho v_1^2 =$
$\rho g h_{max}$, da cui $h_{max} = (1/2g)v_1^2 = 3.27$ m.

(e) Un oggetto lanciato verticalmente verso l'alto impiega 2 secondi prima di tornare al punto di partenza. Trovare:
1) l'altezza massima alla quale arriva l'oggetto; 2) la velocità che esso possiede quando è a 1/3 dell'altezza massima (si trascuri la resistenza dell'aria). Sol:
1) Per simmetria, il tempo di salita è pari a quello di discesa e quindi l'altezza raggiunta è data da: $h_{max} = g\,(t/2)^2/2$=9.8 $(2/2)^2/2$= 4.9 m. Non ho calcolato la velocità iniziale perchè sto lavorando nel secondo tratto, dalla quota massima verso la quota minima. Più semplice, e il risultato è lo stesso, ovviamente.
2) Per trovare la velocità per la quota $z = h_{max}/3$ usiamo il bilancio energetico $m\,g\,h_{max} = \frac{1}{2}\,m\,v_m^2 + m\,g\,\frac{h_{max}}{3}$, da cui $v_m = \sqrt{2g\,(h_{max} - \frac{h_{max}}{3})} = 8.5$ m/s

(f) In un urto fra due corpi A e B, che formano un sistema isolato, A subisce una variazione di quantità di moto $\Delta\vec{p}_A = \{1, -4, 3\}$ kg m/s. Sapendo che B, di massa 2 kg, aveva inizialmente una quantità di moto $\vec{p}_{B_{in}} = \{1, 4, -3\}$ kg m/s, trovare la sua velocità ed energia cinetica dopo l'urto. Sol:
Per la conservazione della quantità di moto, $\Delta\vec{p}_B = -\Delta\vec{p}_A = \{-1, 4, -3\}$ kg m/s e quindi $\vec{p}_{B_{fin}} = \vec{p}_{B_{in}} + \Delta\vec{p}_B = \{0, 8, -6\}$ kg m/s.
Ne segue $\vec{v}_{B_{fin}} = \vec{p}_{B_{fin}}/m = \{0, 4, -3\}$ m/s, ovvero 5 m/s in modulo. L'energia cinetica finale vale quindi 25 J.

(g) Un oggetto di massa 1 kg è posto su un piano scabro. Si determina empiricamente che affinché l'oggetto cominci a scivolare è necessario inclinare il piano di 30 gradi. Successivamente il piano è riposizionato orizzontalmente e l'oggetto è tirato con una molla di costante elastica $k = 1000$ N/m. Determinare di quando si è allungata la molla quando l'oggetto comincia a muoversi. Sol:
Dall'angolo in cui l'oggetto comincia muoversi otteniamo il coefficiente di attrito statico, in quanto $mg\sin\theta = \mu_s mg\cos\theta$, ovvero $\mu_s = \tan\theta$, pari a $1/\sqrt{3} = 0.577$ con i dati del problema. Quando il piano è orizzontale la condizione di 'stacco' è data da $k\,\Delta x = \mu_s mg$, da cui $\Delta x = \mu_s mg/k = 5.6$ mm.

(h) Un orologio a pendolo viene portato sulla Luna, dove ricordiamo che $g_L = g/6$. Quanto tempo impiegano le sfere dell' orologio ad indicare un tempo apparente di 12 h ? Sol:

Periodo del pendolo sulla luna $T_L = 2\pi\sqrt{l/g_L}= 2\pi\sqrt{(6\cdot l)/g}$, dove g=9.8 m/s^2. Dunque: $T_L = \sqrt{6}T_T$, maggiore del periodo sulla Terra, T_T. Dunque, 12 ore apparenti sulla luna sono date da un tempo maggiore di 12 ore, ossia $t_L^{12h} = \sqrt{6}\cdot 12$= 29.4 ore.

12. $\boxed{\textbf{Prima settimana dopo la pausa: da Ma 3 marzo lez.58-62}}$

Calorimetria:

(a) **Temperatura** e **calore**: dal livello percezionale/intuitivo alle definizioni operative. Cominciamo con la temperatura:

- Il concetto fisico di temperatura è un raffinamento della nostra percezione sensoriale del caldo e del freddo.
- Le percezioni possono essere ingannevoli, in quanto noi siamo sensibili alla rapidità con cui assorbiamo o emettiamo calore attraverso la pelle: oggetti (verificabili strumentalmente) alla stessa temperatura ci appaiono più o meno caldi a seconda di quanto trasmettono il calore (es metalli o marmo rispetto a legno, plastica o polistirolo; gli oggetti metallici ci sembrano più freddi degli altri quando sono a temperatura inferiore alla nostra temperatura corporea, e a temperatura superiore ci sembrano più caldi, vedi es. in sauna). Famoso è il 'chilly factor' che dà la temperatura ambiente 'percepita' e dipende da umidità e velocità del vento.
- Proposto esercizio per casa: "patata al cartoccio" (ossia in Alluminio, con il Domopack..) cotta nel forno a (200^o C). Toglierla dal forno prendendola per il lembo di sopra del Domopack che l' avvolge. Brucia? Toccare poi la parte dove c'e' la patata, o direttamente la patata stessa. Brucia?
- I termometri sono basati sull'osservazione che alcuni corpi cambiano qualche loro proprietà al variare della temperatura, ad esempio i metalli variano le loro dimensioni, componenti elettrici possono cambiare corrente o tensione, etc. Il caso più famoso è quello del mercurio, che ha una forte espansione termica.
- Per definire la scala termometrica è importante avere dei riferimenti. Si potrebbe usare un termometro di riferimento (in analogia al campione di kg), ma la scala oltre che arbitraria (e in principio non ci sarebbe niente di male) è difficilmente riproducibile.
  Osservazione della stabilità della temperatura in coincidenza con i cambiamenti di fase (ghiaccio $\rightarrow$ acqua; ebollizione). Il caso dell'acqua è particolarmente comodo in quando le temperature di interesse sono tipiche dell'esperienza quotidiana. Scala centigrada (quella usuale). Assunzione di linearità dell'innalzamento della colonnina di mercurio;

Calorimetria:

(a) Alla base delle misure termometriche e degli scambi di calore c'è il **principio zero della termodinamica**: due corpi messi a contatto raggiungono la stessa temperatura (si termalizzano).

(b) Per misurare la temperatura di un corpo dobbiamo mettere in contatto con esso il termometro ed attendere lo stabilizzarsi della temperatura (tipicamente, se il corpo è 'grande' il termometro raggiungerà la temperatura del corpo, ma in generale termometro e corpo raggiungeranno una temperatura comune di equilibrio – vedi poi lezione successiva).

(c) Proprietà transitiva: se un termometro in equilibrio prima con A e poi con B misura lo stesso valore di temperatura, diremo che A e B sono alla stessa temperatura (e quindi in equibrio termico), anche se alle nostre sensazioni uno dei due sembra più freddo dell'altro.

(d) Scale celsius e fahrenheit. Notato che non solo lo 0 della scala è diverso, ma anche il ΔT, ossia un grado celsius è diverso da un grado fahrenheit.
T del ghiaccio che fonde= 0^o C= 32^o F;
T dell' acqua che bolle= 100^o C= 212^o F;
Da cui segue che $T_F = 32 + T_C * 180/100$.

(e) Date 2 temperature diverse, ad esempio 20^o C e 80^o C, calcolate i 2 valori in Fahrenheit e il ΔT_F (lasciato come esercizio).
Soluzione: $T_1 = 1.8 * 20 + 32 = 68^o$ F, $T_2 = 1.8 * 80 + 32 = 176^o$ F
ΔT celsius= 60^o C, ΔT fahrenheit= 108^o F.

(f) Introdotto il concetto di kelvin, come unità di misura della temperatura nel S.I. e notato 1) che non si dice "grado kelvin", ma solo "kelvin" (o K maiuscola); 2) che fra la scala kelvin e la scala celsius c' è solo una differenza di zero, dunque $\Delta T_C = \Delta T_K$; 3) che la differenza di zero è tale che se parliamo di temperature molto alte, tipo 10^5, non fa nessuna differenza pratica se la scala sia kelvin o celsius..

(g) Temperatura "ambiente" 27^o C= 300, K

(h) Relazione fra le tre scale: $\frac{T_C}{100} = \frac{T_F - 32}{180} = \frac{T_K - 273.15}{100} =$

(a) **Temperatura** e **calore**: Passiamo adesso al calore.
   - Originariamente il concetto di calore è legato a quello di sorgente di calore, tipicamente fuoco o raggi solari.
   - Questa entità, ancora da definire operativamente, è quella che scalda i corpi, ovvero provoca variazioni di temperatura.
   - è un dato di fatto che esistono sorgenti di calore più o meno 'potenti' (nel senso colloquiale del termine, per ora), ovvero capaci di scaldare più o meno rapidamente i corpi (ovvero di 'fornire più o meno calore nell'unità di tempo').
   - A parità di sorgente di calore, l'innalzamento di temperatura dipende dal tempo di funzionamento (a parte in corrispondenza delle transizioni di fase, come vedremo più avanti).
   - La stessa sorgente di calore, tenuta in funzione lo stesso tempo, scalda diversamente sostanze diverse e , a parità di sostanza, scalda diversamente diverse quantità di quella sostanza (es. pentolino o pentolone

d'acqua su fornello domestico):

$$\Delta T \propto Q \quad (143)$$

$$\Delta T \propto \frac{Q}{M} \quad (144)$$

$$\Delta T = \frac{Q}{c\,M}\,, \quad (145)$$

ove M è la massa del corpo, Q è la quantità di calore e c, legato al coefficiente di proporzionalità della (144), è il *calore specifico*, una proprietà del corpo che dipende anche dalla temperatura, e quindi andrebbe scritto come $c(T)$ e quindi la (145) andrebbe riscritta come $\mathrm{d}T = \mathrm{d}Q/(c(T)\,M)$.

– Scrivedo il fattore di proporzionalità della (143) come $1/C$, definiamo la *capacità termica* C come

$$C = \frac{Q}{\Delta T}\,: \quad (146)$$

minore è lo sbalzo termico ΔT a parità di calore assorbito, maggiore è la capacità termica del corpo. Analogia di capacità volumetriche assumendo recipienti circolare di diversa sezione: il recipiente più capiente è quello in cui il livello del liquido si innanza di meno a parità di liquido introdotto.
Analogia con la capacità in elettrostatica:

$$C = \frac{Q}{\Delta V}\,: \quad (147)$$

a parità di carica elettrica Q sulle armature del condensatore (di capacità C), maggiore è la capacità e minore il ΔV, ossia la differenza di potenziale fra le armature.

– Ovviamente $C = c\,M$ e $c = C/M$.

– Definizione della *caloria* (cal): "quantità di calore per innalzare la temperatura di 1 g di acqua di un grado intorno a 15 ^{o}C" (ovvero da 14.5 ^{o}C a 15.5 ^{o}C). *Caloria* (kcal = 1000 cal): idem per 1 kg di acqua. Nota: il valore di riferimento per definire la caloria è dovuto al fatto che c dipende dalla temperatura (piccola dipendenza, trascurabile per molte applicazioni pratiche e per i problemi didattici).

– Notiamo dalla (145) come tale definizione implica anche aver assunto unitario il calore specifico dell'acqua intorno a 15 ^{o}C, infatti

$$1\,^o\mathrm{C} = \frac{1\,\mathrm{cal}}{c_{H_2O}(15^o\mathrm{C})\,1\,\mathrm{g}} \quad (148)$$

implica $c_{H_2O}(15^o\mathrm{C}) = 1\,\mathrm{cal}/(\mathrm{g}\,^o\mathrm{C}) = 1\,\mathrm{kcal}/(\mathrm{kg}\,^o\mathrm{C})$.
Si noti come la capacità termica è misurata in cal/^{o}C.

- Ma il calore è una forma di energia, dunque nel SI si misura in joule. Dunque la C si misura in joule/^{o}C e c in joule/(kg ^{o}C).
  Al posto del grado centigrado nel SI metteremo i kelvin, vedi sotto.
  Esiste ovviamente una equivalenza fra caloria e joule: 1 cal=4.186 J; 1 J=0.2389 cal (vedremo l' "esperienza di Joule")

(b) Termometro a gas a volume costante e scala K (kelvin).
Dispositivo standard per la definizione di una scala di temperatura. Grafico temperatura-pressione. Il K è una unità di base del SI: definito come 1/273.16 della differenza di temperatura fra lo zero assoluto e la temperatura del punto triplo (vd. sotto) dell' acqua.
Conversioni fra K e celsius e viceversa: $T_k = T_c + 273.15$.
0 assoluto= 0 K =-273.15^{o}C.

(c) Punto triplo dell' acqua:solido-liquido-vapore possono coesistere solo ad una determinata temperatura T_3 e pressione p=0.006 atm=4.58 mmHg.
T_3=273.16 K=0.01^{o}C.

Scambio termico Scambio termico fra corpi (che formano un sistema termicamente isolato) a temperature iniziali diverse che raggiungono l'equilibrio termico (es due liquidi non reagenti miscelati in un thermos). Siano M_1, c_1 e T_1 massa, calore specifico e temperatura iniziale del primo corpo; M_2, c_2 e T_2, per il secondo.

- Per il principio zero della termodinamica: i due corpi raggiungeranno una temperatura di equilibrio T_e.
- In assenza di sorgenti termiche, se un corpo si scalda, assorbendo calore. vuol dire che l'altro lo ha ceduto (in altre parole,l' energia si conserva):

$$
\begin{aligned}
Q_1 + Q_2 &= 0 && (149)\\
c_1 M_1 \Delta T_1 + c_2 M_2 \Delta T_2 &= 0 && (150)\\
c_1 M_1 (T_e - T_1) + c_2 M_2 (T_e - T_2) &= 0\,, && (151)
\end{aligned}
$$

da cui

$$
\begin{aligned}
T_e &= \frac{c_1 M_1 T_1 + c_2 M_2 T_2}{c_1 M_1 + c_2 M_2} && (152)\\
&= \frac{C_1 T_1 + C_2 T_2}{C_1 + C_2}\,. && (153)
\end{aligned}
$$

(valida se non ci sono passaggi di stato, vedi dopo). La temperatura di equilibrio è pari alla media delle temperature iniziali pesate con le capacità termiche (e ovviamente la formula si può estendere all'equilibrio simultaneo fra n corpi, sempre non reagenti chimicamente).

Cambiamenti di fase :
Fissata la pressione, avvengono ad una temperatura precisa.
Grafico di T(Q) per una massa di ghiaccio che da -20^o viene portata, fornendo

calore, fino allo stato di vapore: rette di pendenza C, fuori dal passaggio di stato, "pianettoroli" durante i passaggi di stato.
Osservazioni varie: Cosa succede se si cuoce la pasta in alta montagna ? Come funzione la "pentola a pressione" ? Nota: sappiamo che la pressione diminuisce con la quota. Da ciò si ha che: a 1000 m l' acqua bolle a circa 97^o, a 2000 m l' acqua bolle a circa 93.5^o, a 3000 m l' acqua bolle a circa 90^o.

Calore latente
di fusione e di evaporazione. Durante una transizione di fase (acqua-ghiaccio, acqua-vapore) il sistema assorbe/cede calore senza cambiare la temperatura (esempio quotidiano acqua: che bolle in attesa che ci si decida a buttare giù la pasta). Valori per l'acqua: fusione $\lambda = 80\,\mathrm{cal/g}$; ebollizione: $\lambda = 540\,\mathrm{cal/g}$.
Nota importante: il calore Q assorbito è positivo, Q ceduto è negativo. Nella equazione del bilancio energetico (somma di calore ceduto e assorbito in un sistema isolato è pari a 0) i termini del passaggio di stato, tipo λm, devono essere scritti con segno positivo se rappresentano un calore che il corpo che fa il passaggio di stato assorbe (ghiaccio che diventa acqua, acqua che diventa vapore), con segno negativo se rappresentano un calore che il corpo che fa il passaggio di stato cede (acqua che diventa ghiaccio, vapore che diventa acqua)
Esercitazione:

(a) **Domande** Sapete perchè se in aereo aprite le scatoline della panna per caffè "spruzzano " (mentre se le aprite a Terra no) ?
Se butto un ferro da stiro rovente in una massa grande di acqua cosa succede ? Ovviamente la massa di acqua non cambia temperatura, ma localmente e rapidamente, attorno al ferro,ho un aumento alto di temperatura, tanto alto che una frazione di acqua circostante evapora ... Poi, all' equilibrio, la temperatura dell' acqua torna ad essere quella di prima (e il ferro direi che va solo buttato ... ma è stato sacrificato per la scienza ...)

(b) **Calorimetria: esempio** 10 g di ghiaccio a -10 ^{o}C in 50 g acqua a 20 ^{o}C: $\rightarrow$ temperatura di equilibrio (altra informazione necessaria: calore specifico del ghiaccio, circa 1/2 di quello dell'acqua).
Spiegato e lasciato da fare il calcolo di T_e come esercizio. Il calore ceduto dai 50 g di acqua inizialmente a 20 ^{o}C serve a: innalzare la temperatura del ghiaccio da $T_g = -10\,^o$C a $0\,^o$C; far fondere il ghiaccio; innalzare la temperatura del'acqua ottenuta dalla fusione del ghiaccio da $0\,^o$C a T_e. Il bilancio energetico è:

$$0 = c_A\,M(T_e - T_A) + c_g\,M_g\,(0 - T_g) + \lambda M_g + c_A\,M_g\,(T_e - 0)\,, \tag{154}$$

Ovvero, esplicitando il termine contenente il calore complessivo ceduto dall' acqua:

$$c_A\,M(T_A - T_e) = c_g\,M_g\,(0 - T_g) + \lambda M_g + c_A\,M_g\,(T_e - 0)\,, \tag{155}$$

con c_A e c_g calori specifici di acqua e ghiaccio. Si deve ora esplicitare T_e, sono facili passaggi algebrici. Si ottiene $T_e = 2.5\,^o$C. L'acqua a temperatura ambiente ha perso 875 cal, delle quali: 50 sono servite a scaldare il ghiaccio, 800 a farlo fondere e 25 per portarlo a $2.5\,^o$C.

Il comportamento anomalo dell' acqua, fra 0 e 4^oC. Perchè gli stagni ghiacciano in superficie e non in profondità ?

Spiegato che volume e densità sono funzione della temperatura e che ciò che invece si conserva nel passaggio di stato è la massa $m_G = m_A$ ossia $V_G\rho_G = V_A\rho_A$.

Esercitazione:

(a) **Calorimetria, prima domanda di un es. di esame:**
Un proiettile di piombo di massa m_p=2 g a T_p=30 ^{o}C, alla velocità v_p=200 m/s, colpisce un blocco di ghiaccio, rimanendovi conficcato. Il blocco di ghiaccio è alla temperatura di T_G=0 ^{o}C. Si supponga il blocco di ghiaccio di capacità termica infinita. Si ricorda che il calore latente di fusione del ghiaccio vale $\lambda_{FUS} = 3.33\,10^5$ J/kg e il calore specifico del piombo vale $c_{pb} = 128$ J/(kg ^{o}C). Determinare: quanto ghiaccio fonde (m_G).
Sol.:
Sia $E_c = 1/2\, m_p\, v_p^2$= 40 J ($m_p = 2/1000$ kg). Questa energia viene trasferita al sistema finale ghiaccio-proiettile e serve a 1) fondere una parte (piccolissima) del ghiaccio; 2) portare il proiettile alla T_G. Dunque: $E_c = m_G\,\lambda_{FUS} + m_p\,c_{pb}\,(T_G - T_p)$, dove T_G=0^{o}C, temperatura della lastra di ghiaccio, è anche la temperatura finale del proiettile (la lastra di ghiaccio, di capacità termica infinita, non cambia temperatura). Si ha: $m_G = \frac{E_c + m_p\,c_{pb}\,T_p}{\lambda_{FUS}}$=0.14 g.

(b) **Calorimetria Es. di esonero del 18/05/2001. Fatelo. Non svolto a lezione perchè simile ad uno già fatto**
Un blocchetto di ghiaccio di massa m_G =100 g a 0^{o}C è mescolato a m_V =20 g di vapore a 100^{o}C. Trovare T_{equil} e dire se è acqua, ghiaccio o vapore. Dati: λ_{ev} = 539 cal/g= 22.6 10^5 J/kg; λ_{fus} = 80 cal/g= 3.33 10^5 J/kg.
Sol:
$Q_{tot} = 0$, sistema isolato. Allora scriviamo l' equazione corrispondente:
$m_G\,\lambda_{fus} + c_a\,m_G\,(T_{equil} - T^0) - m_V\,\lambda_{ev} + c_a\,m_V\,(T_{equil} - T^{100}) = 0$ dove il segno meno davanti al termine $m_V\,\lambda_{ev}$ indica che il vapore cede calore. Infatti il vapore cede calore, mentre il ghiaccio acquista calore prima per il cambiamento di fase e poi per riscaldarsi. Il vapore cedendo calore cambia stato e poi si raffredda. Dunque alla fine avremo acqua. Risolvendo l' equazione abbiamo:
$T_{equil} = \frac{m_V\,(\lambda_{ev} + c_a\,T^{100}) - \lambda_{fus} m_G}{c_a\,(m_G + m_V)}$= $(20\,(539 + 100 \cdot 1) - (80 \cdot 100))/(120 \cdot 1)$=39.8^{o}C.
Notiamo come qui usare i valori i calorie e grammi semplifica di molto il conto numerico.

(c) **Dal libro "La fisica del calore", Termologia e termodinamica", G. Tonzig**
Rispondete:
1) è possibile una temperatura di -500^{o}F ?
2) è possibile sciare a 0^{o}F ?
3) esiste una temperatura per cui l' indicazione del termometro sia la stessa in farenheit e in kelvin ? Se si, quale ?
Ed esiste fra celsius e farenheit ?

(d) Dettato:
Una caldaia ha una potenza termica di 20000 kcal/h. Calcolare quanto vale il flusso massimo di acqua (in litri/minuto) a 50 gradi che essa riesce a fornire se l' acqua entra nella caldaia ad una temperatura di 15 gradi.
La caldaia deve portare, in un minuto, una certa quantità di acqua da T_i =15 gradi a T_f = 50 gradi, utilizzando una potenza P = 20000 kcal/h= 333 kcal/min $P = c_a\,(m_a/minuto)(T_f - T_i)$, da cui $m_a/minuto = \phi_{massa}$= $\frac{P}{c_a(T_f-T_i)}$= $\frac{333\times10^3}{35}$= 9.5 kg/minuto. Per calcolare il flusso in volume dobbiamo dividere per la densità dell' acqua: $\phi_{volume} = \phi_{massa/\rho_{acqua}}$= 9.5 m^3/minuto= 9.5 l/minuto.

(e) Svolto:
Quanta energia deve sottrarre un frigorifero a 1.5 kg di acqua a 20$\,^o$C per trasformarla in ghiaccio a -12$\,^o$C ?
Dati: m_a = 1.5 kg, T_i =20$\,^o$C, T_f =-12$\,^o$C, c_a 4186 J/(kg K), λ_{fus} = 3.35×10^5 J/kg.
$Q_F = m_a c_a (0 - T_i) - \lambda_{fus}\, m_a - m_a c_G (T_f - 0)$, dove $c_G = \frac{1}{2} c_a$, calore specifico del ghiaccio. Il primo termine è il calore tolto al frigorifero per raffreddare l' acqua a zero, il secondo per farla solidificare, il terzo per portarla a -12$\,^o$.
Viene 6.6 10^5 J = 159 kcal.

13. **Seconda settimana : da Gi 12 marzo lez.63-66**

Trasmissione del calore

(a) Conduzione, convezione (cenni),irraggiamento(cenni).
(b) Sulla conduzione, vediamo un esempio: termalizzazione verso una temperatura T_f di un corpo di capacità termica 'infinita' (es. T_f ambiente costante).
Coefficiente di 'dispersione termica': la costante η che compare nella equazione seguente. Esso è dovuto a superficie di contatto A, spessore dello strato isolante Δx e *conducibilità termica* del materiale λ da

$$\eta = \lambda \frac{A}{\Delta x}\,.$$

Le dimensioni di η sono quindi cal/(grado $\cdot$ secondo), ovvero anche Watt/grado. Le dimensioni della conducibilità termica sono invece cal/(grado $\cdot$ metro $\cdot$ secondo). Dato η e lo sbalzo termico $(T_f - T)$ istantaneo fra la temperatura asintotica e quella del corpo che si sta termalizzando, il calore trasferito in dt vale

$$\mathrm{d}Q = \eta\,(T_f - T)\,\mathrm{d}t, \tag{156}$$

ovvero

$$C\mathrm{d}T = \eta\,(T_f - T)\,\mathrm{d}t, \tag{157}$$

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \frac{\eta}{c\,M}\,(T_f - T)\,. \tag{158}$$

Si riottiene la stessa struttura della equazione trovata per la resistenza di un fluido.

Risoluzione dell' equazione.
Importante: saper riconoscere e "leggere correttamente" la struttura di questa equazione
Saper disegnare e comprendere l' andamento esponenziale, con i suoi valori asintotici (all' inizio, alla fine).
Ruolo della costante di tempo.
Importanza di avere un "segno meno" nell' esponente dell' esponenziale.
Risolviamola per 'separazione di variabili', indicando con x generico la variabile incognita e con α il coefficente $\frac{\eta}{c\,M}$.
La scriviamo in modo più generale perchè ci sarà poi utile in seguito (es.: carica e scarica di un condensatore in elettrostatica).

$$\frac{\mathrm{d}x}{x - x_f} = -\alpha\,\mathrm{d}t \tag{159}$$

$$\int_{x_0=x(t=0)}^{x(t)} \frac{\mathrm{d}x}{x - x_f} = \int_{t=0}^{t} -\alpha\,\mathrm{d}t' \tag{160}$$

$$\log\frac{x(t) - x_f}{x_0 - x_f} = -\alpha\,t \tag{161}$$

$$x(t) - x_f = (x_0 - x_f)\,e^{-\alpha\,t} \tag{162}$$

$$x(t) = x_f + (x_0 - x_f)\,e^{-\alpha\,t} \tag{163}$$

$$x(t) = x_f + (x_0 - x_f)\,e^{-t/\tau}\,, \tag{164}$$

ove $\tau = 1/\alpha$, delle dimensioni di un tempo, è la *costante di tempo* del fenomeno. Quando $t = \tau$,

$$(x(\tau) - x_f) = \frac{(x_0 - x_f)}{e} \approx 0.37\,(x_0 - x_f). \tag{165}$$

La soluzione è del tipo,già incontrato, qui sotto riportato:

Applicazione all' esempio di un termometro da temperatura iniziale T_0 a temperatura ambiente $T_f = T_A$:

$$T(t) \quad = \quad T_A + (T_0 - T_A)\, e^{-t/\tau}\,. \tag{166}$$

ove $\tau = C/\eta$: maggiore è la capicità termica e minore la dispersione termica e maggiore è τ, ovvero minore è la velocità di raffreddamento/riscaldamento.

Termodinamica

(a) Introduzione ai sistemi termodinamici: sistema e ambiente; stato e funzioni di stato (per ora conosciamo solo pressione, volume e temperatura).

(b) Attenzione a: unità di misura, uso della temperatura in kelvin;

(c) Il gas perfetto (o ideale):
le molecolo sono puntiformi, le interazioni fra le molecole e fra molecole e recipiente sono urti elastici,non esistono forze di interazione a distanza, le molecole sono identiche fra loro ed indistinguibili, si muovono di moto browniano.
Il comportamento di un gas reale tende sempre di più a quello di un gas perfetto quando la sua densità tende a 0, ossia l' energia di interazione fra le molecole è bassa rispetto alla loro energia cinetica media.
Densità che tende a 0 vuol dire (lo vedremo anche matematicamente) pressione che tende a 0.
Molti gas a p=1 atm e T ambiente (300 K) si comportano come gas perfetti.
Le **variabili di stato**, funzioni dello stato del gas e non della sua storia passata, di cui ci occupiamo ora sono pressione,volume e temperatura.
Esse sono legate fra loro da una **equazione di stato**, particolarmente semplice per i gas perfetti.

(d) Dobbiamo ricordare il concetto di **mole**, poichè la quantità di gas in un certo volume si esprime di solito in numero di moli n: una mole di una (qualunque) sostanza contiene un numero di Avogadro $N_A = 6.02 \times 10^{23}$ entità elementari. Una mole di gas contiene N_A molecole.
$n = \frac{m}{PM}$, dove m è la massa del gas in grammi e PM il peso molecolare, che in grammi/mol dà la grammomolecola. Esempio: O_2,PM=32, una mole di ossigeno corrisponde ad una massa di 32 g. E se ho una massa m in grammi di ossigeno, il numero di moli sarà $n = \frac{m}{32}$.
La massa di una molecola sarà $m_{molecola} = \frac{PM\ grammi/mol}{N_A\ molecole/mol}$.
La mole è una unità base del SI.
Osservazione sperimentale importante: a p= 1 atm e T=273.15 K $\rightarrow$ una mole di gas occupa sempre un volume V=22.4 l=$22.4 \cdot 10^{-3}$ m^3.

Il gas perfetto; legge di stato

(a) Il gas perfetto (o ideale)-bassa energia di interazione fra le molecole:
legge di Boyle: se T=costante, il prodotto pV è costante.
prima e seconda legge di Gay-Lussac
$\rightarrow$ equazione di stato per i gas perfetti $pV = nRT$, dove p=pressione, V=volume, n=numero di moli, R=costante universale dei gas.
Valore di $R = \frac{pV}{nT} = \frac{1.01 \cdot 10^5 \cdot 22.4 \cdot 10^{-3}}{1 \cdot 273.15}$ =8.315 J/(mol K)=0.082 (l atm)/(mol K)=1.987 cal/(mol K).
$pV = nRT = Nk_BT$,
dove N= numero di molecole del gas ($N = n \cdot N_A$), $k_B = R/N_A = 1.38 \cdot 10^{23}$ J/K= costante di Boltzmann.
Attenzione a tutti i possibili modi esprimere il valore di R (mostrato foglio preso dalla wikipedia).

Esercizio proposto

(a) Avete idea dell' ordine di grandezza del numero di moli di aria nell' aula Amaldi, dove avete fatto l' esonero ? ..pare proprio di no..: svolgete il seguente esercizio.

(b) calcolare il numero di molecole di aria in una stanza di dimensioni circa quelle dell' aula Amaldi (stimatele..). Dato il PM =29 g/mole, ritrovate il valore della densità dell' aria.

(c) Mostrato che Pressione e densità sono proporzionali:
$p = \frac{nRT}{V} = RT\frac{m_{molecole}}{V\ PM} = \rho\frac{RT}{PM}$

(d) **Esercizio di esonero-recupero 5/06/2002**: Un pallone aerostatico consiste in un involucro che non consente scambi di calore con l' esterno, con pareti di massa trascurabile che possono deformarsi senza sforzo. Viene riempito con 1.5 m^3 di aria alla pressione atmosferica e alla temperatura di 25^{o}C. Dopo che è stato chiuso, l' aria viene riscaldata fino a che la forza ascensionale è 5 N. Assumendo l' aria un gas perfetto, con densità $\rho_{aria} = 1.3$ Kg/m^3 a 25^{o}C (nota: la densità non va supposta costante con la temperatura), determinare:
a) la pressione all' interno del pallone;
b) il volume finale del pallone;
c) la temperatura finale all' interno del pallone.
Notate che la massa si conserva sempre, in questo caso resta dunque costante con la Temperatura, mentre il volume del pallone e la densità dell' aria cambiano. Traccia sol:
a) la pressione è sempre 1 atm, altrimenti il pallone si deformerebbe;
b) $m_p = \rho_{aria}V_i$=1.95 kg, dai dati iniziali, a 25^{o}C. Risultante delle forze sul pallone: $mg - f_a = F_A$, dove $F_A = 5$ N, verso l' alto, $f_a = \rho_{aria}V_{fin}$=spinta di Archimede, verso l' alto; la densità dell' aria qui è quella esterna al pallone, V_{fin} il volume del pallone dopo che si è riscaldato.
Ricaviamo $V_{fin} = \frac{mg+F_A}{\rho_{aria}g}$= 1.89 m^3.
c) Usando infine la legge di stato dei gas perfetti, ricordando che la pressio-

ne resta sempre costante, ricaviamo: $T_{fin} = \frac{V_{fin}}{V_{in}}\ T_{in}$= 375.7 K= 102.5^{o}C. Ricordare che nell' eq. dei gas perfetti le T vanno sempre in kelvin ! Ossia $T_{in} = 298.15$ K.

(e) **Fate a casa esercizio 16.3 pag. 565 Serway:**
He in una bombola con pistone mobile, $V_i = 15 \times 10^{-3}$ m^3, $p_i = 200 \times 10^3$ Pa; T_i=300 K; Volume e pressione vengono portati a $V_f = 12 \times 10^{-3}$ m^3, $p_i = 350 \times 10^3$ Pa. Trovare la temperatura finale. Risultato: $T_f = 420$ K.

Riprendamo l' eq. di stato dei gas perfetti.
Notiamo che le dimensioni di pV sono joule, ossia quelle di un lavoro. Notiamo che le dimensioni di R sono quelle di una capacità termica per unità di mole.

Dobbiamo arrivare a formulare il primo principio della termodinamica, che è il principio di conservazione dell' energia per i sistemi termodinamici e si può enunciare dicendo che la variazione di energia di un sistema durante una trasformazione qualunque è uguale alla quantità di energia che il sistema riceve dai corpi che lo circondano. L' equivalenza fra calore e lavoro meccanico è stata scoperta da Robert Mayer nel 1842 e questo lo ha portato al primo principo della termodinamica (dal libro di Enrico Fermi "Termodinamica"). Prima di fare questo, introduciamo alcuni concetti:

(a) Stato termodinamico e trasformazioni.
Una trasformazione si ha quando il sistema cambia stato, ossia cambiano i valori delle variabili di stato.

(b) Stati di equilibrio: rimangono inalterati se non cambiano le condizioni esterne. In questa situazione p=costante in ogni punto, T=alla temperatura del recipiente, V=costante.

(c) Trasformazioni reversibili e irreversibili.
Per essere reversibile gli stati attraverso i quali il sistema passa durante la trasformazione devono differire pochissimo da stati di equilibrio. In pratica: le condizioni del sistema devono essere alterate in modo così lento che il sistema abbia il tempo di adattarsi alle nuove condizioni. Se, ad es., il gas è in un cilindro con pistone devo muovere il pistone in modo lentissimo.. Le trasf. reversibile sono una utile astrazione matematica, così come quando in meccanica usiamo il concetto di "punto materiale". Il fatto che una trasformazione sia irreversibile non vuol dire che il sistema non possa essere riportato nello stato iniziale, ma vuol dire che può esservi riportato a spese di qualcos' altro, ossia nel complesso lo "stato dell' Universo" è cambiato.

(d) Rappresentazione di stato e trasformazioni reversibili nel piano (V,p), **piano di Clapeyron**. Se posso fare il grafico vuol dire che sto parlando di trasformazioni reversibili, altrimenti lo stato non è definito e non è rappresentabile graficamente.
Trasformazioni isoterme, isocore, isobare nel piano (V,p) (faremo le adiabatiche). Grafico di trasformazioni isotermiche: sono iperboli, viene da

$pV = T = costante$: luogo dei punti dove pV=costante è una iperbole equilatera. Rivedete l' equazione dell'iperbole equilatera (basta questa) sui libri di matematica, o su google (iperbole wikipedia).

(e) **Lavoro** Durante una trasformazione il sistema può compiere un lavoro (meccanico) o del lavoro può essere fatto sul sistema. Convenzione: positivo il lavoro compiuto dal sistema. Negativo il lavoro compiuto sul sitema. È una convenzione dovuta al fatto che inizialmente ci si occupava di problemi di termodinamica nello studio del funzionamento di macchine termiche (vedi la locomotiva a vapore) e dunque l' attenzione era sul lavoro compiuto dalla macchina.
In una trasformazione reversibile, in cui dunque $p_{ext} = p_{gas}$, si dimostra che: il lavoro elementare è $\delta L = p_{gas}\ \delta V$. Dunque

$$L|_{V_1}^{V_2} = \int_{V_1}^{V_2} p\,\mathrm{d}V\,. \tag{167}$$

.
Viene da $\delta L = Fdx = pSdx = pdV$.
Espansione= lavoro fatto dal sistema, positivo Compressione=lavoro fatto sul sistema, negativo

(f) e se tolgo il pistone in modo velocissimo ? quanto vale il lavoro fatto dal sistema ?
Il lavoro è nullo, il gas si espande liberamente, le molecole non urtano contro il pistone, come invece avviene nel caso in cui lo muovo piano e mi fermo.. lo rimuovo e mi rifermo..e ho continui urti fra molecole e pistone. La trasformazione, pistone tolto velocemente, non è reversibile. Posso sempre ricomprimere il gas ma ho il risultato di aumentare la temperatura. dunque non ritorno nello stato iniziale.

Ancora sul Lavoro

(a) Il lavoro è l' area sotto la curva nel piano (p,V). Se la trasforamzione è ciclica il lavoro è l' area racchiusa dal ciclo. Il lavoro dipende dal percorso, ossia dal tipo di trasformazione.

(b) Calcolo del lavoro durante una trasformazione isoterma, in cui il gas passa dal volume V_1 a V_2: $L = nRT\ ln(\frac{V_2}{V_1})$. Positivo se $V_2 > V_1$ (espansione), negativo se $V_2 < V_1$ (compressione).

(c) Il lavoro, se p=costante è dato, in generale, da:

$$L|_{V_1}^{V_2} = \int_{V_1}^{V_2} p\,\mathrm{d}V = p\,(V_2 - V_1); \tag{168}$$

perchè p, se è costante, si può portare fuori dal segno di integrale. E il lavoro, nell' isobara, non è altro che l' area di un rettangolo di altezza p e base ΔV.

(d) Lavoro su una isocora =0;

(e) Rivedere le proprietà dei logaritmi (anche qui, se cercate in Google logaritmo wikipedia trovate più di quello che serve, concentratevi sulla voce "proprietà" e sul valore dell' integrale e derivata)

(f) Risolvete es: calcolo del lavoro su una trasformazione ciclica fatta da isobara +isocora +isobara + isocora, su un ciclo che chiamiamo ABCD
con $p_A = 2$ atm,$p_B = 2$ atm,$p_C = 1$ atm,$p_D = 1$ atm, $V_A = V_D = 1$ m^3,$V_B = V_C = 3$ m^3
Calcolare il lavoro sia dalle singole trasformazioni che dall' area del rettangolo descritto dalla trasformazione.

Ris: lavoro totale 1 J.

Sottolineata l' importanza di *leggere un grafico*. Aiuta moltissimo,spesso molto più della formula matematica.

Perchè l' argomento di una funzione trascendente in fisica,chimica è adimensionale ?

14. **Terza settimana : da Ma 17 marzo lez.67-71**

Il primo principio della termodinamica.

(a) Richiamo alla conservazione energia in meccanica. Ricordiamo che se si conserva l' energia il lavoro non dipende dal percorso e posso scrivere $-L = \Delta U = U_B - U_A$, se sono passato dallo stato A a B.

(b) Se l' ipotesi che il lavoro totale compiuto dal sistema durante una trasformazione dipenda solo dagli stati iniziale e finale è contraddetta dall' esperienza e se non si vuole rinunciare alla conservazione dell' energia $\rightarrow$ bisogna ammettere l' esistenza di altri modi, oltre al lavoro meccanico, per mezzo dei quali possa avvenire scambio di energia fra il sistema e l' ambiente.

(c) Esempio: posso scaldare acqua portandola da T_1 a T_2 o facendo del lavoro meccanico, agitando delle palette nell' acqua (e così io compio lavoro, ma anche l' acqua), sto sfruttando l' attrito, oppure mettendo il contenitore con l' acqua su una sorgente di calore. Il lavoro per andare dal primo al secondo stato è diverso nei due casi, in particolare nel secondo caso è nullo. Dobbiamo dunque ammettere che l' energia ceduta all' acqua sotto forma di lavoro meccanico sia equivalente a quella data in forma non meccanica nel secondo caso. Questa energia non meccanica la chiamiamo calore.
E segue che **calore e lavoro meccanico sono equivalenti**, sono entrambi energia.

(d) Posso andare avanti e pensare di mettere un gas in un recipiente a pareti isolanti e farlo espandere con un pistone mobile. Ora lo scambio di energia sistema-ambiente può essere solo di tipo meccanico e dalla conservazione

dell' energia avrò: $\Delta U = -L$ ossia $\Delta U + L = 0$.
Se ora uso un repiente non isolato termicamente, avrò che $\Delta U + L$ sarà diverso da zero, perchè ora il sistema può scambiare energia anche sotto forma di calore. Dunque $\rightarrow \Delta U + L = Q$, dove q è l' energia che il sistema ha ricevuto non sotto forma di lavoro meccanico. Posso anche scrivere (primo principio della termodinamica): $\Delta U = -L + Q$, dove il segno meno appare per la convenzione detta prima. Significato: la variazione di **energia interna** è pari all' energia che il sistema ha ricevuto dall' esterno, sotto forma di energia termica e/o di energia meccanica.

(e) L' energia interna è una funzione di stato. In una trasformazione ciclica la sua variazione è dunque nulla.

(f) Per fare una trasformazione isoterma devo mettere una sorgente di calore sotto il recipiente che contiene il gas. Il recipiente non deve essere isolante termicamente sul fondo, ma deve esserlo su tutti gli altri lati.

Esperienza di Joule: equivalente meccanico della caloria. 1 cal=4.186 J.

L' energia interna è funzione solo di T: esperienza di espansione spontanea (irreversibile) di un gas in un recipiente termicamente isolato, da un primo contenitore V_1 a $V_1 + V_2$: lavoro nullo (il gas espande liberamente, non deve spingere nessun pistone), calore scambiato nullo, V cambia, p cambia, T resta costante proprio perchè l' espansione è spontanea, $\Delta(U) = Q - L = 0$, $\rightarrow U$ è funzione solo della temperatura T In una trasformazione isoterma dunque non varia.

Energia interna in funzione del calore specifico molare

(a) Definiamo il calore specifico molare come $\frac{C}{n}$, capacità termica per unità di mole.

(b) Notiamo ancora che le dimensioni della costante dei gas R sono proprio quelle di un calore specifico molare.

(c) Energia interna in una trasformazione a volume costante (isocora), in cui con una sorgente di calore vario la temperatura da T a T+ΔT. Si trova che
$\Delta U = nc_v \Delta T$, dove c_v è il calore specifico molare e $_v$ ricorda che la trasformazione era a volume costante.
Grafichiamo nel piano (V,p) la trasformazione isocora.

(d) Energia interna in una trasformazione a pressione costante (isobara),in cui vario la temperatura esattamente come prima. Grafichiamo nel piano (V,p) la trasformazione isobara. Vediamo dove stiamo rispetto a prima (sulla stessa isoterma, ovviamente..).
Si trova che
$\Delta U = nc_p \Delta T + nR\Delta T$, dove c_p è il calore specifico molare e $_p$ ricorda che la trasformazione era a pressione costante. La differenza è dovuta al fatto che ora è stato compiuto del lavoro meccanico.

(e) Ma l' energia interna non varia su una isoterma e le 2 trasformazioni portano il sistema sulla stessa isoterma. Dunque posso uguagliare le 2 espressioni del ΔU e trovo la relazione fra c_v e c_p: $c_p = c_v + R$.
Importante notare che dunque il calore specifico dipende da come avviene la trasformazione.

(f) È strano che i 2 calori specifici siano diversi ? E che c_p sia maggiore di c_v ? No, se pensiamo a cosa è un calore specifico. Nel caso dell' espansione a presiione costante una parte del calore fornito dalla sorgente va in lavoro meccanico (il pistone ora è libero di spostarsi, e così facendo mantiene costante la pressione). Dunque, per avere la stessa variazione di temperatura, nei due casi devo fornire una diversa quantità di calore, maggiore nel caso in cui parte di essa serve a fare lavoro meccanico.

(g) Valori di c_v e c_p per gas monoatomici,biatomici e poliatomici.

Trasformazioni adiabatiche reversibili. Scriviamo e risolviamo insieme l' equazione differenziale, a partire dal primo principio della termodinamica. Basterà saperla impostare e saperne il risultato. Relazione fra T e V. Introdotto $\gamma = c_p/c_v$
Relazione fra p e V. Grafico delle adiabatiche sul piano (V,p) con discussione di cosa succede al variare dello stato del sistema (chi aumenta, chi diminuisce, chi resta costante..).

Esercitazione

(a) **Calorimetria**: Pentola di rame di massa $m_{Cu} = 500$ g, a T_{cu}=20^{o}C. Un litro di piombo fuso alla temp. di fusione T^{pb}_{fus}=327.3^{o}C, viene versato nella pentola. il sistema (isolato) piombo-rame raggiunge l' equilibrio termodinamico a T_{fin}=327.3^{o}C. Calcolare: 1) la quantità di calore scambiata dalla pentola di rame e dire se è calore assorbito o ceduto dal rame. 2) la massa di piombo solido e liquido nello stato finale. Dati: $\rho_{pb} = 11.3\ 10^3$ kg/m^3, $c_{pb} = 128$ J/(kg K), $c_{cu} = 387$ J/(kg K), $\lambda^{fus}_{pb} = 2.45\ 10^4$ J/(kg), T^{cu}_{fus}=1083^{o}C
Soluzione:
1) $Q_{cu} = m_r\, c_{cu}(T_{fin} - T_{cu})$=$0.5 \cdot 387 \cdot 307.3 = 59.4$ kJ. Positivo=calore assorbito dal rame, che infatti si riscalda (è molto lontano dalla sua temperatura di fusione, dunque tutto il calore assorbito lo riscalda.)
2)$Q_{cu} - m^{sol}_{pb}\ \lambda^{fus}_{pb} + m_{pb}\, c_{pb}(T_{fin} - T^{pb}_{fus}) = 0$,
$Q_{cu} = m^{sol}_{pb}\ \lambda^{fus}_{pb} + m_{pb}\, c_{pb}(T^{pb}_{fus} - T_{fin})$ Dove: Q_{cu} il calore assorbito dal rame viene preso dal piombo che, cedendo calore, fa, in parte, la transizione di stato da liquido a solido. La sua temperatura non cambia, dunque il secondo termine nella somma a destra è nullo. Attenzione: se non fosse stato nullo, ossia se la temperatura del piombo fosse diminuita avremmo avuto che tutto il piombo era diventato solido, non solo una sua frazione. Infatti il calore (in questo caso ceduto dal piombo) viene prima utilizzato per far fare il passaggio di stato a tutta la massa a disposizione e solo dopo che

tutta la massa ha cambiato stato viene utilizzato per variarne il valore di temperatura. Ma qui la temperatura del piombo resta costante e dunque è possibile che solo una parte del piombo abbia fatto il cambiamento di stato. m_{pb}^{sol} è la parte di massa del piombo che diventa solida, $m_{pb} = \rho_{pb} V$=11.3 kg è la massa totale del piombo. Dunque: $m_{pb}^{sol} = Q_{cu}/\lambda_{pb}^{fus}$=2.42 kg, solida e la parte che resta liquida è 11.3 - 2.42=8.88 kg.

(b) Esempio di un problema in cui solo una frazione molto piccola di acqua evapora, dopo che un corpo a T molto alta è stato gettato nell' acqua. Pensate a cosa avviene se getto un ferro da stiro caldo nel mare: localmente e in un tempo brevissimo l' acqua attorno al ferro aumenta di molto la sua T e può evaporare. Poi, ristabilito l' equilibrio termico, il sistema mare+ferro si trova alla stessa temperatura. Questo è un caso "estremo" per spiegare il problema seguente:
Massa di rame $m_r = 100$ g a T alta incognita, viene messo in un calorimetro di rame di massa $m_{cal} = 150$ g contenente acqua $m_a = 200$ g. Il calorimetro e l' acqua all' inizio erano a $T_i = 16\,^o$C. All' equilibrio il sistema acqua+rame+calorimetro raggiunge la temperatura $T_f = 38\,^o$C, ma si nota che una massa di acqua $m_v = 1.2$ g è evaporata (ossia non cè più). Bisogna trovare la T iniziale del rame. Noti il $c_r = 387$ J/(kg K) e il λ_{ev}^a=2.26 10^6 J/kg (e il calore specifico dell' acqua c_a).
Spiegazione:
Notiamo che, di tutto quello che avviene mentre si raggiunge l' equilibrio termico, l' unica cosa che va esplicitata è solo ciò che riguarda la massa m_v che si perde, perchè evapora. Se altra acqua salisse di temperatura oltre la temp. finale, ma senza evaporare, all' equilibrio il calore che si era preso me lo avrebbe restituito e dunque: per tutto ciò la cui massa si conserva devo solo occuparmi degli stati iniziali e finali. Equazioni:
$c_r\, m_r(T_f - T) + c_r\, m_{cal}(T_f - T_i)+$
$c_a\, m_v(100 - T_i) + \lambda_{ev}^a\, m_v+$
$c_a\,(m_a - m_v)(T_f - T_i) = 0.$
Risolvendo ricavo T.

(c) **Termodinamica** Svolto es. (pag. 72 dispense Luci). Trasformazione isobara. Calcolare pressione (data massa M e sezione S del pistone) e lavoro. $p = p_A + Mg/S$, dove p_A è la pressione atmosferica. Dati numero di moli, temp. iniziale e finale.

(d) Svolti es. dettati sulle scale termometriche
Soluzioni: -500^o F corrisponde a -22.4 K dunque non esiste:

0^o F sono -16.5^o C . . . freddino . . .
si, 574 faranheit=574 kelvin
si, -40 celsius=-40 farenheit.

(e) Dettati:

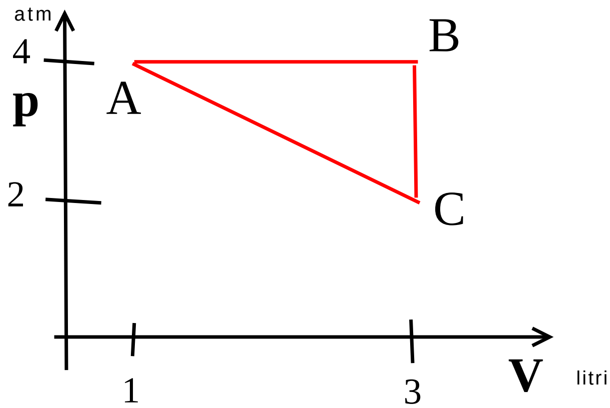


Figura 2: Figura esercizio esonero CTF, 10/06/03

Es. di esonero maggio 2001: durante una seduta di ginnastica una persona perde 180 kcal per evaporazione del sudore. Quanta acqua deve bere per recuperare il liquido perduto ? (Sol: 0.33 litri)
Un palloncino viene riscaldato da 17^{o}C a 57^{o}C. Di che frazione aumenta il volume ? (Sol:13.8 %).

(f) Dettato es. di esonero 2007:
Un fabbro lascia cadere un ferro di cavallo di massa 500 g dentro un secchi con 25 l di acqua. La temperatura iniziale del ferro di cavallo è 450^o C, quella dell' acqua è 23^o C. Trascurando la cap. termica del secchio e supponendo che gli scambi di calore avvengano solo fra il ferro e l' acqua, det. la temp. di equilibrio del sistema. Il calore specifico del ferro è 448 J/(kg K).
(Sol: 24^o C)

(g)

(h) Esercizio compito CTF, 10/06/03 + altre domande.
Metto qui traccia della soluzione e commenti 0.2 moli di un gas perfetto monoatomico seguono un ciclo triangolare AB (isobara) – BC (isocora)– CA (vedi figura) $p_A = p_B = 4$ atm; $P_C = 2$ atm, $V_A = 1$ l; $V_B = 3$ l;$V_C = 3$ l;

Determinare: a) il lavoro compiuto in un ciclo ABCA; b) la temperatura T_B; c) la quantità di calore assorbita nel tratto AB (isobara). Fin qui es. compito. Aggiungiamo: determinare ΔU_{CA} e domande varie. Traccia sol: Notiamo che: per calcolare il lavoro dobbiamo calcolare l' area del triangolo di base e altezza $\Delta p, \Delta V$. Viene:$L = (V_C - V_A)(p_C - p_A/2) = 2$ l atm.
Il calore assorbito lungo la trasformazione isobara AB è $Q = nc_p\Delta T$, dove $c_p = 5/2\ R$, R va espresso il calorie/(mol K), se Q vogliamo darlo in calorie, e dove $\Delta T = T_B - T_A$.

T_B e T_A si calcolano dall' eq. dei gas perfetti. Viene: $T_B = 731.7$ K, $T_A = 243.9$ K (o semplicemente: $T_A = \frac{T_B}{3}$). Aggiunte al testo originale:
2) la variazione di en. interna fra C ed A. Fatela.
3) il lavoro svolto fra C ed A.
Abbiamo notato che il modo semplice di calcolare il lavoro totale è fare l' area del ciclo $L = 1/2\ \Delta p\ \Delta V$= 2 l atm $\approx$ 200 J.
Per calcolare il lavoro fra C ed A possiamo seguire 3 vie:
a) L_{ABC} = area triangolo= 2 l atm=$L_{AB} + L_{BC} + L_{CA}$, dunque $L_{CA} = L_{ABC} - L_{AB} - L_{BC}$=$2 - p_A(V_B - V_A) - 0$=$2 - 4 \cdot 2$ = -6 l atm.
b) Scrivere l' equazione della retta CA e calcolare il lavoro direttamente sulla trasformazione CA (il lavoro non è una variabile di stato ! Dipende dal percorso, che fra C ed A è una retta). L' eq. di una retta, passante per 2 punti noti, non è difficile da trovare ...: scriviamo ad es.: $p - p_C = m(V - V_C)$, dove m=$\frac{p_C - p_A}{V_C - V_A} = -1$ atm/l e, sostituendo $p_C = 2$ atm e $V_C = 3$ l, si ha $p = 5 - V$.

$$L\,\Big|_{V_C}^{V_A} = \int_{V_C}^{V_A} p \,\mathrm{d}V\ = \int_{V_C}^{V_A} (5 - V)\,\mathrm{d}V\ = \tag{169}$$

$= 5\,(V_A - V_C) - 1/2\,(V_A^2 - V_C^2) = 5\,(1 - 3) - 1/2\,(1 - 9) = -6$ l atm
esattamente come sopra. Nota: è chiaro che va sempre seguita la via più semplice, dunque non complicatevi la vita inutilmente, ma è bene avere chiaro che spesso ci sono più vie che si possono seguire e, laddove possibile, verificare un risultato con più metodi può essere di grande aiuto.
c) Area del trapezio che si costruisce dal lato CA fino all' asse delle ascisse. Aiutatevi con il disegno.

Il secondo principio della termodinamica (alcune considerazioni dal libro di Fermi):
Il primo principio trasse la sua origine dall' impossibilità di costruire una macchina capace di creare energia. Non pone limitazioni sulla possibilità di trasformare calore in lavoro e viceversa, purchè la quantità totale di calore sia equivalente alla quantità totale di lavoro. Invece la trasformazione completa di lavoro in calore è possibile (vedi l' attrito), mentre il viceversa non è possibile: ci sono limitazioni ben precise alla trasformazione di calore in lavoro. Se non fosse così potrei trasformare in lavoro il calore ottenuto raffreddando i corpi circostanti (possibilità praticamente infinita.. potrei raffreddare il mare, il sottosuolo.., che corrisponderebbe a realizzare il "moto perpetuo di seconda specie").

(a) Enunciato di Lord Kelvin
(b) Esempio di una trasformazione isoterma in cui il gas si espande. Il calore fornito dalla sorgente viene tutto convertito in lavoro meccanico. Infatti la variazione di energia interna è nulla (siamo su una isoterma) e dunque L=Q. Questo contraddice il secondo principio, come enunciato da Lord

Kelvin ?
Prestate attenzione alle parole *il cui unico risultato*. Qui c' è un altro risultato nella trasformazione: il gas si espande ! Dunque il principio non è contraddetto. Nota: sarebbe bastato trovare un solo esempio in cui l' enunciato era falso per cancellarlo. Basta un solo esempio in cui una teoria non sia vero per ucciderla del tutto, mentre per provare che una teoria è vera ci vuole decisamente molto di più che non un esempio in cui funziona...

(c) Enunciato di Clausius

(d) I due enunciati sono equivalenti: ad es. se fosse falso Kelvin potrei effettuare una trasformazione il cui unico risultato sia trasformare in lavoro il calore Q_F preso da una sorgente a T_F. Posso poi, per attrito, ritrasformare in calore il lavoro così ottenuto e usarlo per riscaldare una sorgente che sia a temperatura T_C, maggiore di T_F. Ho dunque violato anche l' enunciato di Clausius, facendo passare calore da un corpo più freddo ad uno più caldo.

15. **Quarta settimana : da Ma 23 marzo lez.72-76**

Ancora sul secondo principio della termodinamica: visto che non si può ottenere lavoro con una sola sorgente, senza produrre altri cambiamenti sul sistema, allora ne occorrono almeno due, che siano a T diverse.

(a) Il ciclo di Carnot. Rendimento η=(energia utile)/(energia data)

(b) Suo impiego come macchina termica. $L > 0, Q_C > 0, Q_F < 0$.
$L = Q_C - Q_F$. (Q_C, Q_F indicano il calore preso o ceduto alle due sorgenti Calda e Fredda)
Rendimento $\eta = \frac{L}{Q_C}$

(c) Il ciclo di Carnot percorso al rovescio: suo impiego come frigorifero o pompa di calore. $L < 0, Q_C < 0, Q_F > 0$. Il lavoro lo diamo noi alla macchina..attaccando la spina e pagando la bolletta dell' ENEL.
Rendimento nei 2 casi.
Frigorifero: rendimento $COP = \frac{Q_F}{L}$
Pompa di calore: rendimento $COP = \frac{Q_C}{L} = 1/\eta > 1$
La pompa di calore è il condizionatore che usiamo in estate per raffreddare la casa e in inverno per riscaldarla. Rendimento maggiore di 1 vuol implica che sono più efficienti delle normali stufette elettriche. Il lavoro fornito serve ad un motore che comprime ed espande un liquido all' interno della macchina.

(d) Il rendimento di una macchina reversibile è sempre maggiore di quello di una macchina termica irreversibile che lavori fra le 2 stesse temperature.
tutte le macchine termiche reversibili che lavorano fra le stesse T hanno lo stesso rendimento.

(e) Il rendimento $\eta = \frac{L}{Q_C} = \frac{Q_C - Q_F}{Q_C} = 1 - \frac{Q_F}{Q_C}$, può essere scritto -solo se la macchina è reversibile !- anche come $1 - \frac{T_F}{T_C}$, ossia che $\frac{T_F}{T_C} = \frac{Q_F}{Q_C}$.

Si dimostra calcolando i lavori sulle 2 isoterme (se A e B sono i 2 punti sull' isoterma a T_C e C,D sull' isoterma a T_F allora $L_{AB} = Q_2$ e $L_{CD} = Q_1$ e $L_{AB} = nRT_C\ ln(\frac{V_B}{V_A})$ positivo, $L_{CD} = nRT_F\ ln(\frac{V_D}{V_C})$ negativo) e scrivendo le equazioni delle 2 isoterme e delle due adiabatiche.

(f) Ricordare che il rapporto fra i volumi sulle 2 isoterme e adiabatiche costruite come sopra è sempre tale che $\frac{V_A}{V_B} = \frac{V_D}{V_C}$.

Esercitazione di termodinamica e macchine termiche Trovate anche esercizi non fatti a lezione. Li lascio comunque, possono tornarvi utili per esercitarvi.

(a) Svolti esercizi sulle macchine termiche (15.3,15.8,15.10 del libro Luci)

(b) Relazioni fra COP pompa di calore e frigorifera ed η della stessa machina termica che lavori in modo inverso.

(c) Es. pag. 26 dispense Luci.
Una macchina di Carnot (ossia reversibile) lavora fra una sorgente a $T_C = 700^o$C e una a $T_F = 0^o$C, realizzata con ghiaccio fondente. Si osserva che il ghiaccio fonde al ritmo di 5 g/s. Calcolare la potenza generata dalla macchina.
Sol:
$T_C = 973.15$ K, $T_F = 273.15$ K. $\lambda_{fus} = 80$ cal/g. $\frac{m_G}{s} = 5$ g/s.
La potenza è $P = \frac{L}{s}$, watt. Dove: $L = Q_C - |Q_F|$. E dunque: $\frac{L}{s} = \frac{Q_c}{s} - \frac{|Q_F|}{s}$.
La quant. di calore sottratta alla sorgente fredda ogni secondo è: $\frac{Q_F}{s} = \lambda_{fus} \times \frac{m_G}{s} = 400$ cal/s. Inoltre: $\frac{T_C}{T_F} = \frac{Q_C}{Q_F}$, da cui si ricava: $\frac{Q_C}{s} = \frac{Q_F\, T_C}{s\, T_F} = 1425$ cal/s (fate i conti e verificate...). Usando la $\frac{L}{s} = \frac{Q_c}{s} - \frac{|Q_F|}{s} = 1025$ cal/s=4.3 kW.
Si può anche ricavare il rendimento η=0.72, dalle due temperature (macchina reversibile) e poi utilizzare la relazione: $\frac{L}{s} = \eta\, \frac{Q_C}{s}$.

(d) Es. pag. 27 dispense Luci.
Frigorifero a 5^o C, di capacità termica $C = 84$ kJ/K, cede calore ad una stanza che si trova a 25^o C. Trovare il minimo valore di potenza che deve avere il motore del frigorifero per ridurre la temperatura del frigorifero di un grado in un minuto.
Indichiamo: $\Delta T = 1^o$ C (o kelvin, è lo stesso). Notiamo inanzitutto che il valore minimo di potenza corrisponde alla situazione in cui la macchina abbia il massimo rendimento possibile, ossia alla macchina reversibile. Possiamo dunque calcolare il COP. $COP = \frac{T_F}{T_C - T_F}$ =13.9 ($T_F = 278.15$ K e $T_c - T_F = 20$ K). Inoltre: $\frac{Q_F}{minuto} = C\,\Delta T = 84$ kJ/minuto. E $\frac{Q_F}{s} = 1.4$ kW.
Ricordiamo che: $P = \frac{L}{s} = \frac{Q_F}{s\, COP} = \frac{1400}{13.9} \simeq 100$ W.

(e) Rendimento di più macchine termiche che lavorano in cascata. Non è la somma dei singoli rendimenti !! Va sempre applicata la definizione (energia utile)/(energia immessa).

Entropia. È una funzione di stato. Per *calcolarla* si può -anzi si deve- usare una trasformazione reversibile che connetta gli stati di equilibrio considerati. Vedremo come esempio l' espansione libera di un gas in un recipiente isolato, verso un altro recipiente sempre isolato.

(a) Riprendiamo la relazione trovata fra Q_1, Q_2, T_1, T_2 in un ciclo reversibile. Notiamo che vale anche per n sorgenti e che possiamo scrivere: $\sum_i \frac{Q_i}{T_i} = 0$ per una trasformazione ciclica reversibile.
Non dimostriamo, ma ci crediamo ..che vale,in generale, $\sum_i \frac{Q_i}{T_i} \leq 0$, con l'uguale se la trasf. è reversibile. Passiamo al continuo, scriviamo l'integrale sul ciclo e ricordiamo che, come già visto in meccanica, se l' integrale sul ciclo è nullo la funzione dipende solo dagli stati iniziali e finali. Ossia l' entropia, definita come $dS = \frac{\delta Q}{T}$ e $\Delta S_{A,B} = \int_{rev\ A}^{B} \frac{\delta Q}{T}$, è una funzione di stato.

(b) Definizione 1: energia scambiata sotto forma di calore, divisa per la temperatura alla quale avviene lo scambio.
Definizione 2: (utile in meccanica statistica), numero di disposizioni microscopiche con le quali si può realizzare uno stesso stato macroscopico.

(c) Inoltre c' è un legame molto stretto fra variazione di energia interna e variazione di entropia in un sistema. Infatti l' entropia è (Definizione 3) una misura della quantità di energia di un sistema che non può essere usata per compiere un lavoro.

(d) $\Delta S_{A,B} = \int_A^B \frac{\delta Q}{T}$, attenzione: integrale calcolato sempre su una trasformazione reversibile.

(e) Vale la disuguaglianza di Clausius: $\Delta S_{A,B} = S(B) - S(A) >= \int_A^B \frac{\delta Q}{T}$, l' $=$ vale se l' integrale è calcolato lungo una trasformazione reversibile.

(f) Altro modo di formulare il secondo principio della termodinamica: l' entropia totale di un sistema isolato aumenta con il tempo, fino ad un valore massimo.
Infatti, se il sistema è isolato si ha che δQ=0 e viene, dalla dis. di Clausius, che S(B) > S(A).
Ossia per una qualunque trasformazione che avviene su un sistema isolato, l' entropia dello stato finale non può essere mai inferiore a quella dello stato iniziale. Due conseguenze di questo sono: a) il calore non può fluire spontaneamente da un corpo a temperatura più bassa verso uno a temperatura più alta; b) è impossibile per una macchina ciclica ricevere calore da una sola sorgente e trasformarlo in lavoro, senza che ci siano altre conseguenze nella trasformazione. Ossia seguono i 2 enunciati di Clausius e Kelvin. Infatti:

(g) Clausius) se ho 2 sorgenti A_1 a T_1 e A_2 a T_2, con $T_2 > T_1$ allora il calore Q_2 fluisce da A_2 verso A_1 e la variazione di entropia dell' universo (il sistema costituito da A_1 e A_2) è: $\frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2}$, dove il primo termine è $\Delta S(A_1)$ e il secondo $\Delta S(A_2)$. Il segno - appare perchè A_2 cede calore. Poichè $T_2 > T_1$

la variazione di entropia è positiva. Qui abbiamo supposto che le due temperature restino costanti.

(h) Lord Kelvin) una parte del calore assorbito dal sistema va in aumento di entropia e dunque non può essere usato per compiere lavoro. Ovviamente quella stessa quantità di calore va a modificare l' energia interna.

(i) Ricordate che l' entropia non è una energia.

(j) La produzione di calore per attrito è un processo irreversibile che porta ad aumento di entropia. Infatti il calore viene dal lavoro e questo aumento di entropia non è compensato da diminuzione di entropia da un' altra parte del sistema.

(k) L' entropia è definita a meno di una costante additiva. Per fissare lo zero può aiutarci il **terzo principio della termodinamica (Nerst)**: l' entropia di un sistema allo zero assoluto può essere sempre posta a zero.

Esercitazione entropia

(a) Esempio dell' espansione libera nel vuoto, di un gas prima in un recipiente e poi lasciato libero di espandere in un secondo recipiente. Il sistema è isolato, ossia $\delta Q = 0$, ma non è vero che la variazione di entropia è nulla ! Bisogna calcolarla lungo una trasf. reversibile che lasci inalterati i 2 stati iniziali e finali e dunque tutte le funzioni di stato (ossia $p_i, V_i, T_i, p_f, V_f, T_f, \delta U$).
Poichè la temperatura non cambia si prende una isoterma e si calcola δQ che avrei avuto sull' isoterma. Si trova facilmente che è $\delta Q = L$, perchè la variazione di energia interna è nulla. Dunque si calcola il lavoro sull' isoterma e lo si divide per T. Questo dà la variazione di entropia che, come detto, non è nulla ed è, come aspettato, maggiore di zero.

(b) Prendiamo l' esercizio compito CTF, 10/06/03, già discusso. Possiamo calcolare anche la variazione di entropia, ad esempio, fra C ed A.
1) ΔS_{CA} la possiamo calcolare come somma di $\Delta S_{CB}\,\Delta S_{BA}$. Ci si arriva con 2 ragionamenti equivalenti: a)la var. di entropia sul ciclo è nulla e dunque ΔS_{CA}=- $\Delta S_{AB} \Delta S_{BC}$; b)l' entropia è una variabile di stato, posso calcolarne la var. su una qualunque trasf. reversibile che connetta gli stati C ed A. Dunque: ΔS_{CA}=ΔS isocora$_{CB}$+ isobara$_{BA}$=$n\, c_v\, ln\frac{T_B}{T_C}+ n\, c_p\, ln\frac{T_A}{T_B}$. Notate i segni, che dipendono dal verso con cui sto percorrendo le trasformazioni. Le temperature si calcolano tutte utilizzando l' eq. dei gas perfetti. c_p e c_v sono noti perchè sappiamo che si tratta di un gas monoatomico.

(c) Calcolo della variazione di entropia per 2 corpi messi a contatto termico, nella situazione (raffinamento del conto della volta scorsa) in cui la temperatura di equilibrio, sarà T_e, data dalla media delle due temperature pesata con le capacità termiche. Dunque la variazione di entropia si calcola facendo l' integrale da T_1 a T_e (corpo 1) e da T_1 a T_e (corpo 2). Si trova sempre che $\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2$ aumenta.

(d) Es. num. 52 pag. 659 Serway + aggiunte
Un campione costituito da n=100 moli di un gas perfetto monoatomico è sottoposto ad una trasformazione isobara reversibile da V_i a $3V_i$.
a) Calcolare la variazione di entropia. Sol:
sia A lo stato iniziale e B lo stato finale. $\Delta S_{A,B} = S(B) - S(A) = \int_A^B \frac{\delta Q}{T}$, con $\delta Q = nc_p \delta T$, dunque $\Delta S_{A,B} = nc_p \ln \frac{T_B}{T_A}$.
Scrivendo l' eq. di stato per B ed A, si ricava che, sull' isobara, $\frac{V_B}{V_A} = \frac{T_B}{T_A}$.
Dunque ora: $\Delta S_{A,B} = 10^2 \times \frac{5}{2} \times 8.31 \times \ln 3$ J/K.
b) Sapendo che ΔU_{AB}=100 J e Q_{AB}=500 J, calcolare il lavoro L_{AB} e la differenza di temperatura $T_B - T_A$.
Il lavoro si calcola dal primo principio: $L_{AB} = -\Delta U_{AB} + Q_{AB}$=400 J. La differenza di temperatura $T_B - T_A = \frac{Q_{AB}}{nc_p}$, dove deve venire T_B maggiore di T_A

(e) Esercizio di termodinamica di esonero maggio 2006:
Una mole di gas perfetto monoatomico viene portata dallo stato iniziale p_0 = 1 atm e V_0= 10 l, allo stato finale $p_1 = 2\ p_0$ e V_1= 2 V_0, con le seguenti due trasformazioni: prima si fa una espansione isoterma fino a 2 V_0 e poi si fa aumentare la pressione fino a 2 p_0, mantenendo il volume costante. Si ricorda che R =8.315 J/(mol K)=0.082 (l atm)/(mol K)=1.987 cal/(mol K). Calcolare: a) la variazione di energia interna;
b) la variazione di entropia lungo l isocora.
Sol:4.56 kJ, 17.3 J/K
Sol: Chiamiamo A lo stato iniziale ($p_A = p_0$, $V_A = V_0$, T_A), B lo stato raggiunto dopo l' isoterma (p_B , $V_B = 2V_A$, $T_B = T_A$) e C lo stato finale, dopo l' isocora ($p_C = 2p_A$, $V_B = V_C$, T_C).
a) Variazione di energia interna: la variazione di energia interna lungo l' isoterma (A-B) è nulla. Lungo l' isocora: $\Delta U = Q_{BC} - L_{BC} = Q_{BC}$. $Q_{BC} = nc_v(T_C - T_B)$, con $T_B = T_A = (p_0 V_0)/(nR) = 1 \cdot 10/(0.082) = 121.95^o$C.
$T_C = (p_C V_C)/(nR)$= $(2p_0\, 2V_0)/(nR)$= 4 T_B
Da cui $\Delta U = Q_{BC} = \frac{3}{2} R\, 3\, T_A$=4.56 kJ
b) Variazione di entropia lungo l' isocora:
ΔS_{BC}= $nc_v \int_{T_B}^{T_C} \frac{dT}{T}$ =$nc_v \ln 4$= 17.3 J/K
(c_v = 3/2 R, per gas perfetto monoatomico).

(f) Calcolo della variazione di entropia e di energia interna sul tratto CA, es. in Fig.2.

(g) Es. pag. 112 dispense Luci. Macchina termica scambia calorr con due sorgenti a T_C=500 K e T_F=300 K. In un certo tempo la macchina produce un lavoro di 100 J, con rendimento $\eta = 0.2$. Calcolare la variazione di entropia dell' Universo.

Sol: 1.33 J/K (var. di entropia della macchina è zero, perchè ciclica.) Calcolate anche il rendimento della corrispondente macchina termica reversibile (sol. 0.4)

(h) Secondo esercizio di esame 6/02/2008. Una macchina di Carnot funziona tra una sorgente calda a temperatura T_1 ed una sorgente fredda a temperatura $T_2 = 503$ K. La macchina assorbe il calore $Q_1 = 5550$ J e compie il lavoro $L_1 = 1750$ J. Il calore ceduto alla sorgente a temperatura T2 viene interamente utilizzato da una seconda macchina di Carnot che utilizza una miscela di acqua e ghiaccio fondente come sorgente fredda. Determinare: a) la temperatura T_1; b) il lavoro compiuto dalla seconda macchina di Carnot; c) il rendimento complessivo delle due macchine.
Sol: 734,6 K,1736.6 J,0.63.

(i) Esercizio di esonero 21/05/2007, di recupero Una automobile di massa pari a 1500 kg, che procede ad una velocit'a di 80 km/h, urta una automobile ferma di massa 1000 kg. Dopo l' urto le due automobili rimangono attaccate insieme. La temperatura delle due automobili è di 25^{o}C e la loro capacità termica è tale da non provocare una sensibile variazione di temperatura in seguito all' urto (capacità termica infinita). Trascurando ogni forma di attrito e supponendo che non vi siano scambi di calore tra le due automobili e l' esterno, determinare: a) la velocità del centro di massa dopo l' urto; b) la variazione di en. meccanica del sistema; c)la variazione di entropia dell' Universo.
Sol: 13.3 m/s; -1.48$\cdot 10^5$ J; 496 J/K

(j) **La parte di calorimetria è già stata svolta**
Un proiettile di piombo di massa m_p=2 g a T_p=30 ^{o}C, alla velocità v_p=200 m/s, colpisce un blocco di ghiaccio, rimanendovi conficcato. Il blocco di ghiaccio è alla temperatura di T_G=0 ^{o}C. Si supponga il blocco di ghiaccio di capacità termica infinita. Si ricorda che il calore latente di fusione del ghiaccio vale $\lambda_{FUS} = 3.33\,10^5$ J/kg e il calore specifico del piombo vale $c_{pb} = 128$ J/(kg ^{o}C). Determinare: a) quanto ghiaccio fonde (m_G)
b) la variazione di entropia del sistema ghiaccio-proiettile.
Sol.:
Ricordiamo la parte già svolta:
a) Sia $E_c = 1/2\, m_p\, v_p^2$= 40 J ($m_p = 2/1000$ kg). Questa energia viene trasferita al sistema finale ghiaccio-proiettile e serve a 1) fondere una parte (piccolissima) del ghiaccio; 2) portare il proiettile alla T_G. Dunque: $E_c = m_G\, \lambda_{FUS} + m_p\, c_{pb}\, (T_G - T_p)$, dove T_G=0^{o}C, temperatura della lastra di ghiaccio, è anche la temperatura finale del proiettile (la lastra di ghiaccio, di capacità termica infinita, non cambia temperatura). Si ha: $m_G = \frac{E_c + m_p\, c_{pb}\, T_p}{\lambda_{FUS}}$=0.14 g.
(parte da fare:)
b) variazione di entropia del sistema ghiaccio-proiettile (δS).

δS_p=$m_p\, c_{pb} \int_{T_p}^{T_G} \frac{dT}{T} = m_p\, c_{pb} \ln \frac{T_G}{T_p}$= -0.018 J/K (ora le temperature devono essere espresse in K !). ΔS_G=$\frac{m_G \lambda_{FUS}}{T_G}$=0.165 J/K. (il ghiaccio non cambia temperatura).
Dunque: $\Delta S = \Delta S_p + \Delta S_G$=0.147 J/K.

CENNI di teoria cinetica dei gas Date solo le relazioni rilevanti, fra en. cinetica media, energia interna,temperatura

16. **Quinta-sesta settimana: da Ma 31 marzo a Ma 7 aprile lez.77-82**

Introduzione all' elettrostatica :
Esperimenti di Talete con l' ambra e pezzetti di carica. Elettroscopio (con l' osservazione del fenomeno di induzione ellettrostatica.
Quando abbiamo introdotto le forze abbiamo già visto la *Forza elettrostatica* (legge di Coulomb) fra due corpi carichi:

$$F = k_0 \frac{Q_1\, Q_2}{d^2} \tag{170}$$

ove Q_1 e Q_2 sono le cariche espresse in Coulomb (C), d come sopra e k_0, altra costante, di valore $k_0 = 9 \times 10^9\, \mathrm{N\, m^2/C^2}$.
$k_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$, con $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}$ SI Si noti come questa forza può essere repulsiva o attrattiva a seconda del segno relativo delle cariche. È diretta lungo la congiungente le cariche.
Facciamo ancora un passo indietro e ricordiamo che abbiamo incontrato il concetto di campi conservativi, dove il lavoro non dipende dal percorso: $\rightarrow$ energia potenziale dipende solo dalla posizione e non dal percorso e dalla 'storia' precedente. Esempio: piano inclinato $E_p = mgh$, dove h è l' altezza rispetto al riferimento.

Ancora studio della energia potenziale E_p. Caso unidimensionale (x è la generica variabile e non rappresenta necessariamente la coordinata spaziale 'x'): $F = -\mathrm{d}E_p/\mathrm{d}x$. Grafici per en. potenziale mgz, $1/2\, kx^2$ e $-GMm/r$. Punti di equilibrio (forza si annulla, ovvero $\mathrm{d}E_p/\mathrm{d}x$ si annulla).
In generale $E_p(\vec{r})$. Componenti della forza: $F_x = -\mathrm{d}E_p/\mathrm{d}x$, $F_y = -\mathrm{d}E_p/\mathrm{d}y$, $F_z = -\mathrm{d}E_p/\mathrm{d}z$ e $F_r = -\mathrm{d}E_p/\mathrm{d}r$ (quando la forza ha una simmetria radiale la forza radiale è di maggior interesse delle componenti cartesiane della forza).
Esempio gravitazionale (i conti fateli come esercizio, se siete in grado ...):

$$E_p(\vec{r}) = -\frac{GMm}{r} = -\frac{GMm}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \tag{171}$$

$$F_r = -\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}r} = -\frac{GMm}{r^2} \tag{172}$$

$$F_x = -\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x} = -\frac{GMm}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3}\, x = -\frac{GMm}{r^3}\, x \tag{173}$$

$$
\begin{aligned}
F_y &= -\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}y} = -\frac{GMm}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3}\,y = -\frac{GMm}{r^3}\,y \qquad (174)\\
F_z &= -\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}z} = -\frac{GMm}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3}\,z = -\frac{GMm}{r^3}\,z \qquad (175)
\end{aligned}
$$

Dalle (173)-(175) otteniamo

$$
\begin{aligned}
\vec{F} &= -\frac{GMm}{r^3}\,\vec{r} \qquad (176)\\
&= -\frac{GMm}{r^2}\,\frac{\vec{r}}{r} \qquad (177)\\
&= -\frac{GMm}{r^2}\,\hat{r} \qquad (178)
\end{aligned}
$$

Ovviamente le (176) e (178) sono assolutamente equivalenti e il cubo al denominatore nella (176) non deve trarre in inganno.

La forza elettrostatica ('di Coulomb') può essere scritta in modo analogo:

$$
\begin{aligned}
\vec{F} &= \frac{k_0\,Q\,q}{r^3}\,\vec{r} \qquad (179)\\
&= \frac{k_0\,Q\,q}{r^2}\,\hat{r}\,. \qquad (180)
\end{aligned}
$$

(Si ricorda che $k_0 = 9\times 10^9\,\mathrm{N\,m^2/C^2}$.)
Lavoro compiuto dalla forza di Coulomb: analogo di quanto visto a proposito della forza gravitazionale. Energia potenziale (con riferimento rispetto $E_p(\infty)=0$):

$$
E_p = \frac{k_0\,Q\,q}{r} \qquad (181)
$$

Grafici di E_p nei casi $Q\,q>0$ (forza repulsiva) e $Q\,q<0$ (attrattiva) (quest'ultimo ha stessa forma di quello gravitazionale; il primo è invece ribaltato rispetto all'asse r, perchè è positivo).

Campo elettrico 'generato' da una carica puntiforme: forza per unità di carica. analogia con il campo gravitazionale della Terra.

Riepilogo forza gravitazionale e coulombiana (il potenziale vedremo la prossima volta cosa è):

	Gravità	Coulomb
F	$-\frac{G\,M\,m}{r^2}$	$\frac{k_0\,Q\,q}{r^2}$
$\vec{F}$	$-\frac{G\,M\,m\,\vec{r}}{r^3}$	$\frac{k_0\,Q\,q\,\vec{r}}{r^3}$
campo	$\vec{g} = -\frac{G\,M\,\vec{r}}{r^3}$	$\vec{E} = \frac{k_0\,Q\,\vec{r}}{r^3}$
E_p	$-\frac{G\,M\,m}{r}$	$\frac{k_0\,Q\,q}{r}$
potenziale	$-\frac{G\,M}{r}$	$V = \frac{k_0\,Q}{r}$

Potenziale elettrostatico: "energia potenziale per unità di carica", ovvero

$$V = \frac{k_0\,Q}{r} \tag{182}$$

Comodo in quanto, se si conosce la differenza di potenziale fra due punti, $\Delta V_{AB} = V_B - V_A$, si calcola facilmente variazione di energia potenziale e quindi lavoro compiuto dalla forza elettrostatica quando una carica q è spostata dal punto A al punto B:

$$\Delta E_p|_A^B = q\,\Delta V_{AB} = -\,L|_A^B \tag{183}$$

(Nota: se da A a B il potenziale decresce, ovvero $\Delta V_{AB} < 0$ la forza elettrostatica compie lavoro positivo, ricordare analogia gravitazionale). Unità di misura del potenziale elettrostatico: Volt (V): 1 Joule = 1 Volt × 1 Coulomb
Il potenziale elettrostatico si usa moltissimo, a differenza del potenziale gravitazionale. Il motivo è che le cariche elettriche possono muoversi e vanno da punti di potenziale maggiore verso punti di potenziale minore. Dunque il concetto di differenza di potenziale è molto importante.

Campo elettrico 'generato' da una carica puntiforme: forza per unità di carica. Linee di forza (carica positiva: linee di forza uscenti dalla carica,carica negativa: linee di forza entranti sulla carica.). Non si intersecano mai, se non sulla sorgente del campo. Significato di campo vettoriale. Dove l' intensità del campo è maggiore le linee di forza sono più dense. Il campo è tangente alle linee di forza. Unità di misura del campo elettrico (N/C, o più comunemente V/m).
Si noti che, essendo il campo elettrico pari alla forza elettrica per unità di carica ed essendo il potenziale elettrico pari all'energia potenziale per unià di carica, campo e potenziale elettrici sono legati dalle stesse relazioni che legano

forza e potenziale elettrici:

$$\Delta E_p|_A^B = -\int_A^B \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{s} \iff \Delta V|_A^B = -\int_A^B \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{s}, \tag{184}$$

che diventano, se forza o campo elettrico sono <u>costanti</u>

$$\Delta E_p|_A^B = -F\cdot \Delta s \iff \Delta V|_A^B = -E\cdot \Delta s\,. \tag{185}$$

Analogalmente, il campo elettrico può essere ottenuto come derivata della funzione potenziale

$$F_x = -\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x} \iff E_x = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} \tag{186}$$

$$\text{(etc. per le altre componenti)} \tag{187}$$

che in caso di forza o campo uniforme in Δx diventano

$$F_x = -\frac{\Delta\, E_p}{\Delta\, x} \iff E_x = -\frac{\Delta\, V}{\Delta\, x} \tag{188}$$

Forza elettrostatica e campo elettrostatico dovuto a più cariche:
Vale il principio di sovrapposizione degli effetti. Forza che un certo numero di cariche q_i esercitano su una carica q

$$\vec{F}_q(r) = \sum_i F_q^{Q_i}(r) = \frac{k_0\, Q_i\, q}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^3}\,(\vec{r}-\vec{r}_i) \tag{189}$$

$$\vec{E}(r) = \sum_i E_i(r) = \frac{k_0\, Q_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^3}\,(\vec{r}-\vec{r}_i)\,, \tag{190}$$

ove $\vec{r}_i$ è la posizione nello spazio della carica i-ma e $\vec{r}$ è la posizione nello spazio della carica q (rispetto al sistema di riferimento scelto)

Linee di forza del campo elettrico generate da 2 cariche uguali in modulo e opposte in carica, che formano un dipolo elettrico;
Linee di forza del campo elettrico generate da 2 cariche uguali anche nel segno (entrambe positive ad esempio).

Atomo di idrogeno. Confronto fra forza di Coulomb e forza gravitazionale fra un elettrone e un protone. Numeri importanti: $e_{e,p} = \pm 1.6\cdot 10^{-19}$ C, $m_e = 9.11\cdot 10^{-31}$ kg, $m_p = 1.67\cdot 10^{-27}$ kg, $r = 5.3\cdot 10^{-11}$ m

Il campo elettrico è un campo **conservativo**, come il campo gravitazionale. Il lavoro fatto dal campo per portare una carica da r_2 a r_1 non dipende dal percorso. Il lavoro su un ciclo (percorso chiuso) è nullo.

Energia potenziale-lavoro fatto dal campo
Calcolato esplicitamente, con l' integrale, il lavoro svolto dal campo elettrico

per portare una carica q da r_2 a r_1, con r_2, r_1 distanze da una carica puntiforme che genera un campo elettrico. Discusso anche il caso in cui r_2 sia infinito, che corrisponde allo zero dell' en. potenziale elettrostatica (analogia con il caso gravitazionale). Commenti sul segno del lavoro e dell' en. potenziale nei vari casi possibili: cariche di stesso segno avvicinate o allontanate, cariche di segno opposto avvicinate o allontanate (esempio:se $r_2 > r_1$ e le cariche hanno stesso segno, il lavoro fatto dal campo è negativo. Infatti le cariche tendono a respingersi e noi le forziamo ad avvicinarsi. Il campo fa un lavoro resistente, tipo attrito, a questo).

Notiamo che dunque, essendo $E_p(\infty) = 0$, l' energia potenziale di un sistema di cariche in una certa configurazione corrisponde al lavoro, cambiato di segno, fatto dal campo per portare le cariche dall' infinito in quella configurazione. Notare che il lavoro fatto dal campo è positivo e le cariche hanno segno opposto, e negativo nel caso in cui abbiano stesso segno e sempre $r_2 > r_1$.
Espressione matematica:
supponiamo le due cariche di stesso segno. Il lavoro fatto dal campo , è -ricordiamo- $L = -\Delta E_p = \int_{\infty}^{a} q_2 \, E \, \mathrm{d}r$, è negativo (ossia resistente) e $E_p(a) = \frac{q_1 \, q_2}{4\pi\epsilon_0 a}$ positiva, avendo posto $E_p(\infty) = 0$. Ossia: il lavoro fatto "da noi" per portare q_2 dall' infinito ad a è positivo, il sistema acquista energia potenziale che chiamiamo "energia elettrostatica". Rappresenta il lavoro che abbiamo dovuto fare per creare quella configurazione elettrostatica. È una energia che ad es. viene restituita quando q_2 torna all' infinito, cosa che tende a fare spontaneamente. Il lavoro fatto dal campo è negativo, perchè il campo si oppone all' avvicinamento delle 2 cariche di stesso segno. Si comporta come la forza di attrito, che fa sempre un lavoro resistente.

Svolto esercizio pag. 675 Serway: 3 cariche sull' asse x, le 2 agli estremi positive $q_2 = 6 \ \mu C, x = 0m$, $q_1 = 12 \ \mu C, x = 2m$ e quella in centro q_3 negativa. Trovare la posizione della carica negativa tale che la forza risultante su essa sia nulla. Immaginiamo che q_3 si trovi ad una generica distanza d dall' origine delle coordinate e dobbiamo trovare d. Viene una equazione di secondo grado. Discusso il significato delle due radici del polinomio:
la soluzione positiva, ossia q_3 in mezzo alle 2 cariche corrisponde effettivamente a risultante $\vec{F}_{13} + \vec{F}_{23} = 0$. Numericamente viene d=0.77 m, ossia q_3 più vicina alla carica più piccola, cosa ovvia perchè q_2 genera un campo e dunque una forza più piccolo di quello generato da $q_1 > q_2$. Se fossero state uguali q_3 sarebbe stata in equilibrio esattamente in mezzo alle 2. Notiamo anche che se fossero state uguali avremmo avuto solo una soluzione, il termine in d^2 sarebbe stato nullo. L' altra radice $d = -3.44$ m rappresenta ovviamente non una posizione di equilibrio, infatti q_3 - che viene a sinistra della carica q_2- viene attirata sia da q_2 che da q_1. Rappresenta comunque la situazione in cui il modulo delle 2 forze è uguale $F_{23} = F_{13}$. Anche qui vale il discorso di sopra: q_3 deve stare più vicino alla carica più piccola.

Grafici energia potenziale gravitazionale ed elettrostatica, in funzione della distanza r fra la sorgente del campo e la carica o massa di test

Definizione di eV (elettron-volt). Il potenziale elettrico si misura in volt=joule/coulomb. Carica dell' elettrone = $e = -1.6 \times 10^{-19}$ C. Da cui: 1 eV= 1 V $\cdot$ 1.6×10^{-19} joule.

Esercitazione:

(a) **Elettrostatica**
Es. esonero-recupero CTF del 10/06/2003: moto di un elettrone in un campo elettrico uniforme, noto, parallelo e concorde alla velocità dell' elettrone.
Fatto sia con la cinematica che con lavoro ed energia cinetica. Ricordiamo che si trova, da $F = ma$, che $a = \frac{Ee}{m}$. Calcolare lo spazio percorso e la d.d.p. Calcolare anche l' en. potenziale (acquistata o persa ?) dall' elettrone. Trovato lo spazio percorso Δx, per calcolare la d.d.p. basta ricordare che $E = -\frac{dV}{dx}$, e poichè il campo è uniforme, $\Delta V = -E\ \Delta x = -2.85$ V. Se vogliamo anche calcolare l' energia potenziale **acquistata** dall' elettrone (che dopo Δx non ha più energia cinetica), basta ricordare che $E_p = e\ \Delta V = 1.6\ 10^{-19} \cdot 2.85$ J=2.85 eV (notate: 2.85 eV, ossia numericamente è il valore della d.d.p. ma è una energia. Rivedete la definizione di eV, se non è chiaro !
Domande aggiunte: a) calcolare la velocità con cui l' elettrone ripassa per $x = 0$. Come è rispetto a v_i ? b) Calcolare quanto tempo l' elettrone ci mette a tornare in x=0.

(b) **Termodinamica** (esame)
Una macchina termica usa come fluido una mole di gas perfetto monoatomico. Il gas compie un ciclo reversibile costituito da una espansione isobara fra uno stato A e uno stato B seguita da una trasformazione isocora dallo stato B allo stato C, e da una isoterma che riporta il gas nello stato A. Sapendo che $p_A = 5$ atm, $V_A = 6$ l e il lavoro fatto dal gas nell' espansione isobara è 3030 J, calcolare:
a) volume e temperatura del gas in C; b) il calore scambiato nelle tre trasformazioni; c) il rendimento del ciclo.
Sol:$V_C = V_B = 0.012$ m^3; $T_C = T_A = 364.6$ K; $Q_t = 939$ J; $Q_t = L_t$ (totale); $\eta = \frac{L_t}{Q_{AB}}$ =12.3 % (Q_{AB} è l' unico calore dato al sistema).

(c) **Provate a fare: Compito di esame CTF febbraio 2007**
Notate che è piuttosto "semplice", dunque dovreste saperlo fare senza problemi... altrimenti preoccupatevi..
Una quantità di 1.5 moli di un gas biatomico, in condizioni di gas perfetto, compie un ciclo termodinamico, composto di tre trasformazioni reversibili:
- dallo stato A allo stato B con una trasformazione isoterma alla temperatura di 320 K;

- dallo stato B allo stato C con una trasformazione isobara alla pressione di 2 atmosfere;
- dallo stato C allo stato A iniziale con una trasformazione isocora al volume di 10 litri.
Si calcolino :
- la pressione dello stato A, il volume dello stato B e la temperatura dello stato C;
- il lavoro della trasformazione isoterma AB, la variazione di energia interna della trasformazione isocora CA (2720 J; 4920 J);
- il lavoro totale del ciclo (761 J).

(d) Per chi deve recuperare o fare lo scritto, provate a fare: **es. di esame di cinematica**, scorso anno:
Un corpo di massa m scivola lungo un piano inclinato liscio partendo dall' estremo più alto con vel. iniziale nulla. Contemporaneamente dall' estremo inferiore si lancia lungo il piano inclinato un altro corpo di ugulae massa con vel. iniziale $v_0 = 10$ m/s. Il piano forma un angolo di 30^o con l' orizzontale ed è lungo $L = 10$ m. Calcolare:
a) dopo quanto tempo si urtano; b) in che punto sul piano si urtano; c) supponendo l' urto completamente anelastico, la vel. dei due corpi dopo l' urto; d) in quale verso si muovono dopo l' urto.
Sol: 1 s; 7.55 m; 0.1 m/s; verso . . . riflettteteci.

Esempio di un sistema di cariche: calcolo di en. potenziale, campo e forza
Supponiamo di avere ad es. cariche tutte positive e uguali in modulo poste ai vertici di un triangolo equilatero di lato l noto. Calcoliamo e disegniamo la forza su una carica dovuta alle altre due. La simmetria è tale che il risultato sia lo stesso qualunque sia la carica su cui facciamo il conto. Notiamo che la situazione è "esplosiva", nel senso che le cariche non sono in equilibrio, su ciascuna di esse è infatti applicata una forza repulsiva, dovuta alle altre due. Notiamo che nel centro del triangolo equilatero il campo elettrico dovuto alle tre cariche è nullo.

Calcoliamo il lavoro fatto dal campo per portare le 3 cariche in questa configurazione, notando ancora che $L = -\Delta E_p = -E_p$(cariche sul triangolo).

Il dipolo elettrico:
Due cariche uguali in modulo e opposte in segno, a distanza δ fra loro. Impostiamo il calcolo del campo in un generico punto sull' asse delle due cariche. Si applica il principio di sovrapposizione degli effetti. L' approssimazione di dipolo interviene quando calcoliamo il campo in un punto, che per semplicità noi prendiamo sull' asse del dipolo, a distanza $z_0 \gg \delta$ dal dipolo.
Per fare questo: richiamo allo sviluppo in serie di Taylor e calcolo dello sviluppo in serie, fermandosi al primo ordine, di $\frac{1}{(1 \pm x)^2}$, con $x << 1$.

IMP: notiamo che troveremo che il campo va come $1/z_0^3$, ossia decresce più rapidamente del campo generato da una singola carica, che decresce come $1/z_0^2$. Questo è quello che ci aspettiamo, se ci riflettiamo. Questo risultato vale anche se z_0 non si trova sull' asse del dipolo.
Prendiamo z_0 sull' asse del dipolo, a distanza $z_0 - \delta/2$ dalla carica + e $z_0 + \delta/2$ dalla carica -. Si applica poi il principio di sovrapposizione degli effetti. Fin qui il conto è esatto, senza approssimazioni. Per fare invece il conto del campo a distanza $z_0 \gg \delta$ si può "sviluppare in serie" la differenza delle funzioni $y = \frac{1}{(1-x)^2}$ (termine della carica +, per come abbiamo scleto il riferimento) e $y = -\frac{1}{(1+x)^2}$ (termine della carica -: il segno - è dovuto al fatto che è la carica negativa, il segno + è invece solo dovuto a come abbiamo scelto il riferimento), dove $x = \delta/(2z_0) << 1$, attorno a x=0. Lo sviluppo corrisponde a "linearizzare" la funzione attorno a x=0, ossia trovarne la sua approssimazione lineare

Termodinamica, provate a svolgere:

(a) **Esame 3 luglio 2006 –Termodinamica 10 punti**
Un gas perfetto descrive un ciclo reversibile costituito da una compressione adiabatica, da un raffreddamento isocoro e da una espansione isoterma a $T = 0°$C. Sapendo che il lavoro fatto dal gas nella trasformazione isoterma è 4200 J e che durante il ciclo il gas cede complessivamente una quantità di calore pari a 6700 J, calcolare:
a) il lavoro compiuto dal gas nella trasformazione adiabatica; $L_{AB} =$
b) la variazione di entropia nella trasformazione isoterma; $\Delta S_{CA} =$
c) la variazione di entropia nella trasformazione isocora. $\Delta S_{BC} =$
Soluzione:
a) Il lavoro totale fatto nel ciclo è uguale al calore scambiato nel ciclo, poichè la var. di energia interna sul ciclo è nulla. Il lavoro sull' isocora BC è nullo. Il lavoro sull 'isoterma L_{CA} è noto. Dunque $L_{tot} = Q_{tot} = L_{AB} + L_{CA}$. Da cui sull' adiabatica AB si ha:
$L_{AB} = L_{tot} - L_{CA}$=$Q_{tot} - L_{CA}$=-6700-4200=-10400 J (6700 J sono calore ceduto dal gas, dunque negativo).
b) sull'isoterma il calore assorbito è uguale al lavoro fatto ($\Delta U_{isoterma} = 0$), la temperatura è costante $T_0 = 273.15$ K (ricordate di convertire !!). Dunque: $\Delta S_{isoterma}= \frac{Q_{CA}}{T_0}=\frac{L_{CA}}{T_0}=\frac{4200}{273.15}= 15.4$ J/K.
c) L' entropia è una funzione di stato, dunque la sua variazione in un ciclo è nulla. Inoltre la variazione di entropia in una adiabatica **reversibile** è nulla. Dunque $\Delta S_{isocora}$=ΔS_{BC}= =$-\Delta S_{CA}$=-15.4 J/K.

Il dipolo elettrico e il momento di dipolo.
Riprendiamo da dove eravamo arrivati. Come detto, per fare il conto del campo a distanza $z_0 \gg \delta$ si può "sviluppare in serie" la differenza delle funzioni

$y = \frac{1}{(1-x)^2}$ e $y = \frac{1}{(1+x)^2}$, dove ricordiamo $x = \delta/(2z_0) << 1$, attorno a x=0. Lo sviluppo corrisponde a “linearizzare” la funzione attorno a x=0, ossia trovarne la sua approssimazione lineare.
Il risultato della linearizzazione attorno ad x=0 è:

$$y = \frac{1}{(1-x)^2} \simeq (1+2x),$$

$$y = \frac{1}{(1+x)^2} \simeq (1-2x).$$

Il risultato complessivo è: $(1+2x) - (1-2x) = 4x$.
Per coloro che seguono matematica, ecco come si fa:

$$y \simeq y(x=0) + \frac{dy}{dx}|_{x=0} \cdot x + \dots$$

, dove $\dots$ significa che si potrebbe andare avanti con “ordini superiori”, ossia derivata seconda, terza ecc. Nel nostro caso basta fermarsi al primo ordine. Per fare questo conto occorre sapere fare la derivata di y rispetto ad x: $\frac{dy}{dx} = \frac{d(1/(1-x)^2)}{dx}$ e la derivata $\frac{dy}{dx} = \frac{d(1/(1+x)^2)}{dx}$. Ricordiamo che la derivata di x elevato ad una potenza n qualunque (positivo o negativo) è $n \cdot x^{n-1}$, ad es la derivata di $1/x^2$ è $-2 \cdot 1/x^{-3}$ (perchè qui n=-2 e -2-1=-3). Dunque nel nostro caso abbiamo: $\frac{dy}{dx} = \frac{d(1/(1-x)^2)}{dx} = -2 \cdot \frac{-1}{(1-x)^3}$ e $\frac{dy}{dx} = \frac{d(1/(1+x)^2)}{dx} = -2 \cdot \frac{1}{(1+x)^3}$ (ricordo che dobbiamo anche fare la derivata rispetto ad x del termine +x e -x che appare dentro la parentesi, e questo nel caso del +x dà semplicemente un 1 a numeratore, nel caso del -x dà un -1 a numeratore. Nello sviluppo va poi messo il valore della derivata in x=0 (indicato sopra con il simbolo $\frac{dy}{dx}|_{x=0}$).
Il risultato dello sviluppo è: $(1+2x) - (1-2x) = 4x$

Flusso del campo.
Il **teorema di Gauss**, partendo dal calcolo del campo generato da una carica puntiforme posta nel centro di una sfera. Generalizzazione al calcolo del flusso attraverso una superficie qualsiasi, carica non nel centro, piu' cariche all' interno della superficie considerata.

Il punto importante da avere chiaro è che il teorema di Gauss viene fuori perchè il campo varia con legge $1/r^2$ (campo gravitazionale e campo elettrico sono gli esempi che abbiamo visto). Importante: il teorema di Gauss vale sempre ! In pratica, se vogliamo usarlo per calcolare il valore del campo bisogna avere problemi con opportune simmetrie, tali che il campo sia costante, in modulo, direzione e verso, sulla superficie gaussiana scelta, per poterlo portare fuori dall' integrale di superficie di $\vec{E} \cdot dS$ e avere così separati i due contributi del campo e della superficie. Le simmetrie tipiche sulle quali è utile applicare Gauss per calcolare il campo sono: sferica, cilindrica e piana.

Applicazioni del teorema di Gauss:
Campo elettrico generato da una distribuzione sferica di carica di raggio R, con densità di carica $\rho = Q/V$ (V=volume della sfera). Lo facciamo e ricordiamo che lo stesso si può fare per una distribuzione sferica di massa. Iniziamo con il calcolo del campo generato all' esterno della sfera. troviamo che il campo elettrico generato da una distribuzione sferica di cariche all' esterno della sfera è uguale al campo che avrebbe generato una carica puntiforme, di pari valore di carica, posta al centro della sfera stessa

17. **Proposta di esercizi, per tutte le situazioni (esonero, recupero, scritto)**

CONSIGLI Provate a farli immaginando di essere all' esame, con solo il vostro formulario. Anzi, approfittatene per completare/controllare il formulario. Non affrettatevi a guardare le soluzioni. Pensateci bene prima di arrendervi. Anche se questo volesse dire doverci tornare su il giorno dopo, ristudiare un o più capitoli del libro (auspicabile che lo facciate se non riuscite a risolvere il problema), discuterne con i compagni.
Anche coloro che faranno lo scritto, dove si possono consultare libri ed appunti, dovrebbero farli seguendo la stessa filosofia, ossia ristudiare i capitoli necessari e non usare nulla se non il formulario nel momento in cui si ripassa a risolvere l' esercizio. *Non* svolgeremo tutti questi esercizi a lezione.
Li passerò in rassegna nelle ultime lezioni. Dunque chiedete se avete difficoltà di qualunque tipo.
Tenete sempre presente che si tratta di "appunti", dunque potrebbero esserci errori. A maggior ragione, in caso di dubbi, chiedete !
Ovviamente, gli esercizi che io vi suggerisco non esauriscono l' insieme degli esercizi da fare !! Mi raccomando, dovete esercitarvi parecchio, come ho ripetuto tante volte ...
Urti Lasciamo rotolare una palla su un terreno (coeff. di attrito dinamico =0.8). Calcolare la velocità con cui ne urta un' altra di stessa massa e inizialmente ferma, tale che la seconda si fermi dopo s= 2 m dall' urto (supposto elastico).
Sol: i due corpi subiscono un urto elastico centrale e si scambiano le velocità. Essendo di stessa massa ed essendo la seconda palla ferma inizialmente si ha che $v_1' = v_2 = 0$, mentre $v_2' = v_1$ vel. iniziale della prima palla, da calcolare (con il ' indico le grandezze dopo l' urto). Poi: lavoro = variazione di en. cinetica. Ossia: $\mu_D\, m\, g\, s = \frac{1}{2}m(v_2')^2$, da cui $(v_2')^2 = 2\mu_D g s$ e $v_2' = v_1$.
Moto circolare: Un ciclista percorre una pista circolare di raggio R= 100 m. La pista è inclinata verso l' interno e forma un angolo di ϕ =30^o con l' orizzontale. Non cè attrito. Quale è la velocità con la quale il ciclista può percorrere la pista senza sbandare ? Il valore trovato rappresenta un valore massimo di velocità, un valore minimo oppure un valore ben preciso, al variare del quale il ciclista scivolerebbe ?
Sol: vedi il problema di automobile in curva su strada inclinata. Il moto non è sul piano inclinato. Bisogna scegliere il sistema di rif. corretto (non x parallela al piano inclinato!), proiettare le forze correttamente (peso, reazione del piano = forza centripeta.). Viene: $v = \sqrt{Rg\tan\phi}$=23.8 m/s. Valore preciso per avere equilibrio.
Forze Due blocchi collegati da una fune di massa trascurabile sono trascinati da una forza $\vec{F}$= 68 N. Le due masse sono: $m_1 = 12$ kg e $m_2 = 18$ kg. Il coefficente di attrito dinamico vale $\mu_D = 0.1$. Determinare la tensione $\vec{T}$ e l' accelerazione del sistema.

Sol: fare il disegno dei due blocchi e delle forze su essi. Sull' asse x (quello del moto) si ha:
$T - f_{a1} = m_1 a$, $F - T - f_{a2} = m_2 a$, dove $f_{a1} = \mu_D m_1 g$ e $f_{a2} = \mu_D m_2 g$. Si ricava: a=1.29 m/s^2; T=27.2 N.
Macchine termiche:
il motore di una macchina termica ha rendimento del 20% e produce in media 23kJ di lavoro meccanico al secondo. Quanto calore al secondo deve essere fornito alla macchina termica ? Quanto calore al secondo viene invece scaricato dal motore della macchina termica ?
Sol: $\eta = 0.2 = \frac{L}{Q_C}$; $\frac{Q_C}{s} = \frac{L}{s\,\eta}$ = (23/0.2) kJ/s = 115 kJ/s; $\frac{Q_F}{s}$ =$\frac{Q_C}{s}$ - $\frac{L}{s}$ = (115-23) kJ/s = 92 kJ/s.
Macchine termiche:
Un freezer ha coefficiente di prestazione (rendimento) COP=3.8 e utilizza una potenza di 200 W. quanto tempo ci mette a congelare 600 g di acqua e farne ghiaccio a 0$\,^o$C ?

COP = 3.8 = $\frac{Q_F}{L} = \frac{Q_F}{Q_C - Q_F}$ (Q_F in modulo). $\frac{L}{s}$ = potenza P = 200 W (ossia J/s).
$Q_F = -m_a\,\lambda_{fus}$ = - 600 $\times$ 80 = -48 kcal = - 200 kJ (energia da sottrarre all' acqua). Ma la quantità di calore al secondo che la macchina estrae dalla sorgente fredda è

$$Q_F/s = \frac{L}{s} \cdot COP =$$

200 $\times$ 3.8 =760 J/s. Dunque, per avere il tempo necessario dobbiamo dividere il Q_F totale che serve per il $\frac{Q_F}{s}$ che la macchina riesce a togliere all' acqua ogni secondo. Da cui $t = \frac{200 \times 10^3}{760}$ = 264.3 s.
(Sol: 264.3 s)
Elettrostatica:
Dato un quadrato di vertici A,B,C,D e lato 100 cm. Sul vertice C viene messa una carica $q_2 = -3.3\,\mu$C e sul vertice D una carica $q_1 = 1.5\,\mu$C. Calcolare la differenza di potenziale fra i due vertici A e B.
Metto il vertice A in alto a destra (guardando il disegno), B in basso a destra, C in basso a sinistra, D in alto a sinistra.
La diagonale del quadrato è $d = l\,\sqrt{2}$, dove $l = 0.1$ m. Dunque $d = 0.144$ m. Si applica il principio di sovrapposizione degli effetti. Va calcolato direttamente il potenziale, il campo è un vettore, andrebbe proiettato correttamente, scritto in forma generale sulla coordinata fra A e B e bisognerebbe poi fare l' integrale.
$V_B = k_0(\frac{q_1}{d} + \frac{q_2}{l})$ = -203 kV;
$V_A = k_0(\frac{q_1}{l} + \frac{q_2}{d})$ = -71 kV;
$V_A - V_B$ = (-71 + 203) kV=132 kV.
Dunque la d.d.p. fra A e B è 1.32×10^5 V.

Elettrostatica: es. di recupero esonero CTF 2001-2002:

Elettrone, posto molto lontano da un protone. 1) Trovare la sua velocità v_d quando si trova a $d = 2$ nm dal protone, dopo essere stato lasciato libero di muoversi con velocità iniziale nulla. 2) Il protone viene allontanato e l' elettrone, che si muove con v_d entra in una regione dove c'è un campo elettrico uniforme e parallelo alla velocità v_d. Trovare il valore del campo tale che l' elettrone si fermi dopo $d_1 = 1.44$ mm. 3) Trovare la d.d.p. (differenza di potenziale) fra x=0 e x=d_1. Dato il valore di e=-1.6 10^{-19} C , $e_p = -e$ positiva e $m_e = 9.1\ 10^{-31}$ kg. Sol. da guardare solo dopo avere provato a farlo:
1) il modo più semplice è utilizzare

$$L = \Delta E_c \ = -\ \Delta E_p.$$

Dunque: ΔE_c=$E_c(finale)$−$E_C(iniziale) = 1/2\, m_e v_d^2$−0=$-\Delta E_p = E_p(iniziale)-E_p(finale) = 0 - e\, k_0\, e_p/d$ da cui $\rightarrow$ $v_d = |e|\ \sqrt{2k_0/(d\, m_e)} = 5.032\ 19^5$ m/s
2) come sopra, con variazione di en. cinetica e potenziale.
ΔE_c=0 $-\ 1/2\ m_e v_d^2$=$-\Delta E_p$=0 $-\ e\ (V)$, con $V = -E\ d_1$ (dalla definizione E=-dV/dx,) potenziale. Ricordiamo che e elettrone è negativa. Dunque si ha: $\rightarrow$ $E = 500$ V/m. Positivo, ossia diretto nello stesso verso della velocità dell' elettrone (in questo modo l' accelerazione è negativa e l' elettrone può essere frenato).
In sintesi: l' elettrone perde energia cinetica e acquista en. potenziale. Dunque non può che essere: $1/2 m_e v_d^2 = |e|\ E\, d$ Entrambe si possono risolvere anche con la cinematica, nel caso 1) fate attenzione al fatto che d è la distanza dal protone. 3) $V = -E\ d_1$=-0.7 V. L' en. potenziale *acquistata* dall' elettrone in eV è 0.7 eV.
Per chi segue matematica e sa fare integrali semplici ..provate..: Sbarra sottile di lunghezza a, possiede una carica totale positiva Q distribuita uniformemente. 1) Calcolare il valore del campo ad una distanza x^* da una estremità della barra, lungo la direzione della barra stessa. 2) Calcolare il valore per $x^* >> a$ e commentarlo.
Nota: si applica il principio di sovrapposizione degli effetti anche ad una distribuzione continua di carica come questa. Bisogna "affettare" la barretta in elementini di larghezza dx, ciascuno con carica $(Q/a)dx$.

18. **Ancora proposta di esercizi**

Esercitazione:

(a) **Termodinamica** Supponete che, sempre valido il primo principio della termodinamica ma non il secondo, succede qualcosa di strano e mentre un nuotatore è in piscina l' acqua improvvisamente congela. Come muore il nuotatore ??

(b) **Elettrostatica** Quattro cariche puntiformi si trovano ai vertici di un quadrato di lato l=30 cm. Il loro valore è,in senso orario, rispettivamente di q_1 =2 nC, q_2 =6 nC, q_3 =-2 nC, q_4=6 nC. Determinare il valore del campo elettrico (mod.,dir.,verso) e il potenziale nel centro del quadrato.
Suggerimento per risolverlo:
Ponete, ad es., q_1 in alto a destra nel quadrato e le altre di conseguenza. Asse x: da q_4 a q_2, Asse y: da q_1 a q_3. d=diagonale/2=$l/\sqrt(2)$ (Sol: $\vec{E} = (0, 800)$ V/m; V= 509 V) Sol., da guardare dopo . . . :
Posto q_1 in alto a destra nel quadrato e le altre di conseguenza. Asse x: da q_4 a q_2, Asse y: da q_1 a q_3. d=diagonale/2=$l/\sqrt(2)$ E_x viene nullo nel centro del quadrato. $E_y = k_0\,(\frac{q_1}{d^2} + \frac{|q_3|}{d^2})$ (si sommano, perchè i due campi sono diretti nello stesso verso, entrambi nel verso delle y positive con la scelta fatta. viene $\vec{E} = (E_x, E_y) = (0, 800)$ V/m.
Il modulo è $|E| = \sqrt{E_x^2 + E_y^2}$ e la fase (angolo con l' asse delle x) è: $\phi = arctan\frac{E_y}{E_x}$ che, per come è stato scelto il riferimento, dà 90^o.
IMPORTANTE: *dovreste ormai avere dimestichezza con i vettori, ossia con il calcolo delle componenti,proiezioni sugli assi scelti, modulo e fase, con il disegno del vettore risultante date le componenti o vettori da sommare.*
Potenziale nel centro del quadrato= $V_0 = k_0\,(\frac{q_1}{d} + \frac{q_2}{d} + \frac{q_3}{d} + \frac{q_4}{d})$=509 V (ciascuna carica il suo segno)

(c) **Macchine termiche** Una macchina di Carnot assorbe in un ciclo un calore di 2000 J dalla sorgente a temperatura più alta e compie un lavoro di 1500 J. Se la temperatura della sorgente più fredda è 200 K, calcolare la temperatura della sorgente calda.
Sol: Q_C =2000 J, L=$Q_C - |Q_F|$=1500 J. Dunque Q_F=500 J. Ricordando che, essendo una macchina ideale, possiamo scrivere $Q_C/Q_F = T_C/T_F$, troviamo $T_C = 800$ K.

(d) **Calorimetria, energia** Un lago contiene circa $4\,10^{11}$ m^3 di acqua. Determinare:
a) la quantità di calore necessaria per aumentare la T dell' acqua da 11 ^{o}C a 12 ^{o}C.
b) Supponendo che il calore venga fornito da una centrale idroelettrica alimentata da un condotto con portata di 1000 l/s) che pesca acqua da un laghetto a h=250 m di quota rispetto alla centrale e supponendo un

rendimento della centrale del 50%, trovare la potenza della centrale e per quanti anni circa dovrebbe funzionare questa centrale (si ricorda che un giorno solare medio ha 86400 s).
a) $Q = m_a\, c_a \Delta T = 16.7\, 10^{17}$ J ($\Delta T = 1$ K).
b) $E/s = m\, g\, h/s = \rho_a\, V_a\, g\, h$, con $V_a = 10^3\, 10^{-3}\, m^3/s$. Viene: $E/s \simeq 2.5$ MW. Poichè il rendimento è 0.5 si ha che la potenza erogata dalla centrale è P=1.25 MW.
c) Se ora divido Q per P trovo quanti secondi ci vogliono alla centrale per fornire la quantità di calore Q che innalza di un grado la T del laghetto. Da qui si fa facilmente il conto su quanti anni ci vogliono (basta dividere i secondi trovati per 365 86400).
(Sol: $Q = 16.7 \times 10^{17}$ J; $t = \frac{Q}{P}$ in secondi, con P=1.25 MW)

19. **Settima settimana: da Gi 16 aprile Lezioni 83-86**

Continuiamo con il calcolo del campo generato da una distribuzione sferica di cariche. Calcolo del campo all' interno. Notiamo che il campo aumenta con r, finchè $r < R$: infatti in questa situazione aumentare r significa "abbracciare più carica", carica che aumenta con il cubo del raggio, il campo, se la carica fosse costante, diminuirebbe con $1/r^2$, e il risultato è un campo che aumenta con r. Quando $r > R$ la carica ormai l' ho presa tutta, non aumenta più e resta solo la diminuizione del campo con $1/r^2$.
Fatto il grafico di $|E(r)|$.

Impostato il conto del calcolo del campo generato da un filo di lunghezza finita L e carico con densità lineare di carica $\lambda = Q/l$ (l=lunghezza del filo): allo scopo di capire come si procede nel caso in cui non ci siano particolari simmetrie che ci aiutano.
Considerazioni su modulo, direzione e verso del campo elettrico nel punto di mezzo del filo (a distanza r dall' asse del filo) e ragionamento su cosa avviene quando il filo è "infinitamente lungo", ossia $L >> r$.
Campo elettrico generato da un filo di lunghezza "infinita", carico con densità lineare di carica λ (C/m).
Campo elettrico generato da un piano di dimensioni "infinite", carico con densità superficiale di carica $\sigma = Q/A$, (A= area della superficie piana).

Sommario: Notiamo che, nel caso della sfera, il campo all' esterno va come $1/r^2$, nel caso del filo indefinito come $1/r$, nel caso del piano infinito non dipende da r.

Campo elettrico di un doppio strato (2 superfici piane, separate da distanza d, cariche una positiva e una negativa con stessa densità di carica in modulo.
Importanza di fare il disegno, con direzione e verso del campo generato da ogni piano, e ricordarsi che si applica il principio di sovrapposizione degli degli effetti.
Esercitazione, sul teorema di Gauss e elettrostatica:

(a) Es. n. 37 pag. 706 Serway: cilindro molto lungo, raggio R noto ($L >> R$), carico con densità di volume ρ nota. Calcolare il campo per r (distanza dall' asse) fra 0 e infinito.
Sol: Anche qui, come nel filo rettilineo indefinito, per motivi di simmetria il campo è ortogonale all' asse del cilindro e ha lo stesso valore in tutti i punti a distanza r dall' asse. Dunque si applica Gauss per calcolare il campo, visto che lo si può portare fuori dall' integrale che dà il flusso. Viene un campo che aumenta con r, finchè $r < R$ e diminuisce come $1/r$, per $r > R$, ossia all' esterno è esattamente come il campo di un filo rettilineo indefinito. $Q_{tot} = \rho \times \pi R^2 L$ carica totale, con L lunghezza del cilindro; la carica contenuta invece in un cilindro di raggio $r < R$ è invece:

$Q_r = \rho \times \pi r^2 L$. Il flusso del campo elettrico, a cui contribuisce solo il flusso attraverso la superficie laterale del cilindro è $E\ 2\pi r\ L$. Mettendo insieme si ha il risultato descritto sopra.

(b) Svolto es. pag. 157 dispense Luci: cavo sottile rettilineo molto lungo, carico con densità lineare λ=-3.6 nC/m, circondato da un cilindro di raggio d=1.5 cm, carico con densità di carica superficiale σ. Trovare σ tale che il campo all' esterno del cilindro sia nullo.

Sol: si applica il principio di sovrapposizione degli effetti e il teorema di Gauss sia al filo che alla superficie cilindrica. Attenzione: ora il campo generato del cilindro è dovuto ad una carica superficiale, non di volume ! Dunque il campo generato dal cilindro al suo interno, ossia per $r < d$ è nullo (per Gauss), mentre per $r > d$ è dato da (sempre Gauss, dopo avere visto come è diretto il campo): $E 2\pi r L = (\sigma 2\pi d L)/\epsilon_0$, da cui $E = \sigma \frac{d}{r\ \epsilon_0}$ (che per $r = d$ diventa σ/ϵ_0, notatelo). Per direzione e verso valgono le stesse considerazioni fatte per il filo rettilineo indefinito.

(c) Fate es. di esonero: campo elettrico uniforme noto= 2 kN/C, diretto come x. Una carica q= 3 μC viene lasciata libera all' interno del campo con vel. iniziale $v_i = 0$. Percorre Δx=4 m. Calcolo di variazione di en. cinetica, en. potenziale e del potenziale in $x = 4$ m.

Soluzione: $L = qE\Delta x = \Delta E_c = -\Delta E_p$. Da cui $\Delta E_c = 24$ mJ. ΔE_p = -24 mJ. ΔV = ΔE_p/q = - E Δx =-8 kV.

I conduttori: le cariche elettriche possono muoversi all' interno dei conduttori, sotto l' azione di un campo elettrico applicato (ad esempio connettendo una batteria che generi una d.d.p.). Negli isolanti le cariche elettriche non possono muoversi. Riassumiamo qui i punti importanti:

(a) Se il conduttore non e' connesso a dei cavetti nei quali possa circolare una corrente, l' equilibrio elettrostatico (cariche tutte ferme) è la situazione che spontaneamente si raggiunge.

(b) il campo elettrico è sempre nullo all' interno di un conduttore (se non fosse nullo le cariche si muoverebbero).

(c) le cariche elettriche -meglio:l' eccesso di cariche elettriche- si distribuiscono solo sulla superficie di un conduttore. Se non fosse così, applicando Gauss ad una qualunque superficie interna al conduttore, troverei un campo non nullo, in contraddizione con il punto precedente. Attenzione: le cariche non si distribuiscono in modo necessariamente uniforme ! Come si distribuiscono dipende dalla geometria del conduttore. Infatti si devono distribuire in modo tale che il potenziale sulla superficie del conduttore sia sempre lo stesso. Il potenziale deve essere lo stesso per il punto seguente.

(d) Il campo elettrico deve essere normale (ed esterno) ad ogni punto della superficie. Se non lo fosse ci sarebbe una componente tangenziale alla superficie che metterebbe in moto le cariche. Come conseguenza il valore del potenziale V sulla superficie, poichè le sue variazioni danno il campo elettrico tangenziale, deve essere costante su tutti i punti della superficie del conduttore. Ma non basta ...

(e) Poichè il campo elettrico è nullo all' interno del conduttore, la variazione di potenziale fra due punti qualunque del conduttore è sempre nulla. Ossia: il potenziale è lo stesso dappertutto in un conduttore.
Gabbia di Faraday.
Il campo elettrico è nullo all' interno del conduttore e sulla superficie può variare e il suo valore dipende dalla densità di carica locale che in generale, come già detto, non è uniforme. Anzi, precisiamo ...

(f) Le cariche si accumulano dove il raggio di curvatura è più piccolo, ossia sulle "punte". Come conseguenza, laddove c ' è maggiore densità di carica il campo elettrico è maggiore. Dimostreremo entrambe le cose. Iniziamo dalla seconda:

(g) Il campo sulla superficie di un conduttore è proporzionale alla densità di carica, ossia il teorema di Coulomb: il campo vicino alla superficie di un conduttore (ortogonale e esterno) è in modulo pari a σ/ϵ_0. Si dimostra con Gauss, ricordando che le cariche sono solo sulla superficie esterna del conduttore e che il campo è ortogonale alla superficie del conduttore.
Es. su una sfera conduttrice, carica con carica totale Q: $E(a) = \sigma/\epsilon_0 = \frac{Q}{4\pi a^2 \epsilon_0}$ (ritroviamo ciò che avevamo visto con Gauss, ossia il fatto che il campo elettrico generato da una sfera carica -sia conduttrice che isolante-

è uguale al campo che genererebbe una carica puntiforme Q posta nel centro della sfera).

All' esterno della sfera conduttrice $r > a$ il campo è ancora $E(r) = \frac{Q}{4\pi r^2 \epsilon_0}$.

Ancora sui conduttori: potenziale, campo, induzione

(a) Notiamo che il concetto di potenziale nel caso del cariche elettriche è molto importante, ed è questa l' unica differenza nella analogia con il campo gravitazionale. Il potenziale gravitazionale (gh, nel caso di un corpo a quota h sulla superficie della Terra) non è così usato perchè viene a mancare il concetto di "conduttore". Nel caso del campo elettrico, nei conduttori le cariche possono essere in moto e perchè non lo siano dobbiamo avere a che fare con "superfici equipotenziali". Il potenziale inoltre si può "trasportare": se attacco due fili fra 2 morsetti di una batteria che sono ad una certa d.d.p. (differenza di potenziale), posso trasportare questa stessa d.d.p. dove voglio .... Vedremo fra poche lezioni il concetto di corrente elettrica (variazione di carica nel tempo, ossia movimento di cariche elettriche).

(b) Ricordiamo ancora che il campo elettrico è un campo conservativo.

(c) Calcolo del potenziale su una sfera conduttrice di raggio a. Si trova: $V(a) = \frac{Q}{(4\pi\,\epsilon_0\,a)}$, con $V(\infty) = 0$. Disegniamo il campo e il potenziale. Il potenziale è costante dappertutto sul conduttore e decresce come $1/r$ all' esterno. Il campo è nullo all' interno, costante sulla superficie (vedi il valore scritto sopra) e decresce come $1/r^2$ all' esterno.

(d) La distribuzione delle cariche deve essere tale che la superficie sia "equipotenziale" (ossia non ci siano variazioni di potenziale da un punto all' altro). Come conseguenza si ha che si avrà una σ maggiore laddove il raggio di curvatura è più piccolo. Vedi l' espressione del potenziale sulla sfera conduttrice carica: funzione della carica e del raggio, ossia della carica e della geometria del conduttore. Faremo un esempio connettendo fra loro due sfere conduttrici carcihe di raggio diverso.

(e) Induzione e induzione completa. Esempio di una sfera carica (isolante o conduttrice) circondata da una corona sferica conduttrice scarica. Vediamo come si distribuiscono le cariche, per l' induzione.

Esercitazione

Svolto esercizio su Gauss e induzione (pag. 708 n. 59 Serway) su geometrie sferiche: calcolo del campo elettrico nel caso di una sfera isolante di raggio r_1 e densità di carica uniforme ρ, è concentrica ad una sfera cava conduttrice di raggi r_2, r_3. Calcolare $\vec{E}$ per r fra 0 e infinito. Grafico del campo elettrico nei 2 casi in cui la sferetta interna sia isolante. Notiamo che nel caso in cui sia essa sia conduttrice, ovviamente, l' unica differenza la si ha per $r < r_1$.

20. **Ottava settimana: da Lu 20 aprile 87-93**

Se due conduttori vengono portati a contatto la carica si ridistribuisce in modo che i due si portino allo stesso potenziale. Notiamo che **la carica è una gran-**

dezza che si conserva. Dunque se i 2 conduttori hanno la stessa geometria e dimensione (es. 2 sfere uguali o 2 cariche puntiformi) la carica complessiva, somma delle 2 di partenza, si distribuirà in parti uguali sui 2 conduttori. Se la geometria e/o le dimensioni sono diverse ovviamente no, sarà solo il potenziale ad essere lo stesso (e la carica totale= alla somma delle cariche di prima).

Riprendiamo il punto "come si distribuiscono le cariche sulla superficie del conduttore" ? La loro distribuzione deve essere tale che la superficie sia "equipotenziale" (ossia non ci siano variazioni di potenziale da un punto all' altro, già detto). Come conseguenza si ha che si avrà una σ maggiore laddove il raggio di curvatura è più piccolo. Ora lo dimostriamo, ma prima notiamo che, da questo e dal teorema di Coulomb, segue che il campo elettrico è maggiore sulle punte.
Prendiamo 2 sfere conduttrici cariche, con raggi $r_1 > r_2$ (distanti in modo che il campo di una non influenzi quello dell' altra). siano Q_a e Q_b le loro cariche all' inizio. Importante: in un conduttore sferico la carica si distribuisce in modo uniforme. I potenziali sulle 2 sfere saranno: $V_1 = \frac{Q_a}{(4\pi\,\epsilon_0\,r_1)}$ e $V_2 = \frac{Q_b}{(4\pi\,\epsilon_0\,r_2)}$. Se ora le collego con un cavo (lungo, per il motivo detto sopra), formeranno un unico conduttore e dunque si portano allo stesso potenziale. Le cariche elettriche si devono ridistribuire sulla superficie del nuovo conduttore (trascuriamo il cavo). Inanzitutto la conservazione della carica elettrica ci dice che: $Q_a + Q_b = Q_1 + Q_2$, dove Q_1 e Q_2 sono le loro cariche sulle due sfere dopo la connessione. Possiamo scrivere: $\frac{Q_1}{(4\pi\,\epsilon_0\,r_1)} = \frac{Q_2}{(4\pi\,\epsilon_0\,r_2)}$, ossia $\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{r_1}{r_2}$, ossia la carica totale sulla sfera più grande è maggiore. Ma la densità di carica ? Dobbiamo calcolare $\frac{\sigma_1}{\sigma_2}$, dove $\sigma_{1,2} = \frac{Q_{1,2}}{4\pi r_{1,2}^2}$. Combinando le equazioni scritte si ha che: $\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{Q_1\,r_2^2}{Q_2\,r_1^2}$ ossia $\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{r_2}{r_1}$, che è quello che volevamo dimostrare: la densità di carica, e di conseguenza il campo, è maggiore dove il raggio (di curvatura, in generle) è minore.

Capacità di un conduttore $C = Q/V$, si misura in farad. Ricordiamo l' analogia già fatta con la capacità termica. Capacità di una sfera conduttrice carica: $C = 4\pi\epsilon_0 R$, dove R è il rqggio della sfera.

Notiamo che $C = Q/V$, ma alla fine non dipende dal valore di Q e di V,ma solo dalla geometria e dal materiale con cui è fatta (vedremo i dielettrici). Le capacità sono "componenti elettronici" che si comprano (es. C=1nF, C=5 pF...)

(a) **Condensatori e capacità di un condensatore**

(b) Capacità di un condensatore piano, $C = \epsilon_0 S/d$. Aumenta con la superficie delle armature, S, e diminuisce all' aumentare della distanza fra esse, d. capacità di un condensatore cilindrico, con i raggi dei cilindri molto minori della lunghezza $r_1, r_2 << l$. $C = 2\pi\epsilon_0/ln(r_2/r_1)$
Notiamo che nel condensatore piano il campo elettrico è uniforme, ortogonale alle armature e diretto dalla armatura positiva verso la negativa. Se

la distanza fra le 2 armature è δ, si ha che la differenza di potenziale fra le armature è $V_p - V_m = E\,\delta$, $Q = \sigma\,S$, se S è la superficie di una armatura, ed $E = \sigma/\epsilon_0$. Il potenziale cresce linearmente dall' armatura negativa verso la positiva, dunque, ad una distanza generica x^* dalla armatura negativa vale $V = E\,x^*$.

(c) Energia elettrostatica immaganizzata in un condensatore. Dal lavoro elementare $V dq = \frac{q dq}{C}$ *fatto sul sistema* per portare la carica dq sul condensatore, integrando poi per trovare il lavoro complessivo, ossia l' energia elettrostatica immagazzinata nel sistema, da 0 a Q;

(d) Densità di energia elettrostatica $w = E_p/volume$ J/m^3. Lo dimostriamo per il condensatore piano, ma il risultato vale sempre. La densità di energia elettrostatica è sempre $w = \frac{\epsilon_0\,E_0^2}{2}$ (nel vuoto).

(e) Condensatori in serie e in parallelo. Calcolo della capacità "equivalente".
In serie: la carica Q sulle armature dei condensatori è la stessa.
In parallelo: la d.d.p. V fra le armature dei condensatori è la stessa.

Dielettrici, cenni Sono isolanti, che modificano il valore del campo elettrico. Campo in un dielettrico, confrontato con il campo E_0 nel vuoto: $E_d = E_0/\epsilon_r$. Il campo diminuisce per la presenza del dielettrico (le molecole del dielettrico si polarizzano, formano dei dipoli il cui campo si oppone al campo E_0). ϵ_r, costante dielettrica del materiale, è sempre maggiore di 1. È adimensionale. La capacità se fra le 2 armature c' è un dielettrico aumenta $C_d = \epsilon_0\epsilon_r C_0$.

Dunque, se c' è un dielettrico dobbiamo sostituire ϵ_0 con $\epsilon = \epsilon_0\,\epsilon_r$. Esempio della velocità della luce nel vuoto e in un mezzo: $v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r\,\mu_r}} \approx \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}}$.

Esercitazione

(a) Es. di esonero sui condensatori: un condensatore $C_1 = 150$ pF che si trova a $\Delta V_i = 285$ V, viene messo in parallelo ad un altro condensatore $C_2 = 250$ pF inizialmente scarico. Calcolare ΔV finale e la carica su entrambi i condensatori. Sol:
La carica si conserva, dunque $Q_f = Q_1 + Q_2 = Q_i$, con $Q_i = C_1\,\Delta V_i = 42.7$ nC. Inoltre $C_{eq} = C_1 + C_2 = 400$ pF; dunque $V_f = Q_f/C_{eq} = 107$ V. La carica su ciascun condensatore vale: $Q_{1f} = C_1\Delta V_f = 16$ nC; $Q_{2f} = C_2\Delta V_f$ $= 26.7$ nC;

(b) Dettato es. di esonero sui condensatori: condensatore di $C_1 = 2\ \mu$F viene collegato ad una batteria di 12 V e poi scollegato. Se si collega un secondo condensatore C_2 inizialmente scarico in parallelo al primo si trova che la d.d.p. scende a 4 V. Trovare C_2.
Sempre in questa configurazione, nel primo condensatore si inserisce un dielettrico con $\epsilon_r = 2$. Trovare la nuova d.d.p. ai capi dei condensatori. Sol numerica: $C_2 = 4\mu F$. $V_f = 3$ V.

Esercitazione, elettrostatica e conduttori:

(a) Esercizio n. 41 pag. 706 Serway: Lamina quadrata di rame (ossia, di materiale conduttore) di lato l=0.5 m è in un campo elettrico uniforme $E = 80$ kN/C, perpendicolare alla lamina (ossia, se la lamina buca il piano del foglio, il campo è parallelo al piano del foglio). Determinare: 1) σ su ogni faccia della lamina; 2) la carica q totale su ogni faccia della lamina. Sol:
1) Il campo sulla superficie del conduttore deve essere in modulo pari a $E = \sigma/\epsilon_0$, dunque la densità di carica che viene indotta su ciascuna superficie del conduttore deve essere $\sigma = E\ \epsilon_0 = 80 \times 10^3 \times 8.85 \times 10^{-12} = 7.1 \times 10^{-7}$ C/m^2. Positiva da una parte e negativa dall' altra.
2) Il modulo della carica elettrica è $q = \sigma\ l^2 \simeq 175$ nC.
Notiamo che, data una lastra conduttrice in un campo elettrico esterno $\vec{E}$, si ha che sulla superficie della lastra si producono cariche indotte tali da creare all' interno del conduttore un campo elettrico complessivo nullo.

(b) Svolto esercizio: sfera conduttrice di raggio r_1=5 cm e $q_1 = 1\ \mu$ C, è concentrica ad una sfera cava conduttrice di raggi r_2=10 cm e r_3=15 cm, carica con $q_2 = 10\ \mu$C, Calcolare σ, densità di carica, sulla superficie 2 (sup. interna della corona sferica) e la d.d.p. fra la superficie 1 e la superficie 2. Calcolare il campo per r maggiore di r_3. Sol:
$\sigma = \frac{-q_1}{4\pi r_2^2}$=- 8 $\mu C/m^2$.
$V_2 - V_1 = k_0 q_1 \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}$= -90kV (ossia V_1 è maggiore di V_2).
$E = k_0 \frac{q_1+q_2}{r^2}$, per r maggiore di r_3.

(c) Esercizio esonero + recupero 5/06/2002: Un elettrone entra fra le armature di un condensatore piano, a metà distanza fra le armature, con velocità iniziale $v_i = 10^6$ m/s, parallela alle armature. Urta una armatura (dire quale) a distanza x_0=6 cm dal bordo. La distanza fra le armature $d = 10$ cm. La carica dell' elettrone è $e = -1.6\, 10^{-19}$ C e la sua massa $m_e = 9.1\, 10^{-31}$ kg. Calcolare la d.d.p. fra le armature e l' energia cinetica dell' elettrone nell' istante dell' urto.
Sol: Prendendo l' asse x parallelo alle armature del condensatore e l' asse y ortogonale, abbiamo che l' el. segue un moto rettilineo uniforme su x e uniform. accel. su y, con accelerazione in modulo $|a| = |e|\ E/m$, negativa. L' el. viene attirato verso l' armatura positiva (la forza sull' elettrone ha verso opposto al campo). Dunque al tempo $t^* = x_0/v_i = 2 \times 10^{-7}$ s l' elettrone urta l' armatura. Al tempo t^* su y l' elettrone è a quota 0, dunque $y = 0 = \frac{d}{2} - \frac{1}{2}|a|t^{*2}$, da cui si ricava $|a| = \frac{d}{t^{*2}} = 2.5 \times 10^{12}$ m/s^2. Si ricava poi il campo $E = (m_e\, a)/e = 14.2$ V/m; la d.d.p. $\Delta V = Ed = 1.42$ V.
L' energia dell' elettrone, elettrostatica + cinetica si conserva (il campo elettrico è un campo conservativo). Dunque ricaviamo la velocità finale dalla relazione $\frac{1}{2}m_e v_i^2 - |e|\frac{\Delta V}{2} = \frac{1}{2}m_e v_f^2 - |e|\Delta V$.

Svolti esercizi dell' esonero 22/05/09 Svolti tutti quelli che siamo in grado di fare al momento. Trovate testi e soluzioni alle mie pag. web, a.a. 2007/2008.

21. **Proposta di esercizi**

(a) **Es. di esame 3 luglio 2006 CTF**:
Un uomo di 60 kg corre a velocità v=3.8 m/s e salta su una slitta di massa 12 kg, inizialmente ferma. La slitta con l' uomo sopra si ferma dopo aver percorso 30 m sulla neve. Si calcoli: a) il coeff. di attrito dinamico slitta-neve. b) il lavoro compiuto dalle forze di attrito nei primi 20 m di percorso.

Dati: M= 60 kg; m= 12 kg; v=3.8 m/s, s= 20 m
Soluzione, traccia:
"Urto" fra uomo e slitta anelastico. Cons. quantità di moto. Calcolo la vel. v' con la quale il sistema uomo-slitta parte. $Mv = (m + M)v'$. Viene $v' = 3.17$ m/s. Il lavoro delle forze di attrito è $L_{fa} = \mu_D\,(m + M)\,g\,s$ =240.67 J.

(b) **Es. di esame 3 luglio 2006 CTF**:
3 kg di ghiaccio, inizialmente a 0 ^oC, vengono fatti liquefare, poi riscaldare alla temperatura di 100 ^oC e infine fatti evaporare. Conoscendo il calore latente ghiaccio-acqua ($\lambda_{fus} = 3.35 \times 10^5$ J/kg) e acqua-vapore ($\lambda_{ev} = 22.6 \times 10^5$ J/kg) si calcolino: a) la variazione di entropia del ghiaccio nella liquefazione; b) la variazione di entropia dell' acqua nel riscaldamento a 100 ^oC; c) la variazione di entropia dell' acqua nella vaporizzazione.
Dati: $m_G = 3$ kg, $T_i = 273.15$ K, $T_f = 373.15$ K. $\Delta S_{ghiaccio} = \frac{m_G \lambda_{liq}}{T_i} =$ 3679 J/K;
$\Delta S_{acqua} = m_G\, c_a \ln \frac{T_f}{T_i} = 3912$ J/K; (c_a cal. spec. acqua)
$\Delta S_{vapore} = \frac{m_G \lambda_{ev}}{T_f} = 1.817\ 10^4$ J/K ..ma verificate;
(Sol: 3679 J/K , 3912 J/K, 1817 J/K ;)

(c) **Es. di esame 3 luglio 2006 Farmacia**:
Un blocco di massa m_1= 2 kg viene lanciato su un piano orizzontale liscio con velocità v_1= 4.5 m/s da una molla inizialmente compressa di x= 20 cm. Successivamente il blocco urta un altro blocco di massa $m_2 = 2\ m_1$. Dopo l' urto i 2 blocchi rimangono attaccati e scivolano su un piano orizzontale scabro. Si fermano dopo aver percorso 2 m. Calcolare: a) la costante elastica della molla; b) la velocità dei due blocchi dopo l' urto; c) il coeff. di attrito dinamico fra i blocchi e il piano scabro.
(Sol: K=1012.5 N/m ; v=1.5 m/s;0.057)

(d) **Es. di esame 2006 Farmacia**:
Una sfera di materiale isolante e raggio $R = 10$ cm è carica con carica complessiva Q_x, uniformemente distribuita. Sapendo che la forza con la quale la sfera attrae una carica puntiforme q= -1 μC, posta a distanza d=2 m dal centro della sfera, è, in modulo, pari a $F_a = 4.5\,10^{-3}$ N, determinare: a) il valore, con segno, della carica della sfera Q_x b) il valore del campo elettrico, in modulo, direzione e verso, che la sfera produce a distanza $r = 5$

cm dal suo centro $\vec{E}$.
Supponendo ora che la stessa sfera sia conduttrice, ed eserciti la stessa forza sulla carica puntiforme (ignorando effetti di induzione di carica), rispondere di nuovo alle domande precedenti: c) il valore, con segno, della carica della sfera conduttrice Q_c d) il valore del campo elettrico, in modulo, direzione e verso, che la sfera produce a distanza $r = 5$ cm dal suo centro $\vec{E}_c$.
a) La forza su q è attrattiva, dunque la carica Q_x deve positiva. La forza che la sfera di carica Q_x esercita su una carica q a distanza d dal centro della sfera è data, in modulo, da: $F = \frac{k_0\, Q_x\, q}{d^2} = 4.5$ mN, con $k_0 = 1/(4\pi\epsilon_0) = 9.1 \cdot 10^9$ m/F. Si ha: $Q_x = \frac{F\, d^2}{k_0\, |q|} = \frac{4.5 \cdot 10^{-3} \cdot 2^2}{9.1 \cdot 10^9 \cdot 10^{-6}} = 1.98 \mu$C.
b) La carica è distribuita uniformemente sul volume della sfera. Dunque, per il teorema di Gauss, ho che il modulo del campo, a distanza $r \leq R$ dal centro della sfera, vale $E_r = k_0\, Q_r/r^2$, dove $Q_r = Q_x\, r^3/R^3 = 0.25\, \mu$C è la carica contenuta nel volume V_r. Sostituendo: $E_r = k_0\, Q_x \frac{r^3}{R^3} \frac{1}{r^2} = k_0\, Q_x \frac{r}{R^3} = 9.1 \cdot 10^9 \cdot 1.98 \cdot 10^{-6} \cdot 0.05/0.1^3 = 9 \cdot 10^5$ N/C. Il campo è radiale e diretto verso l' esterno della sfera.
c) La risposta è la stessa del caso a), perchè il campo, e dunque la forza, all' esterno della sfera non dipendono da come la carica è distribuita sulla sfera, ma solo dal valore della carica stessa (vd. teorema di Gauss).
d) Il campo è nullo ovunque all' interno del conduttore.

(Sol: $Q_x = 1.98 \mu$C ;$\vec{E} = 9 \cdot 10^5$ N/C; $Q_c = 1.98 \mu$C ;$\vec{E}_c = 0$ N/C)

(e) Un condensatore piano $C_1 = 1$ pF è carico a Q= 4 μC. La distanza fra le armature è d=1 mm. Si aumenta la distanza fra le armature, portandola a $2\, d$. Calcolare la variazione di energia immaganizzata nel condensatore, il valore finale di energia immagazzinata e il valore finale del potenziale ai capi del condensatore. Sol:
$C_1 = \epsilon_0\, \frac{S}{d}$, dunque $V_1 = \frac{Q}{C_1}$. $E_{p1} = \frac{1}{2} C_1 V_1^2$.
Poi: $C_2 = C_1/2$. $V_2 = \frac{Q}{C_2} = 2\ V_1$, $E_{p2} = 2\ E_{p1}$.

La corrente elettrica

(a) Moto nei conduttori, generalità.
Non fatto a loezione, ma interessante da sapere: calcolo del numero di elettroni di conduzione per unità di volume, supponendo un el. di conduzione per atomo, nel rame (densità=8.9 g/cm^3, peso molecolare PM=63.5 g/mol. Si calcola prima la massa di un atomo, $m_a = PM/N_a \simeq 10^{-25}$ kg e poi il numero di atomi/V è dato da $\rho/m_a \simeq 8\,10^{28}$ atomi/m^3

(b) Densità di corrente $i = \frac{dq}{dt}$, ampere. Verso della corrente (moto dei portatori positivi, dal potenziale più alto verso il più basso). La corrente è uno scalare.

(c) Densità di corrente $\vec{J}$. Sua relazione con l' intensità di corrente i.

(d) Conservazione della carica elettrica: flusso di J attraverso una superficie chiusa è uguale a zero.

(e) Modello della conduzione elettrica. Urti. Confronto e significato fra $v_T \simeq 10^5$ m/s, $v_D \simeq 10^{-6}$ m/s (vel. di agitazione termica e vel. dei portatori di carica). $\vec{v_D} \simeq e\,\vec{E}\,\tau/m$ m/s, dove τ=tempo medio fra 2 urti è dell' ordine di 10^{-14} s.

(f) Prima e seconda legge di Ohm. Resistenza R=$\rho\, l/S$ e suo significato. Resistività ρ. Ohm. Range di valori della resistività (10^{-8} nei buoni conduttori, 10^{17} negli isolanti, 10^5 nella pelle umana). Dipende dalla temperatura.

(g) Cenno ai superconduttori: è possibile fare una circolare una corrente senza la spinta di una forza elettromottrice.

Esercitazione:

(a) Provate a fare questo semplice conto, il cui risultato abbiamo discusso a lezione. Data una corrente i=10 A che scorre in un conduttore di sezione A=10^{-4} m^2, calcolare la velocità con cui si muovono i portatori di carica. Troverete un valore bassissimo: per percorrere un metro un elettrone ci mette, rozzamente, 40 ore..considerazioni sul significato di questa velocità rispetto alla velocità con la quale viaggia l' "informazione". Sol:
$v_D = \frac{J}{Nq}$ (N= numero di portatori di carica per unità di volume). $J = \frac{i}{S} = 10^5$ A/m^2. Viene $v_D \approx 7 \times 10^{-7}$ m/s.

22. **Nona settimana: da Ma 28 aprile a Gi 30, lezione 94-96**

Ancora su corrente elettrica e circuiti:

(a) **Generatore ideale e reale di tensione**. Resistenza interna. Un generatore di tensione è caratterizzato dalla f.e.m. (d.d.p. a circuito aperto fra i morsetti) e dalla resistenza interna. Generatore ideale di tensione: V(R) costante, indipendentemente dal valore del carico R e dunque della corrente erogata dal generatore. Generatore reale. Ancora sul partitore di tensione.

(b) **Legge di (o effetto) Joule**. Energia potenziale persa quando una corrente percorre una resistenza, che va in riscaldamento.

(c) **Concetto di forza elettromotrice** i portatori di carica + vanno dal potenziale più alto verso il più basso e nel percorso perdono energia (vd. legge e effetto Joule). Arrivati al morsetto negativo del circuito hanno bisogno di una forza che li riporti verso il potenziale più alto. Questa forza non può essere data dal campo elettrico, perchè va nel verso opposto. Esattamente come una sciatore che, partito dalla sommità di una pista scende giù e,per tornare su, ha bisogno di un impianto di risalita. Il lavoro necessario a portare la carica dal potenziale - verso il + lo fa il campo elettromotore. La d.d.p. fra i morsetti della batteria si chiama f.e.m.
Campo elettrico (circuitazione nulla, conservativo) e campo elettromotore (circuitazione non nulla, non conservativo). Legge di Ohm in forma locale generalizzata ad un circuito chiuso con generatore.

(d) **Leggi di Kirchoff** per i nodi di un circuito e per le maglie. La prima segue dalla conservazione della carica elettrica, la seconda dalla legge di Ohm generalizzata.

(e) forma locale della legge di Ohm: relazione fra $\vec{E}$ e $\vec{J}$. Resistività e conducibilità.

(f) Resistenze in serie e in parallelo. Resistenza equivalente.

(g) Partitore di tensione e di corrente

Esercitazione sui circuiti

(a) Es. dello scritto 21/02/97: fornello elettrico riscalda 2 l di acqua che passano in 5 min da 20^{o}C a T_{eboll}. La d.d.p. ai capi del fornello è 200 V. 1kWh di potenza elettrica costa 0.15 euro. Calcolare: la potenza W consumata; il costo; la resistenza del fornello ($R = V^2/W$); la corrente che passa nella resistenza ($V = Ri$). Sol, traccia : $Q = m_a c_a \Delta T$= 160 kcal=670 kJ. Tempo in secondi t=5 $\times$ 60= 300 s Potenza W = Q/t = 2.23 kW, con t=300 s; 1 kwattora=3.6 $\times$ 10^6 J (kwattora espresso in joule). Costo complessivo=$\frac{Q\ 0.15}{3.6\ 10^6}$ = 0.028 euro; resistenza del fornello R=$\frac{200\ 200}{2.23\ 10^3}$ = 18 Ω;
Non sottovalutate questo tipo di esercizi !! Fateli !!

(b) Es. dello scritto CTF del 29/09/2006: un elettricista dispone di 3 resistenze da 4 Ω ciascuna e di una batteria da 24 V. La res. interna della batteria è trascurabile. L' elettricista collega le tre resistenze in tre modi diversi (ce ne sono 4). Per ciascun modo: a) disegnare il circuito; b) calcolare la corrente totale erogata dalla batteria; c) calcolare la potenza totale dissipata.
Abbiamo disegnato tutte le 4 configurazioni e fatti i conti. In tutti i casi va calcolata la R_{eq}. Poi: $i_{tot} = \frac{V}{R_{eq}}$; $P_{tot} = \frac{V^2}{R_{eq}}$;
La situazione con tutte le resistenza in parallelo è quella che ha la massima dissipazione di potenza (432 W); quella con tutte le resistenze in serie ha

la minima dissipazione di potenza (48 W). Una resistenza in serie e due in parallelo dà 96 W; Due resistenze in serie e una in parallelo alle due dà ... calcolatelo;

(c) Es. di esonero del 5/06/2002: 2 lampade elettriche di 110 V hanno resistenze R_1 =240 Ω e R_2 =360 Ω. a) Quale è la più luminosa ? b)Calcolare il rapporto fra le potenze assorbite dalle 2. c) Calcolare la potenza assorbita più luminosa se sono connesse in serie o in parallelo. Sol:
a) Poichè P=V^2/R la più luminosa è R_1, ossia la più piccola. b) $P_1/P_2 = (V^2/R_1)\,/\,(V^2/R_2) = R_2/R_1 = 1.5$ c) se sono connesse in parallelo V non cambia e dunque P è identica a prima $P = V^2/R_1 = 50.4$ W, se sono in serie invece nel circuito circola $i = V/(R_1 + R_2)$ e $P = R_1\, i^2 = 8.1$ W.

(d) Un elettricista ha a disposizione 3 resistenze da 1 Ω, 2 Ω, 3 Ω. Deve collegarle con una pila da 12 V e r=1.45 Ω in modo da massimizzare la potenza dissipata sulle resistenze. Come le collega fra loro ? Quanto vale la potenza dissipata ?
Sol: La potenza è V^2/R_T, dunque massimizzo la potenza se le metto in parallelo: $R_p = 0.55\,\Omega$ Ottengo $R_T = r + R_p = 2\,\Omega$ e $P = 12^2/2 = 72$ W.
Calcolate anche: la corrente e la potenza dissipata se le tre resistenze sono in serie; nella configurazione parallelo calcolate la corrente in R_1 (la prima delle tre, verso il generatore), la caduta di tensione su R_1 ($V_1 = R_1\ i_1$) e la potenza dissipata su R_1 ($P_1 = V_1^2/R_1$, ad esempio).

23. **Dalla decima settimana, fino alla fine: da Ma 5 maggio, lezione 97-101; 102-106....da va**

Esercitazione sui circuiti Presi dalla prova di esonero del 26 maggio 2006 (che trovate seguendo dalle mie pagine il link sulla didattica dell' anno 2005-2006).

(a) Una lampadina da 75 W alimentata a 110 V viene collegata in parallelo ad una da 40 W. Determinare: a) la resistenza complessiva del circuito; b) il rapporto delle correnti nelle due resistenze; c) la corrente nel circuito. Sol: Le resistenze si calcolano da $W = V^2/R$, W= nota per ciascuna e V=110 V.
a)$R_1 = 161\,\Omega$;$R_2 = 302\,\Omega$, dunque $R_e = 103.7\,\Omega$ (res. in parallelo). b) $\frac{i_1}{i_2}$ $= \frac{R_2}{R_1}= 1.87$ (partitore di corrente); c) $i_{tot} = V/R_e$.

(b) Circuito con un condensatore C_1 in parallelo a due che sono in serie fra loro. D.d.p. nota (V= 1 V), capacità note $C_1 = 1$ nF, $C_2 = C_3 = 2$ nF Calcolare C_{eq},Q_T e Q_1, Q_2, Q_3 e V_2, V_3

(c) Un elettrone entra fra le armature di un condensatore piano, in prossimità dell' armatura negativa, con velocità iniziale $\vec{v}_i = 2\,10^5$ m/s, parallela alle due armature. Fra le armature del condensatore c' è una d.d.p. V=2 V. L' elettrone impiega un tempo $t^* =$ 1 ns per raggiungere l' armatura positiva. La carica dell' elettrone è $e = -1.6\,10^{-19}$ C e la sua massa $m_e = 9.1\,10^{-31}$ kg. Determinare:
a) la distanza percorsa dall' elettrone nella direzione parallela alle due armature;
b) la variazione di energia cinetica dell' elettrone fra l' istante in cui è entrato nel condensatore e l' istante in cui raggiunge l' armatura positiva, specificando se la sua energia cinetica è aumentata o diminuita
c) la distanza fra le armature del condensatore. Sol:
a) Nella direzione parallela alle armature (asse x ad esempio), l' elettrone prosegue il suo moto rettilineo uniforme. Dunque nel tempo t^* avrà percorso lo spazio $x^* = v_i\, t^* = 2\,10^5\,10^{-9} = 2\,10^{-4}$ m.
b) Si usa il teorema delle forze vive: $L = \Delta E_C$$= e \int_d^0 E\, dy = e \int_d^0 V/d\, dy =$ -eV=$3.2\,10^{-19}$ J positiva. L' energia cinetica dell' elettrone è aumentata.
c) Nella direzione ortogonale alle armature il moto è uniformemente accelerato con $a = e\,E/m_e$, dove $E = V/d$ e d è la distanza incognita da calcolare. L' elettrone parte da quota $y = d$ e si ferma in $y = 0$, con una scelta conveniente degli assi coordinati. Dunque: $y = d + \frac{1}{2}\,a\,t^2$ e dunque $d = \frac{1}{2}\,|a|\,(t^*)^2$. Sostituendo: $d = t^* \sqrt{|e|V/(2m_e)}$=0.42 mm.

Il campo magnetico Generalità sul magnetismo. Magneti permanenti e circuiti percorsi da corrente

(a) Linee di forza del campo magnetico. $\Phi_S(\vec{B}) = 0$ sempre ($\vec{B}$ solenoidale). Da confrontare con $\Phi_S(\vec{E}) = Q/\epsilon_0$. S qui indica una superficie chiusa.

Possiamo dire che questo è il “teorema di Gauss” per il campo magnetico. **Importante:** Queste equazioni, sono 2 delle quattro equazioni di Maxwell, equazioni fondamentali che racchiudono le proprietà del campo elettromagnetico. Le altre due riguadano la circuitazione dei due campi elettrico e magnetico. Le scriveremo e discuteremo qualitativamente.

(b) Linee di forza di $\vec{B}$ per un filo indefinito percorso da corrente. Disegnate sia nel caso in cui il filo sia sul piano della lavagna che nel caso in cui il filo buchi il piano della lavagna. Convenzione per il verso di percorrenza delle linee di forza. .

(c) Prodotto vettoriale, di solito indicato con $\times$ o con $\wedge$. A differenza del prodotto scalare, il risultato è un vettore).
Regola della mano destra e della mano sinistra (dovete sempre costruire una terna antioraria) Proprietà del prodotto vettoriale: dato $\vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{c}$:
   - $\vec{c}$ è ortogonale sia ad $\vec{a}$ che a $\vec{b}$, e quindi ortogonale al piano definito da $\vec{a}$ e $\vec{b}$;
   - il modulo di $\vec{c}$ è dato dal prodotto dei moduli di $\vec{a}$ e $\vec{b}$ per il seno dell'angolo fra loro compreso: $c = a \cdot b \cdot \sin\theta$;
   - il verso è tale che, se $\vec{a}$ e $\vec{b}$ sono diretti rispettivamente lungo i versori $\hat{x}$ e $\hat{y}$ (ovvero $\hat{i}$ e $\hat{j}$), $\vec{c}$ è diretto lungo $\hat{z}$ (ovvero $\hat{k}$);
   - il prodotto vettoriale anticommuta: $\vec{b} \wedge \vec{a} = -\vec{a} \wedge \vec{b}$ (quindi bisogna fare attenzione all'ordine di $\vec{v}$ e $\vec{B}$ nell'espressione della forza).
   - NON fatto a lezione, ma può esservi utile: note le componenti di $\vec{a}$ e di $\vec{b}$ le componenti di $\vec{c}$ sono ottenute dal determinante di

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \tag{191}$$

ovvero

$$\vec{c} = (a_y b_z - a_z b_y) \cdot \hat{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \cdot \hat{j} + (a_x b_y - a_y b_z) \cdot \hat{k}. \tag{192}$$

(d) Convenzione per indicare vettori uscenti o entranti dal piano del disegno.

(e) Forza esercitata da un campo magnetico su un circuito percorso da corrente $\vec{F} = i\vec{L} \times \vec{B}$ (seconda formula di Laplace), se il filo è rettilineo, altrimenti si parte da $d\vec{F} = id\vec{L} \times \vec{B}$ e si integra.

(f) Dimensioni e unità di misura di $\vec{B}$. Tesla e gauss. 1 Tesla=10^4 gauss.

(g) Campo magnetico terrestre ≈ 0.2 gauss

(h) Da $\vec{F} = i\vec{L} \times B$ ricaviamo la forza di Lorentz, su una carica in moto in un campo magnetico.

(i) **La forza di Lorentz** dovuta a campi magnetici ($\vec{B}$, Tesla, T) su particelle cariche (carica q) in movimento (velocità $\vec{v}$):

$$\vec{F} = q \cdot \vec{v} \wedge \vec{B} \tag{193}$$

La forza di Lorentz è più complicata di quelle viste finora in quanto dipende da carica, velocità, campo magnetico, direzioni e versi di $\vec{v}$ e $\vec{B}$.

Esempio: moto di una particella carica in campo magnetico $\vec{B}$ uniforme ortogonale a $\vec{v}$. La $\vec{F_L}$ è ortogonale alla traiettoria, dunque produce accelerazione centripeta. La traiettoria piega e la carica percorre una traiettoria circolare di raggio di curvatura $r = mv/(qB)$. $mv^2/r = qvB$.
Periodo e frequenza di ciclotrone. Importante: la frequenza di ciclotrone non dipende nè dalla carica nè dalla velocità della particella, ma solo dal valore del campo magnetico e dalla massa della particella: $\nu_c = qB/(2\pi m)$.

$$F = q\,v\,B\,, \tag{194}$$

costante e sempre ortogonale a $\vec{v}$: $\rightarrow$ moto circolare uniforme, con forza centripeta $q\,v\,B$:

$$m\,\frac{v^2}{R} = q\,v\,B \tag{195}$$

$$R = \frac{m\,v}{q\,B} \tag{196}$$

$$T = \frac{2\pi\,m}{q\,B} \tag{197}$$

Il raggio varia linearmente con v, mentre il periodo (e quindi la frequenza) non dipendono da essa (!): principio del ciclotrone ($\nu = 1/T$ è la 'frequenza di ciclotrone'). Si noti invece la dipendenza del raggio dall'energia cinetica:

$$R = \frac{\sqrt{2\,m\,E_c}}{q\,B} \tag{198}$$

$$E_c = \frac{q^2B^2R^2}{2\,m}\,. \tag{199}$$

Applicazioni pratiche: guardate il numero 6 di "Asimmetrie (INFN)", 2008, scaricabile dal sito www.asimmetrie.it (andate nell' archivio e prendete il numero 6.). Portate in aula alcune copie scaricate della rivista.

- *...se vi interessa un pò di Fisica Fondamentale.. date un' occhiata agli altri numeri. Scoprirete un mondo affascinante*

Esercitazione sulla forza di Lorentz e sul campo magnetico:

(a) Es esonero: "Selettore di velocità": dato il modulo di B, ortogonale ad E, di cui anche è noto il modulo e data una carica con velocità ortogonale sia ad E che a B, trovare il valore di v tale che la carica prosegua il suo moto rettilineo uniforme. $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$, valida in generale se siamo in presenza di entrambi i campi elettrico e magnetico.
Traccia sol: la forza di Lorentz deve essere uguale e contraria a quella

dovuta al campo elettrico. Questo ci dà direzione e verso di B, oltre al suo modulo (fate un disegno chiaro). B sarà ortogonale a v e al campo elettrico In modulo: $qE = qvB$, ossia $v = \frac{E}{B}$.

(b) Es. sulla “lievitazione magnetica”: se la forza su un conduttore percorso da corrente, dovuta ad un campo magnetico esterno è uguale (o maggiore) in modulo ma opposta in verso alla forza di gravità ho che il conduttore si solleva.

Legge di Biot-Savart:: Campo generato da un filo indefinito percorso da corrente. Permeabilità magnetica del vuoto $\mu_0 = 4\pi\,10^{-7}$ henry/m. Trovate le dimensioni, in unità SI, dell' henry. Verificate che henry $/\Omega$ = secondi e che farad $\cdot\, \Omega$ = secondi;

Prima formula di Laplace: Campo generato da un circuito di forma qualsiasi, ottenuto come integrale da $d\vec{B}$

(a) Calcolo del campo magnetico al centro di una spira circolare percorsa da corrente. Il campo è sempre ortogonale al piano della spira. Notiamo che, se la corrente circola antioraria, il campo è uscente. Se oraria, entrante.

(b) Linee di forza di una spira circolare percorsa da corrente. Confronto con le linee di forza del dipolo elettrico. Principio di equivalenza di Ampere.

(c) Forza fra 2 fili rettilinei indefiniti percorsi da corrente. Calcoliamo la forza che uno dei due esercita sull' altro. Notiamo che è attrattiva se le due correnti sono concordi, repulsiva se sono discordi. Definizione di ampere.

(d) Teorema della circuitazione di Ampere. Lo dimostriamo come applicazione del calcolo del campo generato da un filo indefinito percorso da corrente, usando Biot-Savart. Vale sempre, anche se lo abbiamo dimostrato solo in un caso particolare.

(e) Legge di Faraday-Neumann-Lenz Correnti indotte. Legge di Faraday-Neumann-Lenz. Importanza del segno - nella formula: rappresenta la conservazione dell' energia. Esempio: Spira quadrata di lato a e resistenza R che entra con velocità $\vec{v}$ in una regione con campo magnetico ortogonale al piano della spira e uscente dal piano. Calcolo della corrente indotta in modulo e verso. Spiegazione: finchè la spira sta entrando il flusso di B aumenta. Si crea una corrente indotta nella spira, che deve circolare in verso tale da opporsi alla variazione di flusso che l' ha generata. Dunque la corrente indotta dovrà produrre un campo magnetico che fa diminuire il flusso e dunque fa diminuire B. Pertanto il $\vec{B}_{ind}$ sarà entrante nel piano e dunque la corrente indotta nella spira circola in verso orario. Quando la spira è entrata completamente il flusso del campo non varia più e la corrente indotta diventa zero. Quando la spira inizia ad uscire dalla regione dove c' è il campo il flusso di B diminuisce e dunque avviene il contrario di quello che è avvenuto quando entrava: il campo indotto deve sommarsi a quello inducente, dunque deve essere uscente dal piano e la corrente indotta deve circolare in verso antiorario.

(f) Mostrata una torcia basata susl moto di un magnete rispetto ad una bobina (negozio di cinesi verso Piazza Vittorio);

(g) Mostrato l' effetto delle correnti indotte facendo cadere 2 magnetini (quelli del GeoMag) in due tubi di alluminio di sezione diversa, e dalla stessa quota al di fuori dei tubi.

(h) Calcolo del campo del solenoide toroidale (come applicazione del teorema della circuitazione). Le linee di forza di $\vec{B}$ sono circonferenze. Per il calcolo va presa come linea su cui fare la circuitazione proprio una linea di forza (circonferenza di raggio r).

(i) Solenoide rettilineo indefinito. Disegno delle linee di forza del campo $\vec{B}$. Calcolo del campo, ancora utilizzando il teorema della circuitazione. $N_{tot} = n\,L$ è il numero totale di spire, n il numero di spire/lunghezza.

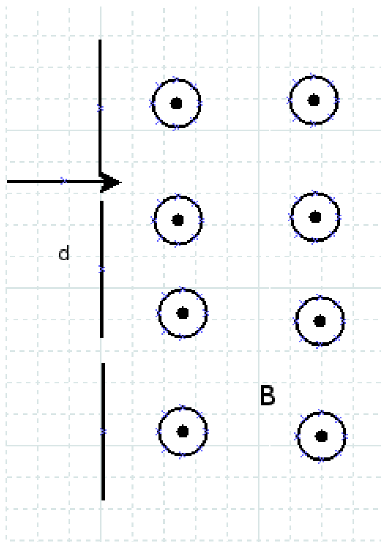
Equazioni di Maxwell

Completiamo le Equazioni di Maxwell Le due equazioni per il flusso le abbiamo già scritte:
$\Phi_S(\vec{E}) = Q/\epsilon_0$;
$\Phi_S(\vec{B}) = 0$.
Sono le equazioni di Gauss.
Le equazioni che riguardano la circuitazione sia di $\vec{E}$ che di $\vec{B}$ le abbiamo anche viste:
$\int_{linea} \vec{E}\,\mathrm{d}l\ = 0$, dove E è il solo campo elettrostatico, conservativo.
$\int_{linea} \vec{B}\,\mathrm{d}l\ = \mu_0 i$.
Dove l' integrale è su una linea chiusa (circuitazione). Ma queste equazioni, valide in situazione stazionaria (campi non variabli nel tempo) vanno generalizzate. E diventano:
$\int_{linea} \vec{E}\,\mathrm{d}l\ = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt}$ (legge di induzione di Faraday-Neumann-Lenz). $\int_{linea} \vec{B}\,\mathrm{d}l\ = \mu_0\, i + \mu_0\epsilon_0 \frac{d\Phi(\vec{E})}{dt}$
(circuitazione di B in presenza di variazioni di flusso di E).
IMPORTANTE: avere capito e tenere bene a mente le 2+2 equazioni di flusso e circuitazione per il campo elettrico e per il campo magnetico.

Esercitazione campo magnetico + riepilogo

(a) Un protone entra attraverso una fenditura in una regione di spazio (vedi figura) dove c' è un campo magnetico uniforme e perpendicolare alla velocità del protone. Il modulo del campo magnetico è $B = 5$ T e la velocità iniziale del protone $v_i = 10^7$ m/s. La massa del protone vale $m_p = 1.67\,10^{-27}$ kg e la carica $e = 1.6\,10^{-19}$ C.

Determinare: a) il raggio di curvatura della traiettoria;
b) a quale distanza dalla fendidura di ingresso deve essere messa una seconda fenditura (vedi figura) affinchè il protone possa uscire fuori ?



c) dopo quanto tempo esce dalla regione dove c' è il campo ? Soluzione: Sul protone agisce la forza di Lorentz, dovuta al campo magnetico. Il campo magnetico piega la traiettoria del protone, facendole assumere una forma semicircolare di raggio r. $\vec{F} = m\vec{a}$ diventa: $ev_iB = m_pv_i^2/r$, da cui
a) $r = m_pv_i/(eB)$= 2.1 cm.
b) Il protone incontrerà di nuovo il piano dove era entrato ad una distanza dalla fenditura pari a $d = 2r$= 4.2 cm.
c) Il tempo impiegato dal protone per ritrovarsi fuori dalla regione dove c' è il campo è il tempo in cui ha percorso il semicerchio di raggio r alla velocità v_i: $t = \pi\, r/v_i$=6.59 ns.

(b) Un protone si muove in un campo magnetico di 0.465 T lungo una traiettoria circolare di raggio 5.2 cm. Calcolare il valore (modulo, dir., verso) di un campo elettrostatico costante da aggiungere in modo che il protone si muova di moto rettilineo uniforme. Sol:
$\vec{F} = (q\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$. Poichè la traiettoria è circolare vuol dire che i due vettori $\vec{v}$ e $\vec{B}$ sono ortogonali. Conosciamo l' equazione che dà il raggio di curvatura r=mv/(qB) e possiamo calcolare la velocità (2.316 10^6 m/s). Il campo elettrico deve essere nella stessa direzione della forza di Lorentz ma in verso opposto. In modulo qE=qvB. Da cui $E = 1.1\,10^6$ V/m.

(c) Un interruttore in cui passa una corrente di 100 A si surriscalda, a causa di un contatto difettoso. Se la d.d.p. tra i capi dell' interruttore è 0.050 V, si calcoli la potenza dissipata in calore e la resistenza dell' interruttore. Sol: $P = V\,i$=0.05*100=5 W. $R = P/i^2$=0.5 mΩ

(d) Una carica puntiforme di valore $q = 2\,10^{-18}$ C e massa $m = 10^{-27}$ kg, viene accelerata da una d.d.p. ΔV. Entra poi, con l' en. cinetica così

acquistata, tra le armature di un condensatore piano, a metà fra i due piani e con velocità parallela alle armature. La distanza fra le armature è $d = 10$ cm. Nel condensatore è presente un campo magnetico uniforme di 20 mT, ortogonale alla velocità della particella ed uscente dal piano del foglio. La particella viene deviata cal campo magnetico ed esce dall' armatura inferiore con velocità ortogonale all' armatura. Trovare:
a) la differenza di potenziale ΔV.
b) la differenza di potenziale che andrebbe applicata ai capi del condensatore tale che la particella non risulti deviata e prosegua in linea retta. Specificare quale armatura deve essere positiva e quale negativa.
Soluzione, traccia: a) Per trovare il ΔV che accelera la particella bisogna inanzitutto notare che il ΔV ci dà l' (en. cinetica della particella)/carica. Ci serve dunque determinare la velocità con cui entra nel condensatore (dove inizialmente c ' è solo il campo magnetico). Poichè la carica esce dal condensatore con velocità ortogonale ad una armatura, percorre all' interno del condensatore un quarto di circonferenza, il cui raggio è, al solito, $r = mv/(qB)$ ed è dunque uguale a $d/2$. Fate un disegno e dovreste capirlo abbastanza facilmente. Da qui ricavo il modulo della velocità $v = qBd/(2m) = 2\,10^6$ m/s, e dunque $\Delta V = 1/2\, m\, v^2/q$=1kV.
b) $\vec{E}$ deve opporsi alla forza di Lorentz, dunque diretto dall' armatura verso cui la particella va verso l' altra. Questa deve essere l' armatura positiva, dunque. In modulo $qE = qvB$, ricavo E e poi $V = E\, d$=4 kV

(e) Trovare il diametro della traiettoria circolare compiuta in uno spettrografo di massa di campo magnetico costante 0.15 T, delle seguenti particelle, tutte accelerate ad una en. cinetica di 1keV: 1) atomo di idrogeno, ionizzato 2) atomo di elio, ionizzato, 3) atomo di elio, doppio ionizzato. Sol: Inanzitutto: atomo di H ionizzato ha carica q=e=1.6×10^{-19} C e massa pari alla massa del protone $m_p = 1.67 \times 10^{-27}$ kg (peso atomico = 1);; atomica di H_e ionizzato ha carica q=e=1.6×10^{-19} C e massa pari a 4 $m_p = 4 \times 1.67 \times 10^{-27}$ kg (peso atomico = 4); atomica di H_e doppio ionizzato ha carica q=2 —e—=$2 \times 1.6 \times 10^{-19}$ C e massa pari a 4 $m_p = 4 \times 1.67 \times 10^{-27}$ kg;
Da $mv^2/r = qvB$ e $E_c = (1/2)mv^2$ si ricava $d = 2\frac{2mE_c}{qB}$, che nei tre casi porta: a) d=6.09 cm; b) d=12.18 cm; c) d=6.09 cm;

(f) Es. scritto CTF del 3/07/2006. Circuito (all' esame dato in figura, qui lo descrivo) costituito da un generatore, una resistenza R_1 in serie al generatore, poi 3 rami in parallelo, uno con resitenza R_2, uno con 2 resistenze in serie fra loro R_3 e R_4, e l' ultimo ramo con resistenza R_5. Le resistenze sono tutte identiche. La tensione del generatore è ΔV= 45 V. La potenza totale erogata è W_e = 58 W. Calcolare:
a) il valore della corrente in R_1; b) il valore di ciascuna resistenza. Sol: a) $i_1 = 1.29$ A ; b) $R = 24.9\ \Omega$.

Notiamo che la corrente che scorre in R_1 è la corrente totale che scorre nel circuito. Dunque un modo semplice di procedere è: $i_1 = \frac{W_e}{\Delta V}$ La resistenza equivalente è $R_{eq} = (7/5)$ R $= \frac{\Delta V}{i_{tot}}$, con $i_{tot} = i_1$.

(g) Due condensatori, di capacità $C_1 = 300$ nF e $C_2 = 500$ nF, sono collegati in parallelo. Sono caricati con una carica totale di Q=1 mC. Determinare: 1) la d.d.p. ai capi dei condensatori; 2) la carica su ciascun condensatore; 3) l' energia elettrostatica totale immagazzinata nel sistema. Sol:
Devo trovare $V = \frac{Q}{C_T}$, con $C_T = C_1 + C_2$. Viene V= 1.25 kV. $Q_1 = V\,C_1 = 3.75 \times 10^{-4}$ C; $Q_2 = V\,C_2 = 6.255 \times 10^{-4}$ C
$E = (1/2) C_T V^2 = 0.625$ J.

(h) Trovare il lavoro fatto per portare 3 cariche uguali, di valore q=1μ C sui vertici di un triangolo equilatero di lato $l = 10$ cm. Ricordiamo che il lavoro fatto dall' esterno per realizzare una configurazione è pari all' energia elettrostatica di quella configurazione. Infatti, il lavoro fatto dal campo è $L = -\Delta E_p = E_p(iniziale) - E_p(finale)$ e il lavoro fatto dall' esterno è $L_{est} = \Delta E_p = E_p(finale) - E_p(iniziale)$. $E_p(iniziale) = 0$ perchè è il valore all' infinito, che per convenzione è preso a 0. Dunque, in questo caso, $L = \Delta E_p = 3\,k_0\,q\,q/l$=0.27 J, dove il 3 ̀dovuto al fatto che ho la somma di 3 termini uguali.
Ovviamente il calcolo lo si può fare direttamente dal lavoro, supponendo inizialmente le 3 cariche all' infinito e non interagenti fra loro. Per portare la prima q_1 sul primo vertice del triangolo il lavoro è nullo, perchè non c'è nessun campo, per portare la seconda q_2 a distanza l dalla prima il lavoro è $L = \int_\infty^l q_2\,E_1\,\mathrm{d}r$, dove $\vec{E}$ è il campo generato da q_1, ossia $\vec{E}_1 = \frac{q_1\,vecr}{4\pi\epsilon_0 r^3}$. Poi, per portare q_3 il lavoro è la somma di due termini $\int_\infty^l q_3\,E_1\,\mathrm{d}r$ e $\int_\infty^l q_3\,E_2\,\mathrm{d}r$.

(i) Un blocchetto di ghiaccio di massa 100 g a 0 ^{o}C è mescolato a 200 g di vapore a 100 ^{o}C. All' equilibrio, quale è la temperatura della miscela ? Si tratta di acqua, ghiaccio o vapore ? Calcolare anche la variazione di entropia. Attenzione, nel calcolo dell' entropia, a come farlo durante il passaggio di stato, dove T è costante, e a come farlo quando il calore viene ceduto o assorbito per variare la temperatura. Sol:
Sia il ghiaccio che il vapore devono fare un passaggio di stato e poi raggiungere la temperatura di equilibrio. Dunque: $Q = -\lambda_{ev} m_v + m_v c_a (T_e - T_{100})$ $+ \lambda_{fus} m_G + m_G c_a (T_e - T_0)$; Il vapore cede calore al ghiaccio, diventando acqua, e il ghiaccio si riscalda e si trasforma in acqua anche lui. Esplicitando rispetto a T_e si ricava T_e=40.3 ^{o}C.
La variazione di entropia ha 4 termini: $\Delta S_{vapore-acqua}$; $\Delta S_{ghiaccio-acqua}$; $\Delta S_{acqua_v\ T_e}$; $\Delta S_{acqua_G\ T_e}$. I primi due termini sono del tipo $\frac{\lambda m}{T}$, i secondi due del tipo $\int_{T_i}^{T_f} m\,c_a\,\frac{dT}{T}$. Attenzione a mettere le temperature in kelvin.

(j) In una trasformazione isobara a $p_0 = 5\,10^5$ Pa, 2 moli di gas perfetto monoatomico raddoppiano il volume. Se T_i=20 ^{o}C si calcoli: 1) la temperatura finale; 2) il lavoro compiuto nella trasformazione 3) la variazione di

entropia. Sol:
$T_f = 2T_i = 586.3$ K; $L = p_0(V_f - V_i)$=4875 J (con $V_f = 2V_i$ e $V_i = \frac{nRT_i}{p_0}$=0.0974 m^3). La var. di entropia è data da: $\Delta S = \int_{T_i}^{T_f} n\, c_p \frac{dT}{T}$= 28.8 J/K.

(k) 2 cariche positive uguali q,poste in $x = a$ e in $x = -a$. Disegnare il potenziale del sistema complessivo, trovarne il minimo e spiegare a che situazione corrisponde. Il potenziale è dato da iperboli equilatere con assi uno in $x = a$ e l' altro in $x = -a$. Il minimo è in x=0 (e viene proprio V=0, ma questo non è importante) e corrisponde alla situazione di equilibrio, ossia una carica qualunque posta nel minimo del potenziale ci resta, poichè la forza agente su di ess è nulla. Abbiamo anche disegnato la forza agente su q_1 posta in x=0. Matematicamente: la derivata prima del potenziale, cambiata di segno, dà il campo e dunque la forza agente su una carica. Se ho un minimo la derivata prima deve essere nulla, ossia il campo deve essere nullo.

(l) Una caldaia ha una potenza termica di 20000 kcal/h. Calcolare quanto vale il flusso massimo di acqua (in litri/minuto) a 50 gradi che essa riesce a fornire se l' acqua entra nella caldaia ad una temperatura di 15 gradi.
La caldaia deve portare, in un minuto, una certa quantità di acqua da T_i =15 gradi a T_f = 50 gradi, utilizzando una potenza P = 20000 kcal/h= 333 kcal/min $P = c_a\,(m_a/minuto)(T_f - T_i)$, da cui $m_a/minuto = \phi_{massa}$= $\frac{P}{c_a(T_f - T_i)}$= $\frac{333\times10^3}{35}$= 9.5 kg/minuto. Per calcolare il flusso in volume dobbiamo dividere per la densità dell' acqua: $\phi_{volume} = \phi_{massa/\rho_{acqua}}$= 9.5 m^3/minuto= 9.5 l/minuto.

(m) Calcolare il campo magnetico all'interno di un filo di sezione circolare percorso da corrente i nota. Sia R il raggio del filo, anch' esso noto.
Sol: si utilizza il teorema della circuitazione. Sia r la distanza dall' asse del filo, dove vado a fare il calcolo. $\int_{linea} \vec{B}\cdot\vec{dl} = \mu_0\, i_r$, dove $i_r = J\,S$, con $J = \frac{i}{\pi\,R^2}$ e $S = \pi\,r^2$. Si ricava: $B\,2\pi r = \mu_0 i_r$, da cui $B = \frac{\mu_0\,i\,r}{2\pi\,R^2}$. Valida per r minore o uguale a R e massima per r=R.

(n) Si deve progettare un solenoide che generi $\vec{B} = 0.314$ T senza che l' intensità di corrente superi 10 A. Il solenoide è lungo 20 cm. Si trovi il numero di spire necessarie.
Sol: $|B| = \mu_0\,n\,i$. $N_T = n\,l$, con l=0.2 m. si trova $n = 24.98\,10^3$ e $N_T = n\,l = 4998$ spire (viene 4997.5, ma approssimo ad un intero..non posso mettere mezza spira..).

(o) Due conduttori sono costituiti da gusci cilindrici coassiali indefiniti, di spessore trascurabile e raggio rispettivamente di r=3 cm e R=5 cm. Sono percorsi da correnti in senso inverso, di i_1=2 A nel conduttore interno e di i_2 =4 A in quello esterno. Si calcoli il campo magnetico (modulo,dir. e verso) alle seguenti distanze dall' asse: 0 cm, 1 cm, 4 cm, 8 cm. Attenzione a specificare bene il verso del campo, entrante o uscente dal piano del foglio,

a seconda di dove è r rispetto all' asse ...: aiuta, per dare correttamente la soluzione, un disegno chiaro. Sol:
Il campo di un cilindro indefinito è analogo a quello del filo rettilineo indefinito (Biot-Savart). Notiamo che le correnti, per come sono i conduttori, scorrono solo sulla superficie. Inoltre vale il principio di sovrapposizione degli effetti. Dunque il campo a distanza dall' asse minore del raggio del primo conduttore non può che essere nullo, ossia $\vec{B}$ =0 per d=0 cm, 1 cm. Per distanze d comprese fra r ed R il contributo è solo dovuto al cilindro interno. Modulo: $B = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi d}$. A d=4 cm si ha $B = 10^{-5}$ T.
Per distanze d maggiori di R il contributo è dovuto ad entrambi i cilindri. Poichè le due correnti circolano in verso opposto i due campi si sottraggono Modulo: $B_1 = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi d}$. $B_2 = \frac{\mu_0 i_2}{2\pi d}$. A d=8 cm si ha $B_1 = 0.5 \times 10^{-5}$ T. $B_2 = -10^{-5}$ T. Dunque $B = B_1 + B_2$
Il campo è ortogonale al piano del filo, il verso va visto con la regola della mano destra, pollice nel verso della corrente e vedo il verso di chiusura del palmo. Se il campo è uno è semplice, se sono due prevale ovviamente quello più intenso.

(p) Un fornello elettrico è alimentato da una batteria che eroga una d.d.p. continua. Il fornello è costituito da una resistenza di 50 Ω e porta ad ebollizione, in 10 min, 2 litri di acqua, inizialmente alla temperatura di 10 ^{o}C. Si calcoli la corrente che passa nella resistenza. Sol:
la quantità di calore che serve è $Q = m_a\ c_a\ (T_f - T_i)$, con $m_a = 2$ kg, c_a=4186 J/(kg K), $T_f = 100\,^o$C,$T_i = 10\,^o$C. Si ha $Q = 753.48$ kJ. La potenza necessaria è dunque $W = Q/t$, con t=10 × 60= 600 s. Viene $W = 1.26$ kW. Per calcolare la corrente si usa $W = R i^2$, $i = \sqrt{W/R}$=5.01 A.

(q) Una macchina di Carnot assorbe in un ciclo un calore di 2000 J dalla sorgente a temperatura più alta e compie un lavoro di 1500 J. Se la temperatura della sorgente più fredda è 200 K, calcolare la temperatura della sorgente calda.
Sol: Q_C =2000 J, L=$Q_C - |Q_F|$=1500 J. Dunque Q_F=500 J. Ricordando che, essendo una macchina ideale, possiamo scrivere $Q_C/Q_F = T_C/T_F$, troviamo $T_C = 800$ K.