Fisica per Farmacia–Pia Astone. PARTE I

(A.A. 2010/2011, Canale C (studenti P-Z))

1. $\boxed{\textbf{Prima settimana (Lezioni da martedi' 1 marzo) Lezioni 1-6}}$

   Introduzione al corso e informazioni varie (libri di testo, esoneri, esami).
   Esame: compito scritto e un orale.
   Non più esoneri. Non necessaria la presenza. Ma tenete presente che è un corso che sarebbe bene seguire, studiare con continuità. E cercare di fare l' esame subito. Lo scritto sono 3 esercizi, normalizzati normalmente in trentesimi.
   Lo scritto di giugno sarà organizzato come i vecchi esoneri: circa 8-10 esercizi brevi, probabilmente normalizzati in più di 30 (ossia non dovete farli tutti necessariamente..) Voto minimo per superare gli scritti: 15. Allo scritto di giugno potrete portare solo la calcolatrice e un vostro formulario; agli altri scritti potrete portare anche libri ed appunti.
   No cellulare, neanche come calcolatrice !!!
   Appelli: scritto e orale a giugno, scritto e orale a luglio, scritto e orale a settembre, orale a novembre, scritto e orale a gennaio e febbraio, orale ad aprile.

   Lo scritto vale tre sessioni (scritto di luglio 2010 → febbraio 2011)
   Informazioni relative al corso nel mio sito
   web www.roma1.infn.it/rog/astone/didattica/ e sul server di farmacia (**frm.uniroma1.it**).
   Testo Prendete il testo:
   Luci, Ferrari, Mariani, Pelissetto, "Fisica", vol. 1 e vol. II Idelson, Gnocchi
   Se avete già uno dei seguenti va comunque bene: Jewett,Serway "Principi di Fisica" 4^a ed., Edises
   Halliday-Resnick "Fondamenti di Fisica", Ambrosiana
   Per esercizi è molto utile:
   Serway et al., "Guida alla soluzione di problemi da Principi di Fisica", Edises
   Dispense:
   Es. d' esame di fisica (farmacia e CTF), Proff. Bagnaia e Luci (disponibili ai chioschi gialli)
   Un utile supporto di matematica:
   Davidson "Metodi matematici per un corso introduttivo di fisica"

   La **matematica** che vi deve essere nota davvero bene :
   algebra di base; "scioltezza ed abilit'́ nei passaggi e semplificazioni algebriche, soluzione di equazioni algebriche del primo e secondo ordine, sistemi di equazioni

algebriche. Formule di geometria (perimetro, area, volume di figure e superfici geometriche). Trigonometria.
Notazione scientifica.
Uso della **vostra** calcolatrice.

. . . **Iniziamo** . . .
La misura in fisica. La fisica è una scienza sperimentale dove il concetto di misura è fondamentale.
Il metodo scientifico. Esempi mostrando palline che rimbalzano (e non . . .).
Prima di fare una misura, dobbiamo avere chiaro a quale domanda vogliamo/dobbiamo rispondere e dobbiamo cercare di individuare le grandezze che entrano in gioco nel problema, quelle che non entrano affatto e quelle che, almeno in prima approssimazione, possano essere trascurate.

Importanza di avere sempre sotto controllo:
le dimensioni delle grandezze fisiche (se ho una equazione le dimensioni a sinistra e a destra del segno di uguale devono essere le stesse);
le unità di misura usate (che siano consistenti fra loro);
le cifre significative con le quali riportare un risultato;
saper calcolare l' ordine di grandezza del risultato.
Unità di misura: $\rightarrow$ SI: m, kg, s; sono quelle che ci serviranno subito.
Oggi il metro è definito come la distanza percorsa dalla luce in una frazione $1/c$ (c=velocità della luce nel vuoto) di secondo. Infatti $s = c \times t$ e ho che $s = 1$ m quando $c \times t$= 1 m, dunque $t = (1/c)$ s.
Unità derivate (ad es. il newton, unità di misura della forza nel S.I., il pascal della pressione). Notiamo che a volte è più conveniente – 'naturale' — usare altre unità di misura. Tipicamente multipli o sottomultipli delle unità di base, o altro, laddove questo "ci semplifichi la vita": km, cm, ora, anno, ns, anno-luce, massa solare $M_0 \simeq 1.99 \times 10^{30}$ kg, atmosfera 1.01×10^5 Pa, etc..).
Importanza di saper calcolare, valutare, sapere, gli "ordini di grandezza" (evitiamo banali errori di calcolo con la calolatrice, se sappiamo all' incirca che cosa dobbiamo aspettarci).
Quanto vale, circa, la massa della Terra ? ($\approx 5.98 \times 10^{24}$ kg)
E quella atomica ? ($\approx 10 \times 10^{-27}$ kg). Se le esprimete in grammi ?
Calcolate, senza utilizzare la calcolatrice, quanto vale in metri un anno-luce (ossia la distanza percorsa dalla luce in un anno). L' es. serve ad abituarvi a fare un calcolo approssimativo, per valutare l' ordine di grandezza del risultato.
Fatto a lezione. Sol: 1 anno-luce = $2.99792... \times 10^8 \times 365 \times 86400$ m $\approx 3 \times 10^8 \times 365 \times 10^5$ m $\approx 1095 \times 10^{13} \approx 1 \times 10^{16}$ m=1×10^{18} cm
Ora fatelo con la calcolatrice: troverete $9.454... \times 10^{17}$ m.
E quanto vale la distanza Terra-Sole ? Ricordo solo che la luce del sole impiega circa 8 minuti per arrivare sulla Terra. Questa distanza definisce l' AU, l' "unità astronomica".

Io detterò esercizi, di volta in volta. È molto importante che proviate a farli !

Questi ed altri. Tanti.
Tipicamente, li risolveremo insieme dopo qualche giorno, ma non sottovalutate l' importanza di averci almeno pensato.

Esempi di calcolo per ordini di grandezza e di conversioni.

Cinematica: studio del movimento dei corpi. Ossia del loro spostamento al passare del tempo.

- Moto rispetto a chi? $\rightarrow$ *Sistema di riferimento.* Serve un riferimento spaziale, ma anche uno temporale (origine ed unità di misura per i tempi, ossia un orologio).
- Moto di chi? $\rightarrow$ Schematizzazione di *punto materiale.*

Cinematica: Caso ad una dimensione: diagramma orario $x(t)$. Ad es. il moto di una macchina su una strada rettilinea.
Partiamo da un esempio di un grafico di x(t), spazio percorso (in ordinata) in funzione del tempo (ascissa).
Concetto intuitivo di velocità:
partendo da stampanti e connessioni di rete grafico, velocità di trasmissione dati in funzione del tempo.Ecc.
Velocità come pendenza, esempi.

Significato di $v = \Delta x/\Delta t$. (tipicamente, scegliamo $\Delta t > 0$ -freccia orientata dal 'prima' al 'dopo'- e quindi il segno di v dipende dal segno di Δx).

Diagramma orario x(t); traiettoria y(x), se siamo su un piano. Attenzione al significato diverso delle due rappresentazioni.
Moto uniforme in generale e rettilineo uniforme.
Velocità come 'pendenza' di $x(t)$.
Differenza fra "spazio percorso" e "spostamento" (se vado "avanti e dietro", ad es. in piscina, alla fine lo spostamento è nullo, mentre lo spazio percorso è ben diverso da zero !. Stessa cosa su una pista di atletica o sul tapis-roulant in palestra..)
Grafici orari, con velocità costante e costante su alcuni tratti.
Velocità media e istantanea.
Unità di misura: $\rightarrow$ m, s, m/s. $\rightarrow$ *Conversioni.*
Se v_s= 1 m/s, quanto vale espressa in km/h ?
Ecco la soluzione: v_h= $v_s \frac{10^{-3}}{\frac{1}{3600}}$ km/h = 3.6 km/h.
Ossia, 1 metro/secondo sono 3.6 chilometri/ora. Importante: abituarsi a scrivere le grandezze fisiche con le rispettive unità di misura.
Controllo dimensionale
(il 'controllo dimensionale' è ottimo check: se le 'dimensioni' non sono quelle attese ci sono degli errori nella equazione!).

Spazio percorso come area sotto la curva v(t);
Relazione spazio percorso-velocità nel linguaggio differenziale, partendo dallo spazio percorso Δx come somma di tanti $\Delta x_i = v_i \Delta t_i$
Incremento di posizione fra t_1 a t_2 come 'area' sotto la curva $v(t)$ fra $t = t_1$ e $t = t_2$.

Problemini proposti:

(a) Nella prima metà di un certo percorso un' automobile viaggia a velocità v_1, nella seconda metà a v_2. Calcolare velocità media. [Nota: Applicare la formula ad un percorso x =200 km nei seguenti due casi: I) $v_1 = 100\,\mathrm{km/h}$, $v_2 = 50\,\mathrm{km/h}$; II) $v_1 = 100\,\mathrm{km/h}$, $v_2 = 1\,\mathrm{km/h}$. Calcolare anche il tempo di percorrenza di ciascuna metà del percorso].

(b) Esercizio padrone + cagnolino. Il padrone, a 500 m da casa, cammina verso casa a $v_p = 2$ m/s, costante. Il cagnolino lo vede, da casa, e gli va incontro con $v_c = 4$ m/s. Lo saluta e torna a casa "ad avvisare" che il padrone sta arrivando. Esce di nuovo, arriva dal padrone e torna a casa. Fa questo finchè il padrone non è arrivato a casa. Quanta è la strada che ha fatto il cagnolino (non lo spostamento, che è nullo) ? Supponete nulli tutti i "tempi di interazione".
Variante: il padrone porta il cagnolino a passeggiare tutte le mattine. Cagnolino e padrone vanno alla stessa velocità di prima (sempre). La passeggiata dura 1 h. Il padrone vorrebbe far stancare il cagnolino il più possibile durante la passeggiata. Lo fa giocare tirandogli una palla, che il cagnolino corre a prendere e gli riporta. In che direzione deve tirare la palla, affincè il cagnolino "si stanchi di più" ? Sempre davanti a sè, sempre dietro, sempre di lato, oppure in modo "random" ? Anche qui supponete nulli tutti i "tempi di interazione" (ossia il cagnolino prende e dà la palla al padrone praticamente senza fermarsi).

Alcune raccomandazioni per lo scritto:
leggete bene il testo, almeno un paio di volte, scrivete in ordine tutti i dati, dando un nome ad ogno cosa (e utilizzate lo stesso nome nello svolgimento dell' esercizio).
Scrivete chiaramente cosa è noto e cosa viene chiesto. Cercate di capire cosa vi serve per ricavare, da cio' che è noto, ciò che viene chiesto. E date un nome anche a queste grandezze. Se possibile, uno schemino o un disegno del problema aiuta. Imp: non affrettatevi a sfogliare libri, quaderni ... (nello scritto, dove è consentito). Cercate prima di capire bene il problema posto. Attenzione alle unità di misura. Attenzione alle analisi dimensionali. **Arrivate fino in fondo con espressioni algebriche**, sostituite i numeri solo "alla fine".
Inoltre: a lezione fate tutte le domande che volete, non abbiate paura ! Ricordate che durante il compito scritto/esonero, potrete chiedere **solo** chiarimenti sul testo.

Concetto intuitivo di accelerazione.
Moto uniformemente accelerato.
Velocità come 'pendenza' di $x(t)$ e accelerazione come 'pendenza' di $v(t)$ ('pendenza' $\rightarrow$ attenzione ad unità di misura!).
Accelerazione nel linguaggio del calcolo differenziale.
Accelerazione media e istantanea.
Calcolo di $x(t)$ come area sotto la curva $v(t) = v_0 + at$ nel moto uniformamente accelerato: area di un trapezio, con base maggiore $v(t)$,base minore v_0, altezza t.
Grafici orari, con accelerazione costante.
Riepilogo e discussione sui grafici $x(t)$, $v(t)$ e $a(t)$

Δx come somma di tanti $\Delta x_i = v_i \Delta t_i$ (mostrato ieri) e, analogalmente Δv come somma di tanti $\Delta v_i = a_i \Delta t_i$.
Incremento di velocità fra t_1 a t_2 come 'area' sotto la curva $a(t)$ fra $t = t_1$ e $t = t_2$.
Velocità varia linearmente con il tempo; posizione varia quadraticamente. $v(t)$ è una retta; $x(t)$ è una parabola.

Esercitazione

(a) Calcolare quanto tempo impiega a frenare una macchina che decelera con $a = -2$ m/s^2 e viaggiava a velocità $v_0 = 100$ km/h. Fatto il calcolo del tempo: $v^* = 0 = v_0 - |a|t^*$. Da cui: $t^* = v_0/|a| = \frac{100 \times 1000}{3600 \times 2} \simeq 13.9$ s.

(b) Problemi di accelerazione e frenata di veicoli sono assolutamente analoghi.

(c) Valori realistici di accelerazioni e spazio di frenata $s(v, v_0)$ da "Quattroruote":
una utilitaria accelera da 0 a 100 km/h in 12-15 s, una macchina sportiva in circa 8 s, una macchina di F1 in circa 3 s, una moto in circa 5 s, una moto veloce in 3-4 s;
spazio di frenata: BMW xxx, a 60 km/h danno 15.4 m, a 100 km/h danno 45.1 m, moto Guzzi xxx, a 60 km/h danno 15 m, a 100 km/h danno 44 m.
Non dovete sapere a memoria tutti questi numeri, ma sapervi orientare sul loro ordine di grandezza.

(d) Continuiamo il problema della frenata: Calcolato t^*, quanto vale lo spazio di arresto? [$\rightarrow d = d(v_0, a)$]. Notiamo che va con v^2 !
Formula empirica che danno nelle scuole guida, per la distanza di sicurezza: $d \approx (v/10)^2$, con v in km/h, e d in metri. Tiene conto anche dei tempi di riflesso. Porta a valori più alti di quelli dati sopra, perchè deve dare una regoletta valida praticamente sempre..ed è meglio "sbagliare" in eccesso, ovviamente..
Calcolato lo spazio di frenata automobile in tre modi diversi (dopo avere calcolato $t^* = v_0/|a|$):
1) da $s(t^*) = v_0\, t^* - 1/2|a|t^{*2} = 1/2(v_0^2/|a|)$;

2) utilizzando la velocità media la val. varia linearmente da v_0 a 0, (la vel. media è: $\frac{v_{in}+v_{fin}}{2}$), dove v_{in} e v_{fin} sono le velocità iniziale e finale nel periodo di tempo considerato)

$s(t^*) = v_M \times t^*$ con $v_M = v_0/2$, e dove, sostituendo $t^* = v_0/|a|$, ottengo la stessa formula di 1);
3) dall' area del triangolo nel grafico $v(t)$: $A = b \times h/2 = v_0 \times t^*/2$.

(e) Risolto esercizio del calcolo della velocità media di una macchina, assegnato: cosa abbiamo imparato ? che la velocità media non è la media delle velocità ! Basti pensare ad una macchina che, dopo aver percorso parte del tragitto, si ferma .... Il punto da capire è che il tempo di percorrenza su ciascuno dei 2 (ad es.) tratti è inversamente proporzionale alla velocità, ossia la macchina ci mette molto tempo di più a percorrere x km se va "più lenta" di prima. Soluzione: $v_1 = \frac{x}{2t_1}$, $v_2 = \frac{x}{2t_2}$. Da cui:
$t_1 + t_2 = x/2\ (1/v_1 + 1/v_2) = x/2\ \frac{v_1+v_2}{v_1\ v_2}$. Ma: $v_{media} = x/(t_1 + t_2)$, da cui: $v_{media} = 2\frac{v_1\ v_2}{v_1+v_2}$.
Numericamente viene 66.7 km/h nel primo caso e 1 km/h nel secondo caso.
Variante: se la macchina percorre 100 km ($= x/2$) a v_1, poi resta ferma ad es. per 2 ore, poi continua ancora per 100 km a v_2, quale sarà la velocità media ? Soluz.: calcoliamo t_1 e t_2 come prima. Sia $t_3 = 2 \times 3600 = 7200$ s. Avremo $v_{media} = x/(t_1 + t_2 + t_3)$, tanto più bassa quanto maggiore è t_3 (a t_1, t_2 potremmo sostituire l' espressione in funzione di x e di v_1, v_2, mentre t_3 va preso numericamente).
Abbiamo anche fatto il grafico di x(t) e di v(t).
.

Esercitazione

(a) Dettato es. 1 di esonero del 2/03/06, marzo 2006 Provate a farlo, per rendervi conto ...: Una automobile A viaggia a $v = 18$ m/s costante e sorpassa B, inizialmente ferma. Quando A e B sono appaiate B inizia a muoversi con $a = 4$ m/s^2 costante. Det: 1) il tempo necessario a B per raggiungere A;
2) la distanza percorsa da B per raggiungere A;
3) la velocità di B quando raggiunge A.

(b) Dettato esercizio su un moto ad accelerazione che aumenta linearmente, da zero fino al valore $a_0 = 2$ m/s^2 nel tempo $T = 10$s e poi diminuisce linearmente, fino a zero in un tempo uguale $T = 10$ s. La velocità iniziale del corpo era $v_i = 50$ km/h. Calcolare la velocità finale, ossia dopo il tempo 2T=20 s.

(c) Esercizio. Treno che percorre metà percorso con moto unif. accel. e metà con moto unif. decelerato. Sugg: risolverlo, dove possibile, in modo "grafico" (ossia dal calcolo delle aree sotto una certa curva.).

Testo: due stazioni distano $d = 1.5$ km. Un treno percorre metà cammino con moto unif. accelerato e l' altra metà con moto unif. dec., ma con stessa $|a|$.

La velocità massima raggiunta dal treno è nota: $v_{max} = 50$ km/h. Calcolate l' accel. a e il tempo complessivo T_{tot}. Soluzione, in modo grafico: facendo il grafico della velocità in funzione del tempo, si ha un triangolo di altezza v_{max} e base T_{tot}. Dunque lo spazio complessivo, noto, è anche uguale a $s = (1/2)v_{max}T_{tot}$. Da cui $T_{tot} = 2s/v_{max} = 216$ s. Inoltre, $v_{max} = a\frac{T_{tot}}{2}$, da cui si ricava a=0.13 m/s^2.
Fatelo da soli completamente senza l'uso della grafica.

(d) **Ancora, risolvete:** Calcolare la velocità con la quale arriva in acqua un tuffatore che si tuffa da una piattaforma di h=10 m (trascurando la resistenza dell' aria).

(e) All'istante $t_1 = 10$ s un corpo si trova nel punto $x_1 = 5$ m. Sapendo che il corpo viaggia con velocità costante $v = -2$ m/s, calcolare la posizione all'istante $t_2 = 15\,s$.

(f) All' istante $t_1 = 2$ s un corpo ha velocità $v_1 = 2$ m/s. Sapendo che è soggetto ad accel. costante $a = 3$ m/s^2, calcolare velocità e posizione al tempo 6 s.
Ricordatevi sempre di scrivere da una parte tutti i dati con i loro nomi (dare un nome ai dati che non lo hanno nel testo e possibilmente non cambiarlo agli altri)

(g) Un' automobile accelera da 0 a 100 km/h in 7 s. Calcolare l' accelerazione media in m/s^2.
Dati: $v_i = 0$ m/s, v_f=100 km/h=100$\frac{1000}{3600}$=27.8 m/s, $t_i = 0$ s, $t_f = 7$ s.

(h) Dettato es. di esonero CTF, 22 feb.2007: Un ciclista viaggia alla velocità costante di 45 km/h su un rettilineo lungo $l = 125m$. Un motociclista parte dopo $t = 2$ s, con velocità nulla ed accelerazione costante. Quanto deve valere l' accelerazione e quanto vale la velocità finale del motociclista per arrivare al traguardo insieme al ciclista ?

(i) Un nuotatore fa, a stile libero, 8 vasche da 50 m in 5'30" (non è un agonista "categoria assoluti", ma è abbastanza bravo..dipende dall' età che ha). Calcolare la sua velocità media (utilizzando lo spazio percorso, non lo spostamento !).

(j) Avete idea della velocità media con la quale corre un centrometrista (di atletica) forte, esempio Bolt, che ha il record del mondo nei 100 piani, con 9.58 s ? E di un maratoneta La maratona è di 42.195 km. Il record del mondo è di un etiope con 2h03'59? E la velocità media della Pellegrini, nel record mondiale dei 400 s.l. (3'59"15)? E della Filippi nei 1500 s.l. ? Ai mondiali di Roma 2009 ha mancato il record del mondo per 2 secondi, con 15'44"93.

2. **Seconda settimana, Me 9 marzo (carnevale + aula occupata), e Terza settimana 14-1**

Ancora sul moto uniformemente accelerato: moto di una pallina lanciata verso l' alto, con velocità iniziale v_0. Trascuriamo la resistenza dell' aria.

Domanda: come varia l' accelerazione mentre la pallina sale e ricade giù ? Altre domande alle quali vogliamo rispondere: come varia la velocità ? Quanto vale lo spazio percorso ? Quanto vale lo spostamento ?

Premessa: abbiamo tutti dall' esperienza quotidiana il concetto di accelerazione di gravità, $g = 9.8\,\mathrm{m/s^2}$: tutti i corpi nello stesso punto sulla superficie terrestre, nel vuoto e non soggetti ad 'altre forze', cadono con la stessa accelerazione. Dunque, nel moto della pallina, l' accel. resta sempre costante, la velocità invece cambia.

La pallina sale con velocità che diminuisce sempre, arriva ad una quota (rispetto a me che l' ho lanciata) massima $h_{max} = 1/2\ (v_0^2/g)$ (notate l' analogia -stessa equazione- con lo spazio di frenata) in un tempo $t_{max} = v_0/g$ (anche qui notate l' analogia con il tempo di frenata).

La pallina a t_{max} ha vel. nulla e dopo la vel. cambia segno. Infatti la pallina torna giù e, un attimo prima che io la riprenda, ha vel. in modulo uguale a v_0. Il tempo che ci mette a tornare giù è uguale al tempo che ci ha messo a salire ad h_{max}. Tutto questo per motivi ovvi di "simmetria" (il moto è unif. decelerato prima e unif. accelerato dopo, con la stessa accelerazione in modulo, g).

Facciamo anche il grafico v(t)- 2 triangoli-: lo spostamento completamento è chiaramente nullo.

Notate: tutto questo sarà ripreso, chiarito e capito anche meglio quando ragioneremo in termini di energia meccanica e sua conservazione.

Problemini tipici che si risolvono con questo schema:

(a) Corpo cade da una torre di altezza h (trascurando resistenza dell'aria)
   - A che velocità arriva al suolo?
   - Quanto tempo ci mette?

(b) Corpo lanciato verso l'alto con velocità iniziale v_0:
   - A che altezza arriva?
   - Quanto tempo ci mette?
   - A che altezza ritorna alla posizione di partenza?
   - Quanto ci mette a a tornare?
   - Grafico $z(t)$.
   - Come varia la velocità (con segno) da quando l'oggetto parte verso l'alto a quando torna nella posizione iniziale? ($\rightarrow$ grafico.)
   - Grafico di $a(t)$.

Esercitazione

Traccia soluzione esercizio esonero di marzo 2006. Il punto di partenza, dal quale si risolve il problema, è che il tempo al quale B raggiunge A corrisponde al tempo in cui $s_A = s_B$, ossia $v_A \times t^* = (1/2) \times a \times t^{*2}$. Si ricava $t^* = 2 \times v_A/a$= 9 s. Il resto è immediato: $s_B^* = (1/2)\ at^{*2}$=162 m; $v_B^* = at^*$=36 m/s.

– sol. es. di esonero dettato, 22 feb 2007:

Espressione, nel moto unif. accelerato, di $s(v)$ e $v(s)$, eliminando il tempo dalle equazioni $s(t)$ e $v(t)$. Da $s - s_0 = v_0\ (t - t_0) + \frac{1}{2}a\ (t - t_0)^2$ e $v = v_0 + a\ (t - t_0)$, si ha: $(t - t_0) = \frac{v-v_0}{a}$ e, sostituendo nella equazione dello spazio percorso, si arriva a $s - s_0 = \frac{(v^2-v_0^2)}{2a}$. Notate che è proprio l' espressione che abbiamo ottenuto nel problema dello spazio di frenata e del lancio della pallina verso l' alto.
Questa espressione può essere utile per risolvere "più velocemente" qualche problema, oltre ad essere importante avere chiaro s e v come sono legati fra loro. In generale, non è una formula che è necessario conoscere a memoria . . . infatti la si ricava molto facilmente avendo note s(t) e v(t), che invece vanno assolutamente "sapute" e capite.

Sistema di coordinate sul piano x,y
Breve introduzione sui vettori: modulo,direzione,verso. Proiezione di un vettore sugli assi di un sistema di coordinate. Fase (angolo formato con l' asse delle x). Versori degli assi coordinati $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$, $\hat{k}$ Posizione in 2 dimensioni $\vec{P} = P_x\hat{\imath} + P_y\hat{\jmath}$, con $P_x = |P|\cos\phi$,$P_y = |P|\sin\phi$.
Modulo $|P| = \sqrt{P_x^2 + P_y^2}$, fase $\phi = atan\frac{P_y}{Px}$.

Sui vettori diremo altro ! **Nota**: atan, arco tangente, sulle calcolatrici è indicato con $\tan^{-1}$. Così come arco seno e arco coseno sono $\sin^{-1}$ e $\cos^{-1}$

Traiettoria sul piano x-y.

Moto del proiettile (sul piano x-y)-Introduzione: oggetto lanciato con vel. iniz. v_0 che forma un angolo α con l' asse x. Importante notare che il moto può essere trattato indipendentemente sui due assi. L' unico legame fra ciò che avviene sull' asse x e sull' asse y è dato dal tempo. Allora: Su x non c' è accelerazione, su y c' è l' acc. di gravità.

Si devono calcolare x(t),y(t), il tempo della quota massima, il tempo che il proiettile impiega a cadere, v_x, v_y e l' equazione della traiettoria y(x). Importante sottolineare che il moto evolve in modo indipendente in ciascuna direzione: su x e' rettilineo uniforme, su y uniformemente accelerato. Abbiamo calcolato: eq. del moto sui 2 assi x e y. Riflessioni sul valore della velocità al massimo della quota e alla fine del lancio (quota di nuovo zero), sia lungo l' asse x che lungo l' asse y. Velocità al tempo in cui la traiettoria raggiunge il massimo: la velocità lungo x è sempre costante $v_x = v_{0x}$, mentre su y ho che $v_y(t) = v_{0y} - |g|\ t$. Al tempo al quale la quota è massima: $v_y(t_{max}) = 0$ (analogamente a quanto avviene nel lancio sulla verticale). Dunque calcolo facilmente $t_{max} = v_{0y}/|g| = v_0\ sin(\alpha)/|g|$. Da qui calcolo anche $x_{max} = x(t_{max})$ e $y_{max} = y(t_{max})$. Poi il tempo totale (fra il lancio, a quota y=0 e la ricaduta a y=0): 2 t_{max}, per ovvi motivi di simmetria. Calcolo della gittata, valore della coordinata x quando y=0, che è 2 x_{max}; Calcolo della traiettoria (parabolica) e della y_{max}, quota massima raggiunta su y, al tempo che abbiamo chiamato t_{max}. Notiamo ancora l' analogia con il lancio sulla verticale (la quota max è la data dalla stessa formula, ovviamente, basta sostituire v_0 con v_{0y}.).

Ricordiamo che, se grafichiamo la traiettoria x-y sul piano poichè la vel. istantanea è $\vec{v}_{ist} = \lim_{\Delta r \to 0}(\Delta\vec{r}/\Delta t)= d\vec{r}/dt$, la velocità prende la direzione della tangente alla traiettoria nel punto considerato.

Esercitazione

(a) Nota: sapete fare la conversione da gradi a radianti e viceversa ?
deg2rad= $\pi/180$ e rad2deg=$180/\pi$.

(b) Svolto e discusso esercizio mamma-bambino di esonero febbraio 2008. Una signora sta camminando a v costant=1.5 m/s verso casa percorrendo un vialetto dritto e senza macchine e, quando si trova alla distanza di $s_0 = 90$ m dalla porta, il suo bambino la vede e le corre incontro a velocità costante pari a 3 m/s. Determinare dopo quanto tempo si incontrano; a che distanza dalla porta si incontrano. Soluzione: Prendiamo come origine della coordinate spaziale la porta di casa. Chiamando v_m la velocità della mamma e $v_b = \alpha v_m$ quella del bambino, avremo

$s_b = v_b \cdot t$; $s_m = s_0 - v_m \cdot t$. Mamma e bambino si incontrano quando $s_b = s_m$, ossia $\alpha v_m t^* = s_0 - v_m t^*$, da cui $t^* = \frac{s_0}{v_m(1+\alpha)}$ è il tempo di incontro, e
a) $s^* = \frac{\alpha s_0}{1+\alpha}$;
Notiamo che per $\alpha = 1$ i due si incontrano a metà strada e, per $\alpha >> 1$ si incontrano praticamente ad s_0, mentre per $\alpha = 0$, bambino fermo a casa, si incontrano ... a casa.
b) Se $\alpha = 2$ si ha: $s^* = (2/3)s_0$= 66.67 m da casa.
c) Se v_m ed α sono noti possiamo calcolare t^*:
$t^* = \frac{100}{2 \cdot 2}$= 25 s.
Variante: supponiamo che il bambino, quando vede la mamma, si trovi al primo piano ed impieghi $t_0 = 10$ s per raggiungere la porta di casa. Dove si incontreranno stavolta ?
Soluzione: si può ragionare in diversi modi. Il più diretto è riscrivere l' equazione del moto del bambino aggiungendovi un termine di ritardo temporale:
$s_b = v_b \cdot (t - t_0)$; $s_m = s_0 - v_m \cdot t$. Mamma e bambino si incontrano quando $s_b = s_m$, ossia $\alpha v_m(t^* - t_0) = s_0 - v_m t^*$, da cui ... fate i conti e le considerazioni sulla ragionevolezza del risultato.

(c) **Soluzione degli esercizi assegnati nei gg. scorsi**. Trovate qui la soluzione di tutti:

(d) All'istante $t_1 = 10$ s un corpo si trova nel punto $x_1 = 5\,$m. Sapendo che il corpo viaggia con velocità costante $v = -2\,$m/s, calcolare la posizione all'istante $t_2 = 15\,s$.
Sol: $x(t_2) = x_1 + v\ (t_2 - t_1) = 5 - 2 \times (15 - 10)$=-5 m.

(e) All' istante $t_1 = 2$ s un corpo ha velocità $v_1 = 2$ m/s. Sapendo che è soggetto ad accel. costante $a = 3$ m/s^2, calcolare velocità e posizione al tempo 6 s.
Sol: ricordatevi sempre di scrivere da una parte tutti i dati con i loro nomi (dare un nome ai dati che non lo hanno nel testo e possibilmente non cambiarlo agli altri)
$t_1 = 2$ s, $v_1 = 2$ m/s, $a = 3$ m/s^2=costante, $s_1 = 0$ m (ce lo scriviamo), $t_2 = 6$ s, v_2 =??, s_2 =??.
1) calcolo v_2: $v_2 = v_1 + a\ (t_2 - t_1) = 2 + 3 \times 4$=14 m/s
2) calcolo s_2: $s_2 = s_1 + v_1\ (t_2 - t_1) + (1/2)\ a(t_2 - t_1)^2 = 0 + 2 \times 4 + 0.5 \times 3 \times 4^2 =$ 32 m

(f) Un' automobile accelera da 0 a 100 km/h in 7 s. Calcolare l' accelerazione media in m/s^2.
Dati: $v_i = 0$ m/s, v_f=100 km/h=100$\frac{1000}{3600}$=27.8 m/s, $t_i = 0$ s, $t_f = 7$ s.
Sol.: $v_f = v_i + a_M\ (t_f - t_i) \rightarrow a_M = (v_f - v_i)/(t_f - t_i) = \frac{27.8}{7}$= 3.97 m/s^2.

(g) Un nuotatore fa, a stile libero, 16 vasche da 50 m in 11'. Calcolare la sua velocità media (utilizzando lo spazio percorso, non lo spostamento !).
Sol: $v_M = \Delta s/\Delta t$, con $\Delta s = 8 \times 50 = 800$ m e $\Delta t = 11 \times 60 = 660$ s. si ricava $v_M = 800/600 = 1.2$ m/s.

(h) Altri esercizi sui vettori e moto in due dimensioni (dal libro Luci: capitolo 3).
Falco che vola e cambia direzione; vola in linea retta per 250 m; poi sempre in linea retta per 140 m su una direzione che forma $\theta = 70^o$ con la direzione precedente. Calcolarne lo spostamento complessivo. Soluzione: d= 326 m. Ricordo che $sin\theta = 0.94$,$cos\theta = 0.34$

(i) Gatto sul davanzale: fa un balzo orizzontale con $v_i = 4.2$ m/s. Tocca terra dopo 0.78 s. Quanto dista da terra il davanzale ? A quale distanza dal muro atterra ? Sol: $h_D = 2.98$ m; $x_f = 3.3$ m.

(j) Un pallone viene calciato dal terrazzo di un palazzo alto 12.5 m, con v_i = 27 m/s e angolo $\alpha = 20^o$ rispetto all' orizzontale. Trovare la distanza orizzontale fra il punto di lancio e il punto in cui il pallone raggiunge il suolo; trovare il modulo dello spostamento complessivo del pallone.

(k) Calcolata la traiettoria y(x) nel lancio del proiettile.

(l) es. del gatto: se fosse stata nota h e non il tempo, avremmo trovato due radici per la soluzione del tempo: a quale domanda risponde la radice negativa del tempo ?

(m) Svolto una macchina viaggia a $v_0 = 100$ km/h. Accelera con a lineare fino ad un valore massimo di $a_{max} = 2$ m/s^2. Poi decelera allo stesso modo, da $a_{max} = 2$ m/s^2 a 0. Il tutto in 20 secondi. Quanto vale la velocità della macchina dopo i 20 secondi ?
Una macchina percorre una circonferenza (pista circolare) di raggio R noto a velocità costante nota. Calcolare: quanto tempo impiega a fare un giro; quanti giri fa in un secondo.

Esercitazione

(a) Es. 15 pag. 99 Serway (calciatore calcia il pallone verso la traversa): un calciatore calcia un pallone da una distanza $d = 36$ m dalla porta. il pallone deve evitare la traversa che è alta $h = 2.10$ m. Il pallone viene calciato e parte con un angolo di 53^o rispetto all' orizzontale, alla velocità $v_0 = 20$ m/s. Calcolare: 1) a che distanza passa dalla traversa (sopra o sotto, specificandolo); 2) il pallone supera (sopra o sotto) la traversa nella parte ascendente o discendente della traiettoria ?

Linee guida sol: conosco la distanza fra il calciatore e la porta d. Allora calcolo il tempo t^* al quale il pallone ha percorso la distanza d sull' asse x (ossia è arrivato alla porta) e calcolo a che quota y^* è al tempo t^*=3 s. Viene $y^* = 3.9$ m, dunque la palla passa sopra la traversa di $3.9 - 2.1$=3.9 m. Per sapere se la supera nel tratto ascendente o in quello discendente della sua traiettoria devo confrontare t^* con t_{max} (tempo al quale ho v_y=0, massimo della quota della traiettoria). Viene $t_{max} = 1.6$ s, ossia minore di t^*, dunque il pallone raggiunge la traversa nella parte discendente della sua traiettoria. dove il segno meno indica che a è diretta verso il basso.

(b) Dettato, dovrebbe risultarvi facile:

In una gara di salto in lungo l' atleta che è in testa ha saltato 8.31 m. Sapendo che la velocità di stacco era 9.7 m/s, quale era l' angolo di stacco ?

Un secondo atleta ha una velocità di stacco di 9.2 m/s, ma fa un salto perfetto, con angolo di 45^o, riuscirà ad andare in testa ?

(sol: 30 ^{o}, si - salta 8.64 m).

(c) Svolto: esercizio pag 86 Serway: un piccolo aereo che viaggia con v=40 m/s lancia un pacco di viveri, sulla verticale rispetto a lui. L' aereo si trova a quota h=100 m dal suolo. Calcolo della posizione x_f dove il pacco raggiungera' il suolo, rispetto alla posizione x_i dove era quando è stato lanciato.

Aggiungiamo questa domanda: dove si trova l' aereo quando il pacco raggiunge il suolo ?

(d) Svolto esercizio 2.4.1 pag. 36 Davidson (calcolo dello spostamento sul piano, nel caso di un moto rettilineo uniforme prima lungo una direzione e poi lungo un' altra direzione):

Motociclista viaggia verso EST da un punto P a vel. costante $v_1 = 50$ km/h per 3 ore. Poi gira verso NORD e viaggia a $v_2 = 65$ km/h per 2 ore. Quanto si è allontanato da P ? Sol: $d_1 = v_1 \times t_1 \ = \ 50 \times 3 = 150$ km (non serve moltiplicare e dividere per 3600 ...). $d_2 = v_2 \times t_2 \ = \ 65 \times 2 = 130$ km. Notiamo che EST e NORD sono due direzioni ortogonali fra loro e facciamo il disegno, da cui $d_P = \sqrt{d_1^2 + d_2^2} = 198.5$ km. Ben diverso dalla strada percorsa dalla moto, che è la somma $d_1 + d_2 = 280$ km.

Ancora sui vettori: somma, differenza in modo grafico e con le componenti.

Prodotto scalare e prodotto vettoriale: li faremo quando serviranno
Svolti alcuni esercizi semplici sui vettori.
Spostamento, velocita' e accelerazione in 2 e 3 dimensioni.
Ricordiamo ancora che, se grafichiamo la traiettoria x-y sul piano (l' estensione a 3 dimensioni è immediata, al momento non ci interessa), poichè la vel. istantanea è $\vec{v}_{ist} = \lim_{\Delta r \to 0}(\Delta\vec{r}/\Delta t) = d\vec{r}/dt$, allora la velocità prende la direzione della tangente alla traiettoria nel punto considerato.
Tenete presente che: l' accelerazione può cambiare il modulo della velocità se esiste una sua componente che è parallela alla traiettoria e si chiama "accelerazione tangenziale"; e/o può cambiare la direzione della velocità se esiste una sua componente che è ortogonale alla traiettoria e si chiama "accelerazione radiale".
IMPORTANTE da capire: il moto evolve in modo indipendente nelle direzioni x,y,z.

Cambiamento di sistema di riferimento:
Commenti semplici:
Ricordiamo le operazioni su vettori: prodotto di un vettore per uno scalare (es. $\vec{F} = m\,\vec{a}$) e operatore derivata (es. $\vec{a} = \mathrm{d}\vec{v}/\mathrm{d}t$). Somma di vettori: dati $\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$ e $\vec{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$, dal punto di vista matematico il vettore somma $\vec{c}$, ovvero $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ è ottenuto sommando le componenti, ovvero $c_x = a_x + b_x$, etc. Dal punto di vista fisico:

- si possono solo grandezze omogenee, e quindi, solo vettori omogenei ("mele con mele e patate con patate", come si diceva alle elementari);
- va prima provato che tale operazione abbia senso
- Somma di due forze: $\vec{F}_c = \vec{F}_a + \vec{F}_b$: l'effetto di dell'applicazione simultanea di $\vec{F}_a$ e $\vec{F}_b$ è esattamenta uguale a quella di $\vec{F}_c$ se le due forze sono applicate ad un punto materiale. L'effetto è un più complicato se le forze sono applicate ad un corpo esteso.
- Somma di due velocità: $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \vec{v}_3$ ha senso se $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ e $\vec{v}_3$ hanno un significato ben preciso e se le velocità sono molto piccole rispetto a quella della luce (trasformazione Galileiana delle velocità, vedi nel seguito.). Se invece le velocità sono confrontabili con quella della luce tale formula di somma non è applicabile ($\rightarrow$ teoria della relatività ristretta di Einstein).

  Trasformazione galileiana delle velocità. In genere, se un corpo si muove con $\vec{v}$ nel sistema di riferimento S, e il sistema di riferimento si muove rispetto a S' con velocità costante $\vec{v}(S)$:

$$\vec{v}' = \vec{v}(S) + \vec{v} \tag{1}$$
$$\vec{a}' = \vec{a} \tag{2}$$

  Se la velocità di S rispetto a S' è costante allora l' accelerazione del corpo nei 2 sistemi di riferimento è la stessa.

Caso del nuotatore sul fiume:

$$\vec{v}_{nR} \quad = \quad \vec{v}_{nF} + \vec{v}_{FR}\,, \qquad (3)$$

ove $\vec{v}_{FR}$ è la velocità del fiume rispetto alla riva, $\vec{v}_{nF}$ la velocità del nuotatore rispetto al fiume e $\vec{v}_{nR}$ la velocità del nuotatore rispetto alla riva. Scegliendo opportunamente gli assi abbiamo $\vec{v}_{FR} = (v_F, 0)$, $\vec{v}_{nF} = (v_L, v_T)$ (ove v_L e v_T stanno per velocità longitudinale e trasversale rispetto alla corrente), per cui $\vec{v}_{nR} = (v_F + v_L, v_T)$. Casi elementari sono quando la velocità del nuotatore è solo lungo la corrente o trasverale ad essa.

Problemi, entrambi svolti e discussi:
Ricordatevi di fare sempre dei "ragionamenti al limite", per verificare se una formula trovata o una vostra intuizione, sono corrette.

(a) Un uomo corre con v_P=5 km/h rispetto alla strada (riferimento in quiete). Un' automobile procede nella stessa direzione con v_a=50 km/h (riferimento in moto). Trovare la velocità dell' uomo rispetto all' auto. Il risultato è che il guidatore vede l' uomo avvicinarsi ad una velocità di -45 km/h. Qui un ragionamento al limite potrebbe essere: e se l' uomo è un supeeroe e scappa alla stessa velocità della macchina ? Ovviamente il guidatore deve vederlo fermo, perchè si mantengono sempre alla stessa distanza relativa.

(b) Si immagini una gara di nuoto su un fiume, con le corsie, lunghe 50 m, disposte parallelamente al verso della corrente. Il fiume ha una velocità di 1 m/s. Calcolare il tempo che un centometrista farà sul fiume se nuota ad una velocità tale che in una piscina olimpionica ($2 \times 50\,\mathrm{m}$) avrebbe fatto 60 s netti. Attenzione al solito problema che la velocità media non è la media delle velocità. Vanno calcolati i tempi nei due tratti e poi sommati. Abbiamo calcolato l' espressione del tempo totale in funzione delle velocità e dello spazio. Traccia della sol:
Sia s=50 m; $v_n = 100/60 = 1.67$ m/s velocità del nuotatore in piscina, ossia quella che ora ha rispetto al fiume; $v_F = 1$ m/s vel. del fiume, che una volta si somma e una volta si sottrae a quella del nuotatore.
Si ha: $t_1 = s/(v_n - v_F)$, $t_2 = s/(v_n + v_F)$, da cui: $t = t_1 + t_2 = 2s\frac{v_n}{v_n^2 - v_F^2}$.
Ragionamenti al limite: cosa succede se la vel. del fiume e quella del nuotatore sono uguali in modulo ? E se la vel. del fiume fosse nulla ?

(c) Proposta di esercizio: Un fiume scorre con velocità v_F= 5 km/h (ad esempio, verso Est) Una barca va con velocità v_b=10 km/h sul fiume in direzione trasversale a quella di scorrimento della corrente (verso Nord).

   i. A che velocità la barca si muove rispetto alla riva? (vettore e modulo).
   Avremo $\vec{v_{br}} = (5\ i, 10\ j)$ km/h. Da cui $|v_{br}| = \sqrt{5^2 + 10^2} = 11.2$ km/h.

ii. Trovare l'angolo fra la direzione del moto della barca e quella di scorrimento dell'acqua. Troviamo: $\phi = arctg\frac{10}{5} = 63.4\ ^o$, rispetto all' asse indicato con il versore i

(d) "Endless pool" o "Counter-current" pool: sono allenanti. Cercate su google !

Moto circolare uniforme: scaricate e studiate gli appunti su web, sotto la voce "Altro materiale didattico"

Matematica e cinematica Se non siete sicuri sulla vostra conoscenza delle derivate che ci servono in questo corso, almeno per ora, studiate gli appunti alla pagina web, sotto "Altro materiale didattico": cinematica e derivate.

Grafico e commenti sulle funzioni $cos(\omega t + \phi_0)$ e $sin(\omega t + \phi_0)$.

Commenti sul moto circolare uniforme.

(a) Periodo (tempo per fare un giro $T = 2\pi r/v$), frequenza ν (numero di giri in un secondo, misurata in hertz=1/s), velocita' angolare ω (angolo $\Delta\theta$ spazzato in un tempo Δt, misurata in rad/s,
$\omega = 2\pi/T$).
Se ad esempio il periodo è 1 s, la frequenza sarà 1 Hz (ossia in un secondo ho fatto 1 giro) e la velocità angolare 2π (in un secondo ho spazzato un angolo 2π).

(b) Accelerazione tangenziale: cambia il modulo della velocità
e radiale: cambia la direzione del vettore velocità.

(c) Accelerazione centripeta a_c (non c'e' accelerazione tangenziale, perchè il modulo della velocità è costante): radiale e diretta verso il centro della circonferenza. a_c in funzione di v,di ω, di T e di ν.
$|v| = \omega\ r$; $a_c = -v^2/r = -\omega^2\ r = -(\frac{2\pi}{T})^2\ r$

(d) Esercizio sul calcolo della accelerazione data la frequenza in giri al minuto.

Moto armonico:

(a) Dal moto circolare uniforme proiettando i vettori x(t), v(t) e a(t) su un diametro.
Avete già visto che $x(t) = R\ \cos(\omega t + \phi_0)$; $v(t) = -\omega R\ \sin(\omega t + \phi_0)$;
$a(t) = -\omega^2 R\ cos(\omega t + \phi_0) = -\omega^2 x(t)$;
Dove ϕ_0 è una fase iniziale, tipicamente la potremo prendere nulla. Ricordo ancora che l' angolo "spazzato" è $\alpha = \omega t + \phi_0$, in analogia con lo spazio "percorso" $s = vt + s_0$.

(b) Equazioni del tipo $d^2x/d^2t + Kx = 0$ rappresentano sempre un moto armonico con $\omega = \sqrt{K}$ e $T = (2\pi)/\sqrt{K}$.

Introduzione alla Dinamica

(a) Introduzione alla dinamica e al concetto intuitivo di forza (forza come variazione dello stato di moto di un oggetto). Punto di vista di Aristotele e di Galileo. Esempi riferendosi a forze che si equilibrano ("statica"), forze che mettono in moto un corpo ("dinamica"), forza peso, forza centrifuga (che ci trascina verso l' esterno-o l' interno- della macchina quando percorriamo una curva).

(b) Principio d' inerzia (primo principio della dinamica o prima legge di Newton); Sistema di riferimento inerziale.

(c) Secondo principio della dinamica: $\vec{F} = m\,\vec{a}$ (seconda legge di Newton), da imparare a leggere '$\vec{a} = \vec{F}/m$', nel senso che i problemi tipici sono quelli di dedurre la cinematica dei corpi a partire dalle forze in gioco. F sta per *risultante delle forze* che agiscono su m. Unità di misura della forza (newton);

Primo esempio di forza:

(a) *Forza gravitazionale (legge della gravitazione di Newton)* fra due corpi:

$$\vec{F} = -G\,\frac{m_1\,m_2}{d^2}\hat{d} \tag{4}$$

con m_1 e m_2 la massa dei due corpi, d la loro distanza (fra i loro 'centri' se si tratta di corpi estesi — un concetto che sarà chiarito nel seguito) e G una costante opportuna tale che se le masse sono espresse in kg e la distanza in m, la forza risultante sarà in Newton (N): $G = 6.67300\times10^{-11}\,\mathrm{m^3kg^{-1}s^{-2}} = 6.67300\times10^{-11}\,\mathrm{N\,m^2/kg^2}$. Il segno negativo sta ad indicare che la forza è *attrattiva.*

(b) identità massa inerziale e massa gravitazionale

(c) Notiamo l' analogia con la *Forza elettrostatica* (di Coulomb) fra due corpi carichi:

$$\vec{F} = k_0\,\frac{Q_1\,Q_2}{d^2}\hat{d} \tag{5}$$

ove Q_1 e Q_2 sono le cariche espresse in Coulomb (C), d come sopra e k_0, altra costante, di valore $k_0 = 9\times10^9\,\mathrm{N\,m^2/C^2}$.
Si noti come questa forza può essere repulsiva o attrattiva a seconda del segno relativo delle cariche.
Entrambe (grav. ed elettr.) hanno la stessa struttura e sono forze "centrali", che agiscono a distanza, non per contatto.
Importanza dell' andamento con l' inverso del quadrato della distanza.

(d) Concetto di campo. Linee di forza. Flusso(grandezza scalare) di un vettore, senza la definizione matematica precisa(per ora). Se il vettore $\vec{A}$è costante e ortogonale alla superficie S il suo flusso attraverso S è il prodotto $A\,S$.

(e) Nota importante: le cose vanno come se la massa della Terra fosse tutta concentrata nel suo centro: *facoltativo:* Vale il teorema di Gauss per il campo gravitazionale. Lo faremo poi per il campo elettrico. La Terra, schematizzata come una sfera perfetta, attira un corpo sulla sua superficie come se tutta la sua massa fosse concentrata nel centro. $\Phi(\vec{G}) = 4\pi G m_{int}$ $\Phi(\vec{E}) = 4\pi K_0 q_{int}$ dove Φ è il flusso del vettore campo attraverso una superficie chiusa che circonda la massa o la carica indicate con int (interna).

Continuiamo con le forze: *Forza gravitazionale fra due corpi*:

$$\vec{F} = -G \frac{m_1 m_2}{d^2} \hat{d} \tag{6}$$

Conoscendo la formula della forza si può determinare l'accelerazione da $a = F/m$ (se questa è la sola forza agente):

(a) *forza gravitazionale*: $a_1 = -G\, m_2/d^2$, $a_2 = -G\, m_1/d^2$
(caso particolare di uma massa m sulla superficie terrestre: $F = -G\, M_T\, m/R_T^2$, da cui $a = -G\, M_T/R_T^2 \equiv -g$);
$R_T = 6.37\ 10^6$ m, $M_T = 5.98\ 10^{24}$ kg. g viene ≈ 9.80 m/s^2; provate a fare il conto con la calcolatrice.

(b) Valore di $\vec{g}$ all' equatore e ai poli. Il valore convenzionale di g un valore medio assunto convenzionalmente che approssima il valore dell'accelerazione di gravit prodotta al livello del mare ad una latitudine di $45,5$ deg dalla Terra su un grave lasciato in caduta libera. Il suo valore aumenta con la latitudine: $9.823\ m/s^2$ ai poli e $9.789\ m/s^2$ all'equatore.

(c) Latitudine e longitudine. Cenni.
Roma: latitudine $41^o, 53'$, longitudine $12^o, 29'$.

(d) Il campo gravitazionale generato dalla Terra non è altro che $\vec{g}$, a seguito della identità fra massa gravitazionale e massa inerziale.

Forza e accelerazione

(a) È maggiore la forza con la quale la Terra attira uno di noi o quella con la quale noi attiriamo la Terra ?

(b) Riprendiamo l' esempio della attrazione gravitazionale Terra-palla sulla superficie e palla-Terra. Le due forze $\vec{F_{Tp}}$ e $\vec{F_{pT}}$ sono uguali e contrarie, applicate una alla palla e l' altra alla Terra, ma le due accelerazioni sono MOLTO diverse (stessa forza non vuol dire stessa accelerazione, ovviamente). Ossia:

(c) In modulo, la forza con la quale la Terra attira la palla e quella con la quale la palla attira la Terra è la stessa. La forza gravitazionale ha un' espressione simmetrica nelle 2 masse (quella che esercita la forza e quella che ne risente). Ma allora, come mai la palla casca verso la Terra e la Terra non casca verso la palla ?

Come detto, stessa forza non vuol dire stessa accelerazione ... Noi cadiamo sulla Terra con accelerazione $\vec{g}$, mentre l' accelerazione di cui la Terra risente è $\vec{g}\ m/M_{terra}$, dove il rapporto m/M_{terra} è piccolissimo. Se m è circa 50 kg ad es., $50/5.98 \times 10^{24} \approx 8 \times 10^{-25}$, ossia la Terra non subisce alcuna accelerazione per causa nostra ... e per fortuna continua il suo moto imperturbata.

(d) Reazioni vincolari.

(e) **Terzo principio della dinamica (principio di azione e reazione)**. Attenzione: le forze della coppia azione e reazione sono due forze applicate a corpi diversi ! Esempio con la forza gravitazionale e con un oggetto in equilibrio su un tavolo: mg, forza gravitazionale che la Terra esercita sull' oggetto ed N, forza normale che il tavolo esercita sull' oggetto, non sono una coppia azione-reazione. Una coppia azione reazione, ad es., è N la forza che il tavolo esercita sull' oggetto (applicata all' oggetto) e quella che l' oggetto esercita sul tavolo (applicata al tavol).
Esempio con elastico che tira un corpo. Bilancio delle forze applicate quando il corpo è in equilibrio sul tavolo, con me che tiro l' elastico a cui è attaccato. Quale forza sta contrastando il moto del corpo ?

facoltativo: Forza gravitazionale fra corpi non puntiformi: $\vec{F} = \sum_i F_i = \sum_i \frac{G\mu_i m}{r_i^2}\hat{r}_i$ (se m è di un corpo puntiforme). Attrazione gravitazionale fra una massa distribuita uniformemente su una sfera e un punto materiale interno o esterno ad essa: conseguenze del teorema di Gauss.

Altri esempi di forze

(a) concetto di "filo inestensibile" e tensione $\vec{T}$: la tensione viene trasmessa identica su tutto il filo, masse collegate da un filo inestensibile si muovono con la stessa accelerazione (in modulo; il segno dipende dai casi specifici)

(b) La carrucola.
Macchina di Atwood (es. 4.4 pag. 124 Serway): calcolo tensione del filo e dell' accelerazione delle 2 masse. Discussione del caso $m_1 = m_2$, in cui si ha $T = m_1\ g = m_2\ g$ e il sistema è in equilibrio ($\vec{a}$=0). E discusso il caso $m_1 >> m_2$, che corrisponde alla "caduta libera", $|\vec{a}| = |\vec{g}|$ con l' ovvio vincolo dato dalla lunghezza del filo. Per risolverlo abbiamo preso l' asse y positivo verso l' alto per entrambe le masse. Notiamo che la tensione T è la stessa per entrambe, rivolta verso l' alto, mentre l' acc. è la stessa in modulo $|a_1| = |a_2|$, ma opposta in segno (se una massa sale l' altra scende). Avremmo anche potuto prendere il rif. positivo verso l' alto per descrivere il moto di m_1 e positivo verso il basso per descrivere il moto di m_2, ad esempio. Basta essere consistenti con la scelta fatta nello scrivere le equazioni.

3. $\boxed{\textbf{Quarta settimana, Lu 21 marzo- Ve 25 marzo. Lezioni 17-24}}$

Esercitazione Pesare un pacco in ascensore, con $a > 0$,$a < 0$ e $a = g$ (si ha la "caduta libera" se il cavo dell' ascensore si spezza ...). Immaginiamo la massa da pesare m_p attaccata nell' ascensore ad un dinamometro. Con una bilancia sotto sarebbe la stessa cosa. Sol: prendo il rif. positivo verso l' alto. In generale: $\vec{T} + m_p\ \vec{g} = m_p\ \vec{a}$, dove $\vec{T}$ è la tensione della fune, $\vec{a}$ l' accel. dell' ascensore.
Ascensore che sale, $\vec{a} = a$, positivo. Si ha: $T - m_p\ g = m_p\ a$ da cui $\rightarrow T = m_p(a+g)\ >\ m_p g$, ossia il pacco "pesa di più"; Ascensore che scende, $\vec{a} = -a$, negativo. Si ha: $T - m_p\ g = -m_p\ a$ da cui $\rightarrow T = m_p(g-a)\ <\ m_p g$, ossia il pacco "pesa di meno"; Cavo che si spezza, $\vec{a} = \vec{g}$. Si ha: $T - m_p\ g = -m_p\ a$ da cui $\rightarrow T = m_p(g-a) = 0$, ossia il pacco "non pesa nulla";
Per capire l' entità dell' effetto riscriviamo la relazione $T = m_p(g \pm a)$: $T = m_p\ g(1 \pm a/g)$. Dunque l' entità dell' effetto dipende dal rapporto a/g. Se $a = 2$ m/s l' effetto è del 20%.

Esercizio da svolgere: (Es.7 pag. 131 Serway) trovare accelerazione, modulo e fase, date $\vec{F_1}$ e $\vec{F_2}$ che agiscono su una massa, inizialmente a riposo, $m = 5$ kg. Le due forze hanno modulo, rispettivamente, 20 N e 15 N e formano fra loro a) un angolo $\alpha = 90^o$ e b) un angolo $\alpha = 60^o$. Soluzione più avanti negli appunti.

Calcolo della tensione del filo con una massa attaccata nei 3 casi: equilibrio, lo spingo verso il basso, lo tiro verso l' alto. La busta della spesa si sta rompendo..: cosa conviene fare rapidamente ? Tirarla verso l' alto o spingerla verso il basso ?

Dettato: un oggetto lanciato verticalmente verso l'alto impiega 4 secondi prima di tornare al punto di partenza. Trovare:
1) l'altezza massima alla quale arriva l'oggetto; 2) la velocità che esso possiede quando è a metà dell'altezza massima (si trascuri la resistenza dell'aria). Soluzione Più avanti vedremo che si può svolgere anche con il bilancio energetico.

Svolto Esercizio sulle forze, num. 33 esercizi Serway **Altri esempi di forze, la molla**:

(a) *Forza elastica* (di una molla)

$$F \;=\; -k\,x\,, \tag{7}$$

ove x è preso dalla posizione di equilibrio (a volte si incontra Δx invece di x, ad indicare che si tratta di una differenza rispetto a x_0 di equilibrio) e k è una costante, dipendente dalla molla, di unità N/m.
La forza è negativa se x è positivo, positiva se x è negativo, in quanto è una *forza di richiamo* verso la posizione di equilibrio $x = 0$.

Dinamometro (bilancia a molla): molla in verticale. Si attacca la massa che si vuole misurare. Per la legge di Hooke, si ha un allungamento della molla (rispetto alla posizione di riposo) pari, all' equilibrio, ad mg: $K\Delta x = m\ g$. La scala del dinamometro viene tarata in unità di massa, grammi o kg, supponendo nota g (messa al valore tipico Terra ... sulla Luna questa bilancia non darebbe il valore di massa corretto ...)

Molla e moto armonico:

(a) Se la lunghezza iniziale era L_0 e aggiungo una massa $m \to$ posizione di equilibrio L_{eq}, tale che forza elastica bilancia forza di gravità. Con riferimento verso il basso:

$$mg - k\,(L_{eq} - L_0) \;=\; 0\,. \tag{8}$$

Per una generica posizione $L = L_{eq} + x$

$$\begin{aligned} F_x &= mg - k\,(L - L_0) = mg - k\,(L_{eq} + x - L_0) && (9)\\ &= mg - k\,(L_{eq} - L_0) - k\,x && (10)\\ F_x(x) &= -k\,x\,. && (11)\end{aligned}$$

Ricordando "$F = m\,a$", otteniamo $a_x(x) = -(k/m)\,x$, ovvero

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}\,t^2} \;=\; -\frac{k}{m}\,x\,. \tag{12}$$

(b) Cosa ci ricorda la relazione (12) ?: $\to$ moto circolare uniforme.
Calcolo di $\omega = \sqrt{(k/m)}$ e $T = 2\pi\sqrt{(m/k)}$.

Notiamo che massa e peso sono due entità diverse, l' una si misura in kg e l' altro in newton. La massa è una caratteristica intrinseca e univoca del corpo, mentre il peso dipende dalla forza con la quale si viene attratti dal corpo celeste sul quale ci si trova. Con il dinamometro si misura la massa, supponendo nota e costante l' acc. di gravità. Se vogliamo una misura di massa indipendente da g dobbiamo usare una "bilancia a due bracci".

Continuiamo con altri esempi di forze

(a) *Forza di attrito statico e dinamico* indipendente dalla velocità su piano orizzontale:

$$F \;=\; -\mu_s\,m\,g\,\hat{v}\,, \tag{13}$$

$$F \;=\; -\mu_d\,m\,g\,\hat{v}\,, \tag{14}$$

ove μ_s è il *coefficiente di attrito statico*, μ_d è il *coefficiente di attrito dinamico*, m la massa del corpo e $\hat{v}$ il *versore* della velocità.
Questa forza è sempre frenante.

(b) *Forza di viscosità* dipendente linearmente dalla velocità:

$$F \;=\; -\beta\, v\,, \tag{15}$$

ove β è un opportuno coefficiente e v la velocità.

(c) *Forza di tensione* un filo inestensibile fissato ad un corpo esercita sul corpo una forza T. La forza si trasmette lungo tutto il filo. Non sottovalutate l' importanza delle forze di tensione !

(d) *Forza normale* quando un corpo comprime una superficie risente di una forza N da parte della superficie. ortogonale alla superficie stessa;

In generale ricordiamo che conoscendo la formula della forza si può determinare l'accelerazione da $a = F/m$ (se questa è la sola forza agente):

(a) *forza elettrostatica*: $a_i = (1/m_i)\, k_0\, Q_1\, Q_2\, /d^2$;

(b) *forza elastica*: $a = -(K/m)\, x$;

(c) *forza di attrito dinamico* $a = -\mu_d\, g$;

(d) *forza di viscosità* $a = -(\beta/m)\, v$;

Tutto..o quasi..sull' attrito
Attrito statico e dinamico;
Esempi sperimentali: peso trascinato da un elastico ("molla") sul piano della cattedra e su un altro materiale Stesso esperimento aumentando/diminuendo il peso (usiamo una scatolina piena di palline di vetro) Cosa si osserva ? Scatolina su un foglio di carta: se tiro il foglio "lentamente", la bottiglietta si muove con il foglio, se dò uno strattone il foglio si muove e la scatolina resta ferma. Perchè ?

Valori tipici di μ_S e μ_D. Li trovate comunque sul libro.
Importante ricordare che sono entrambi, per definizione, minori di 1 e adimensionali. Es.: acciaio-acciao: 0.74,0.54; gomma-cemento: 1,0.8; vetro-vetro: 0.94,0.4; articolazioni: 0.01, 0.003 (basso, per fortuna ...)

Piano inclinato

(a) **Piano inclinato senza attrito**. Importante una scelta semplice e sensata degli assi. Prendiamo x parallelo al piano e y ovviamente ortogonale al piano. Equilibrio su y, moto unif. accel. su x, con $a = m\ g\ \sin(\alpha)$, dove α è l' angolo formato dal piano inclinato con l'orizzontale.
"Situazioni limite: $\theta = 0$ (accelerazione nulla) e $\theta = \pi/2$ (accelerazione pari a g) Fate, esercizio sul piano inclinato (pag. 124 Serway): un bambino trattiene ferma una slitta che pesa 77 N su un pendio privo di attrito (ghiacciato, il bambino ha scarpe chiodate), che forma un angolo di $\alpha = 30^o$ con l' orizzontale. Calcolare a) il modulo della forza che il bambino deve esercitare sulla fune, b) il modulo della forza che il piano inclinato esercita sulla slitta. Sol: a) all' equilibrio (slitta ferma) $F_b = (m_s\ g) \sin\alpha =$

$77\times \sin\alpha$= 77 $\times$ 0.5=38.5 N; b) $F_p = (m_s\ g)\cos\alpha$= $77\times\cos\alpha$= 77 $\times$ 0.86=66.7 N;

(b) **Piano inclinato con attrito**: situazione dinamica e situazione statica. Nella situazione dinamica un corpo sul piano scivola verso il basso con accel. minore della situazione in cui non c' è attrito: $a = g\sin(\alpha) - \mu_D g\cos(\alpha)$. Siamo nella situazione in cui la gravità lo fa scivolare verso il basso e l' attrito tende a frenare questo moto verso il basso. Le 2 accelerazioni hanno segno opposto fra loro !

Invece $a = -(g\ sin(\theta) + \mu_D\ g\ cos(\theta)$ nel caso in cui la massa stia salendo sul piano (perchè è stata spinta). Il corpo sale per un certo tratto, rallentato finchè non si ferma, sia dalla forza di gravità che dall' attrito. Notiamo dunque che le forze di gravità e attrito, in questa situazione, ostacolano entrambe il moto e pertanto hanno lo stesso segno. Se non ci fosse attrito il corpo salirebbe di più. Studiamo ora il caso di equilibrio: calcolo di $tan\theta_S = \mu_s$ e di $tan\theta_D = \mu_D$ (angolo tale che il corpo continui a muoversi con v=costante, ossia $a = 0$).

Mostrato in classe, con un "piano inclinato" fatto con una scatola (vuota, di cioccolatini) e un pesetto (scatoletta di palline). Vediamo che, per inclinazioni basse, il pesetto non scivola. Da una certa inclinazione in poi scivola. Se aggiungiamo un panno fatto di materiale tale che l' attrito con la scatola sia maggiore di quello del solo vetro del pesetto usato, notiamo una grande differenza nella inclinazione minima del piano. Possiamo anche calcolare μ_S, inclinando il piano alla massima inclinazione possibile senza che il pesetto scivoli e misurando, con il metro, i due cateti del triangolo rettangolo formato dal piano con la cattedra ($\mu_D = l_y/l_x$). Lo facciamo con l' aiuto di uno studente e una studentessa e misuriamo: $ipotenusa$ = 40 cm, l_y = 17 cm e l_x = 36 cm. Dunque l' ipotenusa non la usiamo. Troviamo $\mu_D = l_y/l_x = 0.47$, che significa un angolo di circa 25^o. Mettendo un panno fra la scatoletta e il piano aumentiamo l' attrito -lo vediamo sperimentalmente, il piano si può inclinare di più rispetto a prima senza che la scatoletta scivoli. Rifacciamo le misure, che portano a $\mu_D = l_y/l_x = 21/34 = 0.62$

Pendolo semplice: periodo delle piccole oscillazioni ($sin\theta \approx \theta$). Massa m legata ad un punto da un filo inestensibile di lunghezza l e massa trascurabile. Coordinata curvilinea s lungo la circonferenza, con $s = 0$ in corrispondenza della verticale e verso positivo quando l'angolo θ è "a destra". Scomposizione delle forze:

$$m\,g\cos\theta \;\Rightarrow\; \text{compensata dalla tensione del filo} \quad (16)$$

$$-m\,g\sin\theta \;\Rightarrow\; \text{forza tangente} \Rightarrow \text{moto di}\, m. \quad (17)$$

Di nuovo, da "$F = m\,a$", segue

$$\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}\,t^2} = -g\,\sin\theta \quad (18)$$

$$
\begin{aligned}
l\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}\,t^2} &= -g\,\sin\theta && (19)\\
\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}\,t^2} &= -\frac{g}{l}\,\sin\theta, && (20)
\end{aligned}
$$

ove abbiamo usato la relazione $s = l\,\theta$ (che deriva dalla definizione di radiante: $\theta = s/l$). Nell'approssimazione di piccoli angoli ($\theta \ll 1$, con θ espresso in radianti): $\sin\theta \approx \theta$, ove l'approssimazione si intende valida per $\theta \lessapprox 0.1$ radianti, ovvero $\lessapprox 5$ gradi:

$$
\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}\,t^2} \approx -\frac{g}{l}\,\theta\,. \tag{21}
$$

Cosa ci ricorda la relazione (21)? : $\rightarrow$ moto circolare uniforme:

$$
\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}\,t^2} = -K\,z\,, \tag{22}
$$

ove z è una generica variabile dipendente dal tempo, ovvero $z(t)$.
Pulsazione $\omega = \sqrt{g/l}$, periodo $T = 2\pi\sqrt{l/g}$.

Esercitazione: 1) Calcolate il semiperiodo di un pendolo di lunghezza 1 m. Calcolate di quanto devo allungare o accorciare il filo del pendolo per avere lo stesso periodo sulla luna

2) Un pendolo compie 30 oscillazioni al minuto. L' angolo massimo di oscillazione vale $\theta_0 = 4$ gradi. Trovare: a) la pulsazione; b) la velocità angolare e c) l' accelerazione angolare del filo, entrambe al tempo $t = 0.25$ s a partire dall' istante in cui $\theta = \theta_0$.
Sol. numerica: a) 3.14 rad/s ; b) -8.9 gradi/s; c) -28 gradi/s^2.
Soluzione: $T = 2$ s; $\omega = \pi$ rad/s. $\theta_0 = 4$ gradi, massima ampiezza angolare. $\theta(t) = \theta_0\ \cos(\omega\ t)$; ossia, a t=0, l' angolo deve valere θ_0 (max); $\dot\theta(t) = -\omega\theta_0\ \sin(\omega\ t)$; $\ddot\theta(t) = -\omega^2\theta_0\ \cos(\omega\ t)$; Se θ_0 è in gradi, il risultato viene in gradi al secondo, per la velocità, e gradi al secondo quadrato per l' accelerazione. ω va espresso in radianti/secondo.

3) Calcolate il semiperiodo di un pendolo di lunghezza 1 m. Calcolate di quanto devo allungare o accorciare il filo del pendolo per avere lo stesso periodo sulla luna

Forza centripeta. Attenzione: non è una nuova forza ! Nel diagramma delle forze non va disegnata una freccia che corrisponde alla forza centripeta !
L' acc. centripeta, e dunque la forza centripeta, viene data da una delle forze in gioco nel problema in esame. Esempi classici:
sasso che ruota legato ad una corda $\rightarrow$ tensione della corda: $\vec{T} = m\vec{a}$ da cui $T - ma = 0$, $T = ma = m\omega^2 r = mv^2/r$;
Sasso che ruota legato ad una molla $\rightarrow K\vec{x}$:
Terra che ruota attorno al Sole $\rightarrow$ forza gravitazionale;
Automobile in curva $\rightarrow$ attrito statico delle ruote sull' asfalto.

Accelerazione centripeta ed esempi:

(a) Moto circolare uniforme e accelerazione centripeta:
accelerazione centripeta della Terra nel suo moto attorno al Sole (con calcolo approssimato della distanza Terra-Sole partendo dall' informazione che la luce del Sole impiega circa 8 minuti per raggiungere la Terra);
Come si fa ? $d_{TS} \approx 8.3$ min-luce$= 8.3 \times 60 \times 3 \times 10^8$ m $\approx 1.5 \times 10^{11}$ m. Inoltre $T_{1anno} = 365 \times 86400\,\mathrm{s} \approx 3.2 \times 10^7$ s. $a_{cTS} = (\frac{2\pi}{T})^2\, d_{TS} \approx 5.95 \times 10^{-3}$ m/s^2.

(b) Accelerazione centripeta della Terra nel suo moto di rotazione su sè stessa e conseguenze sul valore di g.
Notiamo inanzitutto che la pulsazione, ossia la frequenza di rotazione della Terra attorno al suo asse è ovviamente ovunque la stessa, mentre la velocità lineare v dipende dalla distanza dall' asse di rotazione, ed è pertanto massima all' equatore e nulla ai poli. Il periodo è di un giorno $T = 24 \times 3600 = 86400$ s, $R_T = 6.37 \times 10^6$ m.
$a_{cT} = (\frac{2\pi}{T})^2\, R_T \approx 3 \times 10^{-2}$ m/s^2, se siamo all' equatore, dove è massima. Dunque è ovunque molto minore di g. E' nulla ai poli.

(c) Se sto su una bilancia all' equatore $\vec{T} + m\vec{g} = m\vec{a}$, prendendo il rif. positivo verso l' esterno: $T - m\ g = m\ a = -m\ \omega^2\ R_T \rightarrow \quad T = m(g - \omega^2\ R_T)$. Dunque l' accelerazione risultante, pertanto il peso, è diminuita dalla presenza dell' acc. centripeta, ma numericamente l' effetto è trascurabile. L' effetto è massimo all' equatore, diminuisce andando verso i Poli, a latitudini più alte, ed è nullo ai Poli.

(d) Derivazione della terza legge di Keplero da $-GM_s m_p/d^2 = m_p(2\pi/T)^2\ d$. Si trova che $T^2 \approx d^3$. Nelle orbite dei satelliti o pianeti la forza centripeta è dovuta alla forza di gravità.
d qui è il raggio dell' orbita del pianeta o satellite considerato. Mercurio era il messaggero degli dei ed era infatti il più veloce.

(e) Trovare la distanza dal centro della Terra di un satellite geostazionario. Il punto di partenza è capire cosa vuol dire "geostazionario": rispetto alla Terra è fermo (se non fosse così i satelliti non potrebbero essere utilizzati nella trasmissione dei segnali). Dunque un satellite geostazionario deve ruotare attorno alla Terra con lo stesso periodo con il quale la Terra ruota su sè stessa: durata di un giorno siderale 86140 s ($\approx$ durata del giorno solare medio).
Capito questo: $G\, M_T/d^2 = a_c = \frac{(2\pi)^2}{T^2}\ d$; $M_T = 5.98\ 10^{24}$ kg. Si trova $d^3 = \frac{M_T g T^2}{(2\pi)^2}$, da cui $d \simeq 4.2 \times 10^4$ km, distanza dal centro della Terra, ossia circa 36000 km dalla superficie.

(f) Esercizio (Serway pag. 95 es. 3.7): Una astronave è in orbita al di sopra della superficie terrestre a 200 km. Il periodo dell' orbita è $T = 88.2$ minuti. Calcolare l' acc. centripeta $a_r c$ e la velocità v. Notiamo che la distanza dal centro della Terra è: $d = R_T + 200 \times 10^3$ m=66.5×10^6 m. Confrontate il valore dell' acc. centripeta ottenuta con g e rifletteteci sopra. Viene $a_c = 9.25$ m/s^2. E $v = \frac{2\pi d}{T}$ viene circa 28000 km/ora.

(g) Calcolare la massima velocità alla quale posso far ruotare, su un piano orizzontale, un sasso di massa m nota, attaccato ad una corda di lunghezza nota l, la quale sopporta una massima tensione T_{max} prima di rompersi: Sol: $T = mv^2/l$, da cui $v_{max} = \sqrt{T_{max}l/m}$.

(h) Massa di prova m messa invece in moto attorno alla Terra, a distanza $r \approx R_T$. L' applicazione di $\vec{F} = m\vec{a}$, dove ora $\vec{a}$ è $-m\omega^2 R_T$, ossia l' accelerazione centripeta, porta ad ω $\omega = 0.0012$ rad/s e $T = 5045$ s. Identica al caso del moto nel pozzo passante per il centro della Terra, vedi dopo.

Facoltativo: Pozzo per il centro della Terra. Applicazione al problema del 'pozzo per il centro della Terra': forza gravitazionale in funzione della distanza r dal centro della terra:

$$\begin{aligned} F(r) &= -\frac{G\,M(r)\,m}{r^2} && (23)\\ &= -\frac{G\,\rho\,V(r)\,m}{r^2} && (24)\\ &= -\frac{G\,\rho\,4/3\,\pi\,r^3\,m}{r^2} && (25)\\ &= -4/3\,\pi G\,\rho\,m\,r, && (26)\end{aligned}$$

ove ρ indica la densità della terra ($5.5\,10^3\,\mathrm{kg/m^3}$). Da "$F = m\,a$" segue l'equazione differenziale

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}\,t^2} &= -\frac{4}{3}\,\pi\rho\,G\,r && (27)\\ \frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}\,t^2} &= -\frac{g}{R_T}\,r\,, && (28)\end{aligned}$$

ove l'ultima espressione è stata ottenuta ricordandoci che $a_r(r = R_T) = \mathrm{d}^2r/\mathrm{d}\,t^2(r = R_T) = -g = -\frac{4}{3}\,\pi\rho\,G\,R_T$ (bastava anche semplicemente pensare che l'accelerazione è lineare in r e per $r = R_T$ sappiamo che vale $-g$). Si noti inoltre come la formula $T = 2\pi\,\sqrt{R_T/g}$ potrebbe trarre in inganno e far pensare che il periodo dipende da R_T: in realtà g è quello sulla superficie terrestre, ovvero andrebbe indicato con $g(R_T)$: esso dipende linearmente da R_T, in quanto $g(R_T) = 4/3\,\pi\,\rho\,G\,R_T$, e quindi $R_T/g(R_T)$ non dipende da R_T. Numericamente: $\omega = 0.0012$ rad/s e $T = 5045$ s.

4. -**Proposte di esercizi- Ne abbiamo fatti (o ne faremo) alcuni a lezione**

Esercitazione

(a) Es. 33 pag. 133 Serway. Trovate qui la soluzione completa. Testo: 2 masse $m_1 = 8$ kg, $m_2 = 2$ kg collegate da filo e carrucola su un piano s.a., m_1 è sul piano, mentre m_2 è sulla verticale, attaccata al filo. Su m_1 agisce una forza F_x costante. Domande: a) per quali valori di F_x, la massa m_2 accelera verso l' alto ? b) per quali valori di F_x, la tensione della fune è nulla ? ; Sol: riferimento x positivo verso destra, diretto come F_x e y positivo verso l' alto. $F_x - T = m_1 a$, $T - m_2 g = m_2 a$, dove a è la stessa per le due masse, anche nel segno (se m_1 va verso destra, m_2 sale: accel. positiva per tutte e due le masse). Sommando le 2 equazioni ho: $F_x - m_2 g = (m_1 + m_2)a$, da cui $a = \frac{F_x - m_2 g}{m_1 + m_2}$. Dunque l' acc. è positiva se F_x è maggiore di $m_2 g = 19.6$ N.
Seconda domanda: dobbiamo ricavare T e porla uguale a zero. $T = F_x - m_1 a = F_x - m_1 \frac{F_x - m_2 g}{m_1 + m_2} = \frac{F_x m_2 + m_1 m_2 g}{m_1 + m_2}$, che è nulla per $F_x = -m_1 g = -78.5$ N.
In quali casi abbiamo che l' accel. è pari a g, ossia la caduta libera ? Supponiamo $F_x = 0$. Se $m_2 >> m_1$ allora, dalla eq. di a, si a che a=-g,

(b) Fate, Esempio discusso a fondo a lezione, nelle scorse settimane. Riguardatelo: es. variazione da es. 29 pag. 133 Serway: un corpo è spinto su un piano inclinato s.a., con velocità iniziale $v_0 = 5$ m/s. Il piano forma un angolo $\theta = 20^o$ con l' orizzontale. Dom: cosa succede ? Quanta strada fa il corpo ? Rispondere alla stessa domanda nel caso in cui ci sia attrito con $\mu_D = 0.5$. Notiamo che in questo caso il corpo è spinto verso l' alto, con una certa velocità iniziale, a differenza del caso del corpo che scivola in giù sul piano inclinato. Ora sia la forza di gravità che l' attrito si oppongono al moto e lo rallentano. Dunque il segno relativo dell' acc. dovuta alla gravità e di quella dovuta all' attrito ora è lo stesso ! Soluzione: Dati: $v_0 = 5$ m/s, il piano forma un angolo $\theta = 20^o$, $\mu_D = 0.5$. Inoltre: $sin(\theta) = 0.34$, $cos(\theta) = 0.94$. Prendiamo direttamente la relazione $x(v)$ nel moto unif. accelerato con accelerazione a: $x(v) = \frac{v^2 - v_0^2}{2a}$, dove $v = 0$ alla fine (il corpo si ferma) e $a = -g\ sin\theta$ nel primo caso e $a = -(g\ sin\theta + \mu_D\ g\ cos\theta)$ nel secondo caso, con attrito. Il corpo, in entrambi i casi, sale per un certo tratto, rallentato finchè non si ferma nel primo caso solo dalla forza di gravità e nel secondo caso sia dalla gravità che dall' attrito. Notiamo che le forze di gravità e attrito, in questa situazione, ostacolano entrambe il moto. La decelerazione è maggiore in presenza di attrito. Avremo:
1) solo gravità: $a = -9.8 \cdot 0.34 = -3.35$ m/s^2 e $x = 25/(2 \cdot 3.35)$=3.73 m;
2) gravità e attrito: $a = -(9.8 \cdot 0.34 + 9.8 \cdot 0.5 \cdot 0.94) = -7.96$ m/s^2 e $x = 25/(2 \cdot 7.96)$=1.57 m. Verificate i conti !

(c) Cilindro al Luna Park: es. 53 pag. 174 Serway: cilindro del Luna Park che ruota attorno al suo asse, in modo tale da bloccare una persona sulla parete, quando il pavimento viene tolto. Calcolare quanto deve valere il periodo di rotazione affinchè la persona non cada. Il coeff. di attrito statico vale $\mu_S = 0.4$ e il raggio del cilindro $R = 4$ m. Trovate qui la traccia soluzione:
asse y, positivo verso l' alto: $f_a - mg = 0$;
asse x, positivo verso l' asse: $n = mv^2/R$;
dove $f_a = \mu_s n$ è la forze di attrito statico e $\vec{n}$ è la reazione del vincolo, ossia della parete che spinge la persona verso l' asse del cilindro.
Da qui: $\mu_s\ mv^2/R = mg$ per avere equilibrio. Sostituendo $v = \frac{2\pi R}{T}$, si ha $T <= T_{eq} = \sqrt{\frac{\mu_s R 4\pi^2}{g}}$ =2.54 s. E viene $\omega >= 2.47$ rad/s.

Concetto di forze apparenti:

(a) Partendo dall' esercizio automobile in curva, su piano orizzontale, introdotto il concetto di forza apparente, che in questo caso chiamiamo centrifuga $\vec{f}_{centrifuga} = -m\vec{a_c}$. Radiale e diretta verso l' esterno: $\vec{T} + \vec{f}_{centifuga} = 0$, dove $f_{centrifuga} = mv^2/r$. L' equazione $F = ma$ è posta $= 0$ perchè, ragionando come se le fosse apparenti davvero esistessero, io sono fermo, e "penso" che su di me agiscano 2 forze che si equilibrano: l' attrito delle ruote sull' asfalto, che mi tira verso l' interno, e una forza apparente, ora centrifuga, che mi spinge verso l' esterno.

(b) Le forze apparenti sono una manifestazione del principio di inerzia. Questo vale anche se sono su un treno o macchina che frena: ci sentiamo "spinti". Verso dove ? Da cosa ?

(c) Esempio 5.7 pag. 152 Serway: trovare la max velocità che può avere un' auto in curva su strada piana con μ_s, senza sbandare. Ragioniamo in termini di forze apparenti: la forza centrifuga ci spinge verso l' esterno e l' attrito "reagisce" tirandoci verso l' interno, finchè ce la fa ... ossia, per velocità maggiori di un certo valore, la forza di attrito non riesce a compensare la forza centrifuga e la macchina slitta verso l' esterno della curva: $f_a = -\mu_s N$, dove $N = mg$ (la macchina è su una strada piana), $f_a + f_{centrifuga} = 0$; $f_{centrifuga} = mv^2/r$ (r=raggio della curva). Dunque, per non sbandare: $mv^2/r < \mu_S mg$. Da cui: $v_{max} = \sqrt{\mu_S g r}$. Se $\mu_S = 0.5$ e r=35 m, si ha: $v_{max} = 47.2$ km/h. Se la macchina, a velocità 10m/s, sbanda in un giorno di pioggia, quanto vale μ_S ? $\mu_S = v^2/(rg)$=0.186.

(d) Possiamo risolvere così anche l' esercizio sulla misura del peso di un oggetto (oppure di noi stessi su una bilancia) su un ascensore accelerato con $a > 0$ e $a < 0$, confronto analisi fatta dai due diversi punti di vista: nell' ascensore e fuori, come era stato svolto qualche lezione fa. $\vec{T}+\vec{f}_{apparente}+mg$=0, dove $\vec{f}_{apparente} = -m\vec{a}$. Ossia, se l' ascensore sale verso l' altro: $T-mg-ma = 0$, che porta allo stesso risultato ottenuto senza il concetto di forza apparente.

Esercizi su cinematica e dinamica

(a) Esercizio di esonero del 2/03/06:
Il periodo di rotazione del piatto di un giradischi è T=1.8 s. Si colloca una piccola moneta sul piatto e si mette in moto il giradischi. La moneta rimane in quiete rispetto al piatto se la si colloca ad una distanza minore di 9.2 cm dall'asse di rotazione, altrimenti, per una distanza maggiore, inizia a muoversi. Quanto vale il coefficiente di attrito statico tra la moneta ed il piatto?
Sol: La forza centripeta deve essere fornita dalla forza di attrito statico, troviamo innanzitutto la velocità angolare:
$\omega \ = \ 2\pi/T \ = \ 2\pi/1.8 \ = \ 3.49 \ rad/s$
$F_c \ = \ m\omega^2 R = \mu_s mg \ \Rightarrow \ \mu_s \ = \ \omega^2 R/g \ = \ 3.49^2 \cdot 0.092/9.8 \ = \ 0.11$

(b) Es. di esonero 2/03/06:
La massa campione di 1.0 kg è agganciata ad una molla di costante elastica incognita. Quando la massa viene messa in oscillazione si osserva che il periodo è di 1.43 s. Quando si rimpiazza la massa campione con un oggetto di massa sconosciuta, si nota che il periodo di oscillazione è di 1.85 s. Determinare: a)la costante elastica della molla, b) la massa dell'oggetto sconosciuto.
Sol: Il periodo di un pendolo è: $T \ = \ 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$
$\Rightarrow \ k \ = \ m \cdot (\frac{2\pi}{T})^2 \ = \ 1 \cdot (\frac{2\pi}{1.43})^2 \ = \ 19.3 \ N/m$
b) $m \ = \ k \cdot (\frac{T}{2\pi})^2 \ = \ 19.3 \cdot (\frac{1.85}{2\pi})^2 \ = \ 1.67 \ kg$
Da notare che, a parità di molla (cioè di k), vale la relazione: $m/T^2 \ =$ costante, quindi:

$m_2 \ = \ m_1 \cdot (\frac{T_2}{T_1})^2 \ = \ 1 \cdot (\frac{1.85}{1.43})^2 \ = \ 1.67 \ kg$

(c) Esercizio: serve per vedere se avete capito i vettori. Testo: Date le forze $\vec{F_1} = (3, 1, 2)$ N e $\vec{F_2} = (-1, -5, 1)$ N, trovare a) l' angolo fra di esse; 2) il valore di un' altra forza $\vec{F_3}$ tale che le tre forze, applicate contemporaneamente ad un punto materiale, non ne cambino la velocità.
Sol. numerica: a) $\alpha = 1.88$ rad; b) $\vec{F_3} = (-2, 4, -3)$ (modulo 5.4 N).

(d) Un oggetto, lanciato, parallelamente al terreno, da una torre alta $60m$ su un terreno pianeggiante tocca terra a distanza 40 m dalla base della torre. Calcolare il modulo della velocità dell' oggetto al momento dell' impatto.
Sol. numerica: 28 m/s.

Altri esercizi

(a) Soluzione esercizio lancio verso l' alto, dettato precedentemente Un oggetto lanciato verticalmente verso l'alto impiega 4 secondi prima di tornare al punto di partenza. Trovare:
1) l'altezza massima alla quale arriva l'oggetto; 2) la velocità che esso possiede quando è a metà dell'altezza massima (si trascuri la resistenza dell'aria). Sol:

1) Per simmetria, il tempo di salita è pari a quello di discesa. Dunque $t_{max} = 2$ s. L' oggetto deve avere una velocità iniziale v_0, altrimenti non andrebbe verso l' alto.
La ricaviamo da $v = v_0 - gt$, ponendo v=0 a $t = t_{max}$. Si ha $v_0 = g\, t_{max}$. dunque l'altezza raggiunta è data da:
$h_{max} = g\,(t_{max})^2 - g\,(t_{max})^2/2$. Avendo sostituito l' espressione di v_0 nella formula dello spazio. Ossia
$h_{max} = g\,(t_{max})^2/2$=9.8 $2^2/2$= 19.6 m.
Notiamo anche che il problema poteva anche essere risolto con il concetto di velocità media e moto uniforme equivalente a quello dato. La velocità va, nel tratto in salita, da v_0 a 0, dunque $\overline{v} = v_0/2$. Poi $h_{max} = \overline{v}\, t_{max}$, che porta allo stesso risultato.
2) Per trovare la velocità per la quota $z = h_{max}/2$ usiamo l' espressione della velocità in funzione dello spazio percorso nel modo uniformemente accelerato (si può anche passare per l' uso della variabile tempo), $v^2 - v_0^2 = 2a\,h$, con $h = h_{max}/2$ e $a = -g$
$v_m = \sqrt{v_0^2 - 2g\,\frac{h_{max}}{2}} = 13.9\,\mathrm{m/s}$. Si può anche risolvere cercando il tempo al quale $h = h_{max}/2$ e sostituendolo nell' espressione della velocità. Si può svolgere anche con il bilancio energetico, come vedremo.

(b) Soluzione esercizio: (Es.7 pag. 131 Serway) trovare accelerazione, modulo e fase, date $\vec{F_1}$ e $\vec{F_2}$ che agiscono su una massa, inizialmente a riposo, $m = 5$ kg. Le due forze hanno modulo, rispettivamente, 20 N e 15 N e formano fra loro a) un angolo $\alpha = 90^o$ e b) un angolo $\alpha = 60^o$.
Soluzione:
La forza risultante su m è: $\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2}$, l' accelerazione è: $\vec{a} = \frac{\vec{F_1}+\vec{F_2}}{m}$.
Prendiamo, per entrambe le situazioni, l' asse x lungo la direzione e con il verso di $\vec{F_1}$. L' asse y lungo la direzione e con il verso di $\vec{F_2}$ come è nel primo caso. Dunque, nel primo caso ciascuna forza agisce solo su un asse, nel secondo caso la forza $\vec{F_2}$ va proiettata su x ($F_2 \cos\alpha$) e su y ($F_2 \sin\alpha$). Si ha dunque:
Caso 1: $\vec{a} = \frac{20\hat{\imath}+15\hat{\jmath}}{5}$.
Da cui: $|a|$= 5 m/s2 e fase 36.9^o
Caso 2: $\vec{a} = \frac{(20+15\cdot 0.5)\hat{\imath}+15\cdot 0.87\hat{\jmath}}{5}$
dove 0.5 e 0.87 sono rispettivamente $\cos\alpha$ e $\sin\alpha$.
Da cui: $|a|$= 6.1 m/s2 e fase 25.3^o

(c) Svolto: Un oggetto di massa 1 kg è posto su un piano scabro. Si determina empiricamente che affinché l'oggetto cominci a scivolare è necessario inclinare il piano di 30 gradi. Successivamente il piano è riposizionato orizzontalmente e l'oggetto è tirato con una molla di costante elastica $k = 1000\,\mathrm{N/m}$. Determinare di quando si è allungata la molla quando l'oggetto comincia a muoversi. Sol:

Dall'angolo in cui l'oggetto comincia muoversi otteniamo il coefficiente di attrito statico, in quanto $mg\sin\theta = \mu_s mg\cos\theta$, ovvero $\mu_s = \tan\theta$, pari a $1/\sqrt{3} = 0.577$ con i dati del problema. Quando il piano è orizzontale la condizione di 'stacco' è data da $k\,\Delta x = \mu_s mg$, da cui $\Delta x = \mu_s mg/k = 5.6\,\mathrm{mm}$

(d) Un orologio a pendolo viene portato sulla Luna, dove ricordiamo che $g_L = g/6$. Quanto tempo impiegano le sfere dell' orologio ad indicare un tempo apparente di 12 h ? Sol:
Periodo del pendolo sulla luna $T_L = 2\pi\sqrt{l/g_L}$= $2\pi\sqrt{(6\cdot l)/g}$, dove g=9.8 m/s^2. Dunque: $T_L = \sqrt{6}T_T$, maggiore del periodo sulla Terra, T_T. Dunque, 12 ore apparenti sulla luna sono date da un tempo maggiore di 12 ore, ossia $t_L^{12h} = \sqrt{6}\cdot 12$= 29.4 ore.

(e) Un topolino è fermo a 2 m dalla tana, quando vede un gatto, alla distanza di 2 m, che sopraggiunge alla velocità di 4m/s. Gatto, topo e tana sono allineati. Con quale velocità il topolino deve scappare, per raggiungere la tana senza essere acchiappato dal gatto ? Sol:
Il topo deve percorrere almeno d_T=2 m, nel tempo t_G in cui il gatto percorre $d_G = d_T + 2$= 4 m, alla velocità $v_G = 4$ m/s. Si ha: $t_G = d_G/v_g = 1$ s.
Dunque $v_T > d_T/t_G$= 2 m/s.

(f) Un blocco di massa $m = 6.4$ kg è appoggiato ad una parete verticale. Il coeff. di attrito statico blocco-parete è $\mu_S = 0.76$. Trovare: 1) il valore minimo di una forza $\vec{F}$ orizzontale, che spinge il blocco contro la parete, senza farlo scivolare; 2) se $F = 50$ N e $\mu_S = 0.6$, calcolare l' accelerazione (modulo,direzione e verso) a cui è soggetto il blocco.
Sol numerica: $F_{min} = 82.6$ N; a= 5.12 m/s^2, diretta verso il basso.

(g) Durante una gara di motocross una motocicletta corre in direzione di un fossato. Sul bordo di questo è stata costruita una rampa con un angolo di 10° con l'orizzontale per permettere alla motocicletta di saltare il fossato. Se, per superare il fossato, la motocicletta deve saltare una distanza orizzontale di 7 m, quale deve essere il modulo della sua velocità quando si stacca dalla rampa? Sol: si può usare l' equazione della gittata, ponendola $R = 7$ m

(h) Tarzan, di massa 61 kg, dondola appeso ad una liana lunga 6.5 m. Si trovi la tensione della liana quando si trova in posizione verticale, sapendo che Tarzan in questo punto ha una velocità di 2.4 m/s. Sol: 652 N

(i) Un ragazzo sta tirando una valigia di 15 kg con velocità costante lungo il pavimento tramite una cinghia che forma con l'orizzontale un angolo di 45°.Sapendo che il coefficiente di attrito dinamico tra il pavimento e la valigia è di 0.36, si trovino: la forza normale; la tensione della cinghia. Sol: 108 N; 55 N

(j) Una massa di 500 g viene fissata ad una molla verticale di costante elastica incognita. La massa viene messa in oscillazione lungo l'asse verticale. Prendendo l'origine del sistema di riferimento nel punto di riposo della molla, orientato verso il basso, si osserva che la massa oscilla tra le posizioni $y_{min} = 5\ cm$ e $y_{max} = 25\ cm$. Si trovi: L'ampiezza dell'oscillazione del moto armonico; la costante elastica della molla; il periodo del moto armonico. Sol:a) L'ampiezza del moto armonico è la metà della massima escursione della massa:

$$A = \frac{y_{max} - y_{min}}{2} = \frac{25 - 5}{2} = 10\ cm$$

b) questo vuol dire che la massa sta oscillando intorno al punto $y_0 = y_{min} + A = 5 + 10 = 15$ cm. In questo punto l'accelerazione della massa è nulla, questo vuol dire che la forza di richiamo elastica è compensata dalla forza di gravità. In altri termini, se noi attacchiamo la massa alla molla, e facciamo in modo che essa si allunghi senza oscillare, la molla si allungherebbe proprio della lunghezza y_0:

$$Ky_0 = mg \ \Rightarrow \ K = \frac{mg}{y_0} = \frac{0.5 \times 9.8}{0.15} = 32.7\ N/m$$

c) Il periodo dell'oscillatore armonico massa-molla è dato dalla formula:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}} = 2\pi\sqrt{\frac{0.5}{32.7}} = 0.78\ s$$

(k) Automobile in curva, di raggio R su strada inclinata senza attrito (liscia): calcolare la velocità per non sbandare. Impostazione del problema:
α: angolo del piano inclinato rispetto al piano orizzontale; θ: angolo della reazione vincolare rispetto al piano orizzontale (ovvero $\theta = \pi/2$ - α). Asse orizzontale= asse x, positivo verso l' esterno della curva;
Dinamica: forze in gioco: $\vec{F_g} = [0, -mg]$ $\vec{T} = [-T\cos(\theta), Tsin(\theta)]$
$\vec{F_{tot}} = \vec{F_g} + \vec{T} = [-Tcos(\theta), -mg + T\sin(\theta)]$.
B) Cinematica/dinamica:
Dall' espressione di F_{tot} si ricava:
sull' asse y: $-mg + T\sin(\theta) = 0$, $T = \frac{mg}{\sin\theta}$
sull' asse x: $-T\ \cos(\theta) = -mv\ 2/R$.
Da cui, sostituendo il valore di T, semplificando ed esplicitando la velocità, si ha: $v = \sqrt{Rg\tan\theta}$.
Notiamo che questo valore è un valore esatto. Se la velocità fosse diversa, sia minore che maggiore, la macchina scivolerebbe a distanza minore o maggiore dal centro della curva.

5. $\boxed{\textbf{Quinta settimana, Lu 28 marzo- Ve 1 aprile. Lezioni 25-32}}$

Moto del pendolo semplice. Vedi gli appunti precedenti

Lavoro, energia cinetica

(a) Definizione del **lavoro** in caso *unidimensionale* e per forza costante: $L = F\,\Delta s$ ("forza per spostamento").
Lavoro nel caso di forza che dipende dalla posizione: $L = \sum_{i=1}^{n} L_i = \sum_{i=1}^{n} F_i \Delta_{x_i}$ e limite ($n \to \infty$; $\Delta_{x_i} \to 0$):

$$L|_{x_1}^{x_2} = \int_{x_1}^{x_2} F(x)\,\mathrm{d}x\,. \tag{29}$$

(b) Lavoro come area sotto la curva F(x).

(c) Lavoro sul piano x-y. Prodotto scalare fra due vettori (forza e spostamento in questo caso).

(d) lavoro totale nel caso di più forze agenti su un corpo.

(e) Esempio persona che trascina una valigia per un tratto Δx, considerando anche l' attrito: calcolo del lavoro compiuto da tutte le forze, nei 2 casi in cui 1) la forza che tira la valigia sia parallela all' asse del moto; 2) la forza che tira la valigia formi un angolo α con l' asse del moto (in questa situazione $N = mg - F\sin\alpha$).

(f) Definizione dell'energia cinetica e connessione al lavoro mediante il teorema dell'energia cinetica (o delle 'forze vive'), consequenza di "$F = m\,a$":

$$\begin{aligned}
L|_{x_1}^{x_2} = \int_{x_1}^{x_2} F(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{x_1}^{x_2} m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}x & (30)\\
&= \int_{x_1}^{x_2} m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\,v\,\mathrm{d}t & (31)\\
&= \int_{x_1}^{x_2} m\,v\,\mathrm{d}v & (32)\\
&= \frac{1}{2}\,m\,v^2\Big|_{x_1}^{x_2} = \frac{1}{2}\,m\,v^2(x_2) - \frac{1}{2}\,m\,v^2(x_1) & (33)\\
&= E_c(x_2) - E_c(x_1)\,, & (34)
\end{aligned}$$

avendo definito $E_c = (1/2)\,mv^2$ come **energia cinetica**:

$$\rightarrow \quad L|_{x_1}^{x_2} = \Delta E_c|_{x_1}^{x_2}\,. \tag{35}$$

Unità di misura del lavoro e dell'energia: Joule = Newton×m, simbolo J.

Lavoro ed energia cinetica:
ricordiamo sempre che con ΔE_c intendiamo sempre $E_c(finale) - E_c(iniziale)$, ossia en. cinetica finale meno en. cinetica iniziale. Non sbagliate con i segni.
Esempio 1: lavoro della forza di richiamo dell'oscillatore armonico:

– dalla posizione di equilibrio ($x = 0$) alla generica posizione x:

$$L|_0^x = \int_0^x F(x')\,\mathrm{d}x' = \int_0^x (-k\,x')\,\mathrm{d}x' \tag{36}$$

$$= -\frac{1}{2}\,k\,x^2 \tag{37}$$

$\rightarrow$ lavoro negativo (indipendentemente dal segno di x — quello che conta è che forza e spostamento siano discordi): $\Delta E_c < 0$: la velocità diminuisce:

$$\frac{1}{2}m\,v^2(x) = \frac{1}{2}m\,v^2(0) - \frac{1}{2}\,k\,x^2\,; \tag{38}$$

– dalla generica posizione x alla posizione di equilibrio ($x = 0$):

$$L|_x^0 = \int_x^0 (-k\,x')\,\mathrm{d}x' \tag{39}$$

$$= \frac{1}{2}\,k\,x^2 \tag{40}$$

$\rightarrow$ lavoro positivo (indipendentemente dal segno di x — quello che conta è che forza e spostamento siano concordi): $\Delta E_c > 0$: la velocità aumenta:

$$\frac{1}{2}m\,v^2(0) = \frac{1}{2}m\,v^2(x) + \frac{1}{2}\,k\,x^2\,; \tag{41}$$

Si noti inoltre come la somma del lavoro per andare da 0 a x e di quello per andare da x a 0 sia nulla: $L|_0^x + L|_x^0 = 0$.
Fatto anche il calcolo grafico del lavoro , disegnando il grafico di $\vec{F}(x)$ (retta passante per l' origine, con pendenza negativa -K), e calcolando l' area sotto la retta.

$\rightarrow$ Discussione sui vantaggi di usare il lavoro invece di risolvere in dettaglio le equazioni del moto.

Ricordate che "lavoro negativo" vuol dire un lavoro resistente, ossia la forza si oppone (resiste) alla causa che provoca lo spostamento. Il lavoro fatto dalla gravità quando allontaniamo fra loro due corpi è pertanto negativo, perchè la forza di gravità è sempre attrattiva.

Ancora su lavoro, energia cinetica e introduciamo l' energia potenziale:
Esempio 2: lavoro della forza di gravità in prossimità della superficie terrestre, ovvero '$-mg$', con g approssimativamente costante, da una quota iniziale z_1 ad una quota finale z_2

$$L|_{z_1}^{z_2} = \int_{z_1}^{z_2} (-m\,g)\,\mathrm{d}z \tag{42}$$

$$= -m\,g\,(z_2 - z_1) \tag{43}$$

Se $z_2 > z_1$ (il corpo è salito): $L = -m\,g\,h < 0 \;\rightarrow\; \Delta E_c < 0$.
Se $z_2 < z_1$ (il corpo è disceso): $L = m\,g\,h > 0 \;\rightarrow\; \Delta E_c > 0$.
(h, definito positivo, è la differenza di quota dal punto più alto al punto più basso.) Anche in questo caso, se il corpo ritorna nella posizione iniziale il lavoro totale è nullo.

In alcuni tipi di forze (molla, gravità, elettrostatica) il lavoro compiuto su un ciclo è nullo. Inoltre, in questi casi si osserva come l'energia cinetica 'sparisca' e poi 'ricompaia' (esempio: lancio di oggetto verso l'alto) in virtù della relazione $L|_{x_1}^{x_2} = \Delta E_c|_{x_1}^{x_2}$. Si ipotizza quindi, per questo tipo di forze, che quando l'energia cinetica 'sparice' (o semplicemente diminuice), essa si trasformi in un altro tipo di energia *meccanica*: **energia potenziale**:

diminuzione di energia cinetica $\rightarrow$ aumento di energia potenziale

(e viceversa)

$$\Delta E_c|_{x_1}^{x_2} = -\,\Delta E_p|_{x_1}^{x_2} \;\;\Rightarrow\;\; \Delta E_p|_{x_1}^{x_2} = -\,L|_{x_1}^{x_2}\,. \qquad (44)$$

- **Esercitazione** Un' automobile di massa m=1200 kg viaggia alla velocità di 100 km/h, quando il guidatore vede un ostacolo davanti a lui e frena improvvisamente bloccando le ruote. Sapendo che il coeff. di attrito dinamico è $\mu_D = 0.75$, determinare: a) la strada percorsa prima di fermarsi: b) il lavoro fatto dalla forza di attrito. Sol:
  1) Usiamo lavoro-energia cinetica. $L_T = \Delta E_c = 0 - (1/2)mv_i^2$, con $v_i = 100$ km/h, e $L_T = L_{attrito} = -\mu_D mg\Delta s$. Da queste si ricava: $\Delta s = (1/2)v_i^2/(\mu_d g)$, con $v_i = \frac{100\times10^3}{3600}$=27.78 m/s; $\Delta s = \frac{27.78^2}{2\;0.75\;9.8} = 52.5$ m;
  2) $L_{attrito} = -\mu_D mg\Delta s = -0.75 \times 1200 \times 9.8 \times 52.5 \approx -4.6 \times 10^5$ J.
  Per risolvere 1) avremmo potuto anche usare la cinematica, fatelo: moto uniform. accelerato, con accel. negativa, pari a $a = \frac{f_{attrito}}{m} = -\frac{\mu_D mg}{m} = -7.35$ m/s^2, velocità finale nulla e vel. iniziale v_i data. Il tempo che la macchina impiega a fermarsi è $t^* = v_i/|a| = 3.8$ s (da $v = v_i - |a|t$).
- Es. di esonero 2/03/06:
  Un blocco di massa 15 kg viene spinto con una velocità iniziale di 4.6 m/s, su per un piano inclinato che forma un angolo di 30° con l'orizzontale. Il coefficiente di attrito dinamico tra il blocco ed il piano è di 0.34. Determinare:
  a)lo spazio percorso dal blocco prima di fermarsi
  b) il lavoro fatto dalla forza di attrito
  Sol: Le due proiezioni della forza di gravità parallella e ortogonale al piano inclinato sono:
  $F_{\parallel} \;=\; mg \cdot \sin\alpha$ e $F_{\perp} \;=\; mg \cdot \cos\alpha$
  La forza di attrito dinamico è: $F_a \;=\; \mu_d \cdot N \;=\; \mu_d \cdot mg \cdot \cos\alpha$

a) Lo spazio percorso si ricava facilmente - si potrebbe anche fare con la cinematica, fatelo da soli - dal teorema dell'energia cinetica, prendendo in considerazione il lavoro fatto dalla forza di attrito e dalla forza gravitazionale, per quest'ultima si considera la proiezione della forza sul piano inclinato:
$L = (\vec{F}_a + \vec{F}_g) \cdot \vec{s} = -(\mu_d \cdot mg \cdot \cos\alpha + mg \cdot \sin\alpha) \cdot s = \Delta K = 0 - \frac{1}{2}mv^2$
$\Rightarrow s = \frac{v^2}{2g(\mu_d \cos\alpha + \sin\alpha)} = \frac{4.6^2}{2\cdot 9.8\cdot(0.34\cdot\cos 30° + \sin 30°)} = 1.36\ m$

b) $L = \vec{F}_a \cdot \vec{s} = -\mu_d \cdot mg \cdot \cos\alpha \cdot s = -0.34 \cdot 15 \cdot 9.8 \cdot \cos 30° \cdot 1.36 = -58.9\ J$

- Es. su conservazione energia meccanica con la molla: dati $x_{max} = 4$ cm, $T = 1$ s, $m = 200$ g, trovate la velocità v_h per $x = 0.5 \cdot x_{max}$.
  Sol: $E_c + E_p$ = costante. Dunque $\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Kx^2$=costante= $\frac{1}{2}Kx^2_{max}$ (ad $x = x_{max}$ l' energia è solo potenziale). Ora sostituiamo alla generica posizione x il valore $x = 0.5x_{max}$. Troviamo:
  $\frac{1}{2}mv_h^2 + \frac{1}{2}K(0.5x_{max})^2 = \frac{1}{2}Kx^2_{max}$. Da cui $\frac{1}{2}mv_h^2 = \frac{1}{2}Kx^2_{max} \cdot (1 - 0.5^2)$, ossia $v_h = \sqrt{(K/m) \cdot x^2_{max} \cdot (1 - 0.25)}$.
  $K = m\ (2\pi)^2/T^2 \simeq 7.9$ N/m, v_h=0.21 m/s. Controllate i conti.
  Cosa vi ricorda l' espressione di v_h ? Suggerimento:il $cos 60^o$=0.5, $sin 60^o$=0.866 e $\sqrt{0.75} = 0.866$. e stiamo calcolando la velocità ad $x = 0.5x_{max}$.
  Sol: Analogia con la proiezione del moto circolare uniforme sul diametro. Ricordate le espressioni di x,v e a ? Nell' analogia ovviamente x_{max} ha il ruolo del raggio della circonferenza. $|v_h| = \omega x_{max} sin(\alpha)$, con $\alpha = 60^o$ in quanto sono ad x=0.5 x_{max}.

  Esempio 3: lavoro della forza di attrito mentre il corpo si sposta da x_1 a $x_2 > x_1$ (indicando con d la distanza fra i due punti):

$$L|_{x_1}^{x_2} = \int_{x_1}^{x_2} (-\mu_D\, F_N)\, \mathrm{d}x \tag{45}$$
$$= -\mu_D\, F_N\, (x_2 - x_1) = -\mu_D\, F_N\, d \tag{46}$$
$$(= -\mu_D\, m\, g\, d\ ,\ \text{caso particolare}\ ). \tag{47}$$

  Se invertiamo il verso del moto anche la forza cambia segno ($F = -\mu_D\, F_N\, \hat{v}$):

$$L|_{x_2}^{x_1} = \int_{x_2}^{x_1} (\mu_D\, F_N)\, \mathrm{d}x \tag{48}$$
$$= \mu_D\, F_N\, (x_1 - x_2) \tag{49}$$
$$= -\mu_D\, F_N\, (x_2 - x_1)\ : \tag{50}$$

  Lavoro sempre negativo: $L|_{x_1}^{x_2} = -\mu_D\, F_N\, d$ se si va da x_1 a x_2 e poi si ritorna a x_1 si sommano i lavori negativi: $\rightarrow L_{tot} = -2, \mu_D\, F_N\, d$.
  - Tutte le forze $\rightarrow$ $L_{tot}|_A^B = \Delta E_c|_A^B$, ove il pedice *tot* indica che si tratta del lavoro fatto dalla risultatnte di tutte le forze che agiscono sul corpo, conservative o non.

– Forze conservative $\rightarrow$ $L_{F^{(i)}_{cons}}\Big|_A^B = -\,\Delta E_p^{(i)}\Big|_A^B$, ove l'indice i indica che la relazione è valida per ciascuna delle forze conservative in gioco
– Se sono presenti solo forze conservative: si conserva l'energia meccanica totale: $E_c + E_p = costante$:

$$E_c(in) + E_p(in) \;=\; E_c(fin) + E_p(fin) \tag{51}$$

$$\Delta E_c|_{x_1}^{x_2} = -\,\Delta E_p|_{x_1}^{x_2} \;\Rightarrow\; \Delta E_p|_{x_1}^{x_2} = -\,L|_{x_1}^{x_2}\,. \tag{52}$$

La (52) definisce (a meno di una costante) l'energia potenziale. Nota: sia per l'energia cinetica che per l'energia potenziale il lavoro fornisce la variazione dell'energia, ma, mentre per l'energia cinetica esiste uno 'zero naturale', corrispondente ad una velocità nulla, nell'energia potenziale tale 'zero naturale' non sempre esiste. In genere, dato un problema è conveniente fissare lo zero dell'energia potenziale in posizione del suo minimo (in quel problema).
Esempio 1 (molla)

$$\Delta E_p|_0^x \;=\; -\,L|_0^x = \frac{1}{2}\,k\,x^2 \tag{53}$$

$$E_p(x=0)=0 \;\Rightarrow\; E_p(x) = \frac{1}{2}\,k\,x^2\,. \tag{54}$$

Esempio 2 (forza di gravità "-mg"). Se il moto dell'oggetto si svolge da un livello minimo (es. tavolo, pavimento, piano stradale, etc.), conviene prendere tale livello come riferimento per lo zero dell'energia potenziale:

$$\Delta E_p|_0^h \;=\; -\,L|_0^h = m\,g\,h \tag{55}$$

$$E_p(h=0)=0 \;\Rightarrow\; E_p(h) = m\,g\,h\,. \tag{56}$$

Problemini ::

(a) Corpo cade da h=10 m, calcolare $\rightarrow$ velocità finale;
Soluzione: $v = \sqrt{2gh}$ =14 m/s.

(b) Corpo lanciato verso l'alto con $v_0 = 10\,\mathrm{m/s}$: a che altezza arriva?
Sol: $(1/2)mv^2 = mgh$, da cui $h = \frac{v^2}{2g}$

(c) Molla, di K, massa e massimo spostamento noti. Calcolare v_{max}.
$(1/2)Kx^2_{max} = (1/2)mv^2_{max}$.

(d) Molla, di $T = 0.1$ s m=100 g x_{max}=2 cm. Calcolare v_{max}.
Sol: si calcola $K = m(\frac{2\pi}{T})^2$ e $v_{max} = \sqrt{(K/m)}\; x_{max}$, che è inoltre ωx_{max}

Indipendenza del lavoro dal percorso nel caso di una forza conservativa, come conseguenza dell' essere nullo il lavoro su un ciclo. Esempio del piano inclinato, dove il lavoro $mg\sin\theta\Delta x$ è anche dato da mgh, con $h = \Delta x \sin\theta$. Discussione anche "intuitiva" notando che questo viene fuori dal fatto che mentre, ad es., la forza di attrito (non conservativa) cambia direzione se l' oggetto che si muove cambia direzione, la gravità (conservativa) è sempre diretta verso il basso, ossia non cambia direzione. Dunque il prodotto scalare $\vec{F}\cdot\vec{s}$ nel caso dell' attrito è diverso nei due casi in cui il verso del moto cambia, ossia se $\vec{s}$ cambia, mentre nel caso della gravità il prodotto scalare è sempre lo stesso e conta solo la proiezione dello spostamento sull' asse z, ossia sull' asse dove cè la gravità.

Esercitazione:

(a) un oggetto lasciato scivolare (velocità iniziale nulla)) lungo un piano inclinato privo di attrito arriva alla base del piano con velocità $v_a =$ 4 m/s. Determinare con che velocità arriverebbe alla base lo stesso oggetto, se fosse stato lasciato scivolare con velocità iniziale $v_0 = 3$ m/s.
Sol: v_b= 5 m/s.
Notiamo che non serve calcolare esplicitamente la quota di partenza.

(b) Un oggetto percorre 1 m scivolando lungo un piano privo di attrito inclinato di 30 gradi rispetto all' orizzontale. Sul piano orizzontale il corpo è soggetto ad attrito e percorre 4 m prima di fermarsi. Calcolare μ_D.
Sol: $\mu_D = 0.125$

Esercitazione

Oscillazioni Una massa di 2 kg è appesa ad un filo inestensibile lungo l=1.5 m. Oscilla, raggiungendo nel punto più alto della traiettoria un angolo di 10^o con l' orizzontale. Trovare 1) la v_{max} del corpo; 2) la T_{max} (tensione massima) del filo; 3) il numero di oscillazioni al minuto. Sol:

1) Fare un disegno chiaro della situazione. Si vede, geometria dei triangoli, che la quota h_{max}, rispetto allo zero definito quando il filo del pendolo è sulla verticale (ossia a $\theta = 0$), raggiunta a $\theta = 10^o$, è $h_{max} = l - l\cos\theta$). La v_{max}, che si ha quando il filo è sulla verticale, si ottiene con $E_c(max) = E_p(max)$, ossia $(1/2)mv^2_{max} = mgh_{max}$, da cui $v_{max} = \sqrt{2gh_{max}}$=0.67 m/s;

2) la tensione del filo è massima quando è sulla verticale, perchè la componente della forza peso $mg\cos\theta$, che deve essere contrastata dalla tensione del filo, è massima ($\theta = 0, \cos\theta = 1$)). Dunque, avendo preso il rif. verso l' alto, $T - mg\cos\theta = mv^2/l$, che diventa per $\theta = 0$, $T_{max} - mg = mv^2_{max}/l$ (forza centripeta verso il punto dove è appeso il pendolo). Si ricava T_{max}= 20.2 N

3) ν = 1/T, con $T = 2\pi\sqrt{l/g}$=2.456 s, $\nu = 0.41$ Hz e il numero di oscillazioni al minuto è 60×0.41=24.4 (anche $60/T$).

Dinamica Un carico di 100 kg viene sollevato di 10 m mediante un cavo, con accelerazione costante uguale, in modulo, ad $a = 0.2 \cdot g$ m/s^2, dove g è l' accelerazione di gravità. Determinare: 1)la tensione del cavo, 2) il lavoro

complessivo compiuto sul carico, 3) la velocità finale del carico.
Meccanica punto Uno slittino scivola da un pendio di angolo $\alpha = 45^o$ a velocità costante. Det. il coefficente di attrito dinamico slittino-neve e la velocità finale, se lo stesso slittino scende da una pista di angolo $\beta = 60^o$ ed altezza h=100 m.

6. **Sesta settimana, Lu 4 aprile - Ve 8 aprile. Lezioni 33-41. Piu' parte della settima set**

Esempio 4): lavoro della forza di gravità, caso generale, da una distanza iniziale R_1 and una distanza finale R_2.
Per l' integrale vedi sotto "Altro materiale didattico"

$$L|_{R_1}^{R_2} = \int_{R_1}^{R_2} \left(-\frac{G\,M\,m}{r^2}\right) \mathrm{d}r \tag{57}$$

$$= \left.\frac{G\,M\,m}{r}\right|_{R_1}^{R_2} \tag{58}$$

$$= G\,M\,m\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right) : \tag{59}$$

Se $R_2 > R_1$ (m si allontana da M): $L < 0 \rightarrow \Delta E_c < 0$.
Il lavoro fatto dalla gravità è negativo perchè la gravità fa un lavoro resistente in questo caso, ossia tende ad opporsi all' allontanamento dei due corpi.
Se $R_2 < R_1$ (m si avvicina a M): $L > 0 \rightarrow \Delta E_c > 0$.
Anche in questo caso, se il corpo ritorna nella posizione iniziale il lavoro totale è nullo.
Lavoro fatto dalla forza gravitazionale per portare un corpo dalla distanza R all'infinito:

$$L|_R^\infty = -\frac{G\,M\,m}{R} . \tag{60}$$

Se $R = R_T$ questa formula si riduce a $-m\,g\,R_T$.

Esempio 4: Velocità di fuga: quanto deve valere v_0 sulla superficie terrestre affinché, in assenza di resistenza dell'aria, un corpo lanciato verso l'alto possa arrivare a 'distanza infinita' con 'velocità nulla'? [R.: $E_c(R = R_T) = 1/2\,m\,v_0^2$, $E_c(R = \infty) = 0$: $\rightarrow$ calcolare ΔE_c ed eguagliarlo con il lavoro compiuto dalla forza gravitazionale: $\rightarrow$ conti, si trova $v_0 = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}}$=11.2 m/s

Esempio 4 : Forza di gravità, caso generale: energia potenziale

$$\Delta E_p|_{R_0}^{R} = G\,M\,m\left(\frac{1}{R_0} - \frac{1}{R}\right) . \tag{61}$$

Non si può scegliere $R_0 = 0$, in quanto $\Delta E_p|_{R_0}^{R} \to \infty \; \forall R$. Si potrebbe scegliere R_0 uguale al raggio del pianeta. Si preferisce scegliere lo zero in corrispondenza di $R_0 \to \infty$, ovvero in corrispondenza del suo massimo (idem per la forza di Coulomb in elettrostatica):

$$E_p(R = \infty) = 0 \;\; \Rightarrow \;\; E_p(R) = -\frac{G\,M\,m}{R} \; : \tag{62}$$

niente di veramente strano: quello che conta è che, passando da R_1 a R_2 con $R_2 > R_1$, si abbia $E_p(R_2) > E_p(R_1)$:

$$\begin{aligned} \Delta E_p|_{R_1}^{R_2} &= E_p(R_2) - E_p(R_1) && (63)\\ &= -\frac{G\,M\,m}{R_2} - \left(-\frac{G\,M\,m}{R_1}\right) && (64)\\ &= G\,M\,m\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right). && (65) \end{aligned}$$

Si noti come questa definizione è compatibile con $E_p(h) = m\,g\,h$, se si pensa che quest'ultima sia valida in prossimità della superficie terrestre, ove le variazioni di g con l'altezza sono trascurabili.
Infatti: $E_p(R_T + h) = -\frac{G\,M_T\,m}{R_T+h} = -\frac{G\,M_T\,m}{R_T(1+h/R_T)}$, dove h/R_T è molto minore di 1. Notando che, in generale, $\frac{1}{1+\epsilon}$, con $\epsilon << 1$, può essere scritto come:

$$\frac{1}{1+\epsilon} = \frac{1}{1+\epsilon}\cdot\frac{1-\epsilon}{1-\epsilon} \tag{66}$$

$$= \frac{1}{1-\epsilon^2}\cdot(1-\epsilon) \approx (1-\epsilon) \tag{67}$$

avendo trascurato ϵ^2 rispetto ad 1, si ha che:

$$E_p(R_T + h) = -\frac{G\,M_T\,m}{R_T(1+h/R_T)} \approx -\frac{G\,M_T\,m}{R_T}\cdot(1 - h/R_T) = \tag{68}$$

$$-\frac{G\,M_T\,m}{R_T} + \frac{G\,M_T\,m\,h}{R_T^2} == E_p(R_T) + m\,g\,h \tag{69}$$

Ancora sul lavoro, la potenza: Definizione di Potenza (media e istantanea); unità di misura della potenza (watt e cv);
1 cv = 735.5 W $\approx$ 0.74 kW.
Quanto sono in kW 100 cv ?
Espressione della potenza nel caso di forza costante $P = F \cdot v$;
kWh= 1000 watt $\times$3600 s: attenzione è una unità di energia e non di potenza.
Dalla definizione si ha che 1 kWh=3.6 $\times 10^6$ J.
Esercizio: Una lampadina da 60 W. Calcolare l' energia elettrica consumata in 1 ora di funzionamento. Sol: $E_{el} = 60 \times 3600$ watt $\times$ secondo=2.16 $\times 10^5$ J.

Esercitazione sulla potenza Svolto es. 6.8 pag. 200 Serway (ascensore di massa M=1000 kg e portata max m=800 kg. Una forza di attrito costante $f_a = 4000$ N ne ritarda il moto verso l' alto. Trovare 1) la potenza minima erogata dal motore perchè l' ascensore salga verso l' alto con $v = 3$ m/s costante. Trovare 2) l' espressione della potenza (istantanea) se invece è accelerato verso l' alto, con accelerazione costante $a = 1$ m/s^2.
Attenzione alla validità della espressione $P = F \cdot v$: deve essere costante la forza F, non la velocità. In questo esercizio, poichè $T - (m + M)g - f_a = ma$, ho che T è costante sia nel primo caso, dove a=0, che nel secondo caso, dove a=costante. Posso dunque applicare la formula $P = T \cdot v$ in entrambi i casi. Nel primo la potenza è anch'essa costante, nel secondo la potenza è funzione del tempo. Viene: $T = 2.16 \times 10^4$ N nel primo caso e $T = 2.34 \times 10^4$ N nel secondo. $P = 64.8$ kW nel primo caso e $P(t) = T \cdot (v_0 + at)$ nel secondo, funzione del tempo.
Perchè "potenza minima" ? È quella che corrisponde ad ascensore carico, ossia l' ascensore deve funzionare a pieno carico, dunque la potenza deve essere almeno quella calcolata. Non più piccola.

Impulso e quantità di moto

(a) Problema del cannoncino di massa M che spara proiettile di massa m. Schematizziamo la spinta del proiettile come una forza costante che agisce in un intervallo Δt. Riscriviamo "$\vec{F} = m\,\vec{a}$":

$$\vec{F} = m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} \tag{70}$$
$$= \frac{\mathrm{d}(m\,\vec{v})}{\mathrm{d}t} \tag{71}$$
$$= \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} \tag{72}$$

avendo chiamato indicato $\vec{p} = m\,\vec{v}$ la *quantità di moto* dell'oggetto di massa m. Se F è costante segue

$$\Delta\vec{p} = \vec{F}\,\Delta t \tag{73}$$
$$\vec{p}(t_2) = \vec{p}(t_1) + \vec{F} \times (t_2 - t_1) \quad (F \text{ costante})\,. \tag{74}$$

La quantità "$\vec{F}\,\Delta t$", per $\vec{F}$ costante in Δt, è chiamata *impulso della forza*: $\rightarrow$ causa variazione di quantità di moto. Ne segue, per la velocità

$$\Delta\vec{v} = \frac{1}{m}\vec{F}\,\Delta t \tag{75}$$
$$\vec{v}(t_2) = \vec{v}(t_1) + \frac{1}{m}\vec{F} \times (t_2 - t_1) \quad (F \text{ costante})\,. \tag{76}$$

Abbiamo trovato un modo semplice per ricavarsi la quantità di moto (e quindi la velocità del proiettile). Ancora due problemi: a) cosa succede se la forza varia nel tempo? b) cosa succede al cannoncino?

a) Se $\vec{F}$ varia con il tempo, ovvero abbiamo $\vec{F}(t)$, in analogia a quanto visto per le variazioni di posizione e velocità:

$$\Delta\vec{p}|_{t_1}^{t_2} = \sum_i \Delta\vec{p}_i = \sum_i \vec{F}_i \Delta t_i \tag{77}$$

$$\rightarrow \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t)\mathrm{d}t\,, \tag{78}$$

che definisce l'impulso di una forza anche per forze variabili con il tempo.
b) Principio di azione e reazione (terzo principio della meccanica): forze uguali e contrarie:

$$\vec{F}_A^{(B)} = -\vec{F}_B^{(A)}\,, \tag{79}$$

ove $\vec{F}_A^{(B)}$ sta per "forza su A dovuta a B", e analogo per $\vec{F}_B^{(A)}$. Analizziamo le variazioni di quantità di moto di A e B:

$$\Delta\vec{p}_A^{(B)}\Big|_{t_1}^{t_2} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_A^{(B)}(t)\mathrm{d}t \tag{80}$$

$$= -\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_B^{(A)}(t)\mathrm{d}t \tag{81}$$

$$= -\,\Delta\vec{p}_B^{(A)}\Big|_{t_1}^{t_2} \tag{82}$$

ovvero

$$\Delta\vec{p}_A^{(B)}\Big|_{t_1}^{t_2} + \Delta\vec{p}_B^{(A)}\Big|_{t_1}^{t_2} = 0\,. \tag{83}$$

In una interazione fra due corpi la quantità di moto viene scambiata da un corpo all'altro. Se il sistema fisico è formato soltanto da due corpi (ovvero essi non hanno, almeno approssimativamente, interazioni con il resto del mondo), la loro *quantità di moto totale si conserva.*
Si noti come l'espressione di sopra sia in effetti vettoriale: la conservazione si applica alle tre componenti: se le interazioni con 'il resto del mondo' avviene soltanto in una o due delle componenti, la conservazione vale nelle rimanenti. Si noti inoltre come, per arrivare all'espressione di conservazione si è assunto che il principio di azione e reazione valga istantante per istante.
Quantità di moto del cannoncino:

- posto su piano senza attrito, e coordinata x orizzontale, positiva nella direzione di moto del proiettile:
  - ∗ lungo x i due oggetti sono soggetti soltanto alla loro forza reciproca: $\rightarrow$ sistema isolato $\rightarrow p_x$ si conserva (chiamiamolo semplicemente p).

Essendo proiettile e cannone inizialmente fermi

$$p_1 + p_2 = 0 \tag{84}$$
$$p_2 = -p_1 \tag{85}$$
$$M\,v_2 = -m\,v_1 \tag{86}$$
$$v_2 = -\frac{m}{M}\,v_1 \tag{87}$$

∗ lungo la componente verticale la risultante delle forze è nulla: il moto di proiettile e cannoncino si mantiene sull'asse x.

– ancorato saldamente al terreno: in pratica il cannoncino è solidale con il terreno e quindi, con buona approssimazione, con la Terra (a meno che l'esplosione sia talmente potente da sollevare la piattaforma sulla quale il connoncino era ancorato. . .): in pratica si considera che cannoncino e Terra formino un solo corpo di massa 'infinita' rispetto al proiettile: $m/M \to 0$: il cannoncino non si sposta (ma il sistema cannoncino-Terra acquista la quantità di moto $-m\,v_1$: un oggetto di massa 'infinita' può variare la sua quantità di moto senza (apprezzabilmente) variare la sua velocità.
Esempio di persona che saltella: la Terra varia continuamente la propria quantità di moto senza subire spostamenti.

– Conservazione della quantità di moto: caso generale.
Se abbiamo un sistema isolato di oggetti, ovvero tali che essi interagiscono solo con gli altri oggetti di tale sistema, ma non con il resto del mondo, per ogni intervallo di tempo dt possiamo estendere la (83) a tutte le coppie ij, ovvero

$$\mathrm{d}\vec{p}_i^{\,(j)} + \mathrm{d}\vec{p}_j^{\,(i)} = 0\,. \tag{88}$$

Ne risulta che, istante per istante, è nulla la variazione della quantità di moto totale del sistema $\mathrm{d}\vec{p} = \sum_{i,\,j} \mathrm{d}\vec{p}_i^{\,(j)}$.

Sistema isolato:

$$\to\ \mathrm{d}\vec{p} = 0 \tag{89}$$
$$\to\ \vec{p}(t) = \mathit{costante.} \tag{90}$$
$$\tag{91}$$

Altri esempi: persona inizialmente ferma su laghetto ghiacciato che riesce a muoversi lanciando un oggetto; razzo nel vuoto che accelera 'spruzzando' del gas (o altro) ad alta velocità; Terra che 'assorbe' le variazioni di quantità di moto di quanti saltellano sulla terra.

(b) **Sistema isolato**. La quantità di moto totale di un sistema isolato si conserva: $\vec{p}_{tot}(t) = \sum_i \vec{p}_i = \sum_i m_i \vec{v}_i(t) = cost$. Sono tre condizioni: $p_{x_{tot}}$, $p_{y_{tot}}$ e $p_{z_{tot}}$.

(c) **Esempio svolto**: urto auto ($m_a = 1000\,\mathrm{kg}$) e camion ($m_c = 10000\,\mathrm{kg}$), trascurando attriti ed assumendo rimangano attaccati: casi $v_a = 50\,\mathrm{km/h}$ e $v_c = 0$ e velocità scambiate, ossia $v_c = 50\,\mathrm{km/h}$ e $v_a = 0$. Calcolo del $\rightarrow \Delta v$ per i due mezzi nei due casi (ma nota: le forze che subiscono le persone dipendono da accelerazioni, $\Delta v/\Delta t$: importanza di 'attutire' l'urto, ovvero aumentare Δt).

(d) Sistema di punti materiali interagenti e soggetti a forze reciproche (**interne**) ed **esterne**:

$$\vec{F}_i = \sum_j \vec{F}_i^{(j)} + \vec{F}_i^{(ext)} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\vec{p}_i}{\mathrm{d}t} = \vec{F}_i\,. \tag{92}$$

Sommando su tutti i punti materiali otteniamo

$$\sum_i \frac{\mathrm{d}\vec{p}_i}{\mathrm{d}t} = \sum_i \vec{F}_i \tag{93}$$

$$\frac{\mathrm{d}\sum_i \vec{p}_i}{\mathrm{d}t} = \sum_{i,j} \vec{F}_i^{(j)} + \sum_i \vec{F}_i^{(ext)}\,, \tag{94}$$

ma, per il principio di azione-reazione, le forze interne si annullano a coppie nella sommatoria in quanto $F_i^{(j)} = -F_j^{(i)}$. La variazione nel tempo della quantità di moto totale del sistema è dovuta soltanto alle forze esterne:

$$\sum_i \vec{F}_i^{(ext)} = \sum_i \frac{\mathrm{d}\vec{p}_i}{\mathrm{d}t} \tag{95}$$

$$\vec{F}^{(ext)} = \frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t} \tag{96}$$

$$\tag{97}$$

ove $\vec{F}^{(ext)}$ è la *risultante* delle forze esterne.

Ancora sulla conservazione della quantità di moto in un sistema isolato:
La quantità di moto totale di un sistema isolato si conserva: $\vec{p}_{tot}(t) = \sum_i \vec{p}_i = \sum_i m_i \vec{v}_i(t) = costante$. Sono tre condizioni: $p_{x_{tot}}$, $p_{y_{tot}}$ e $p_{z_{tot}}$.
Centro di massa del sistema (media delle posizioni pesata con le masse):

$$x_{CM}(t) = \frac{\sum_i m_i x_i(t)}{\sum_i m_i} \tag{98}$$

$$v_{x_{CM}}(t) = \frac{\mathrm{d}x_{CM}(t)}{\mathrm{d}t} \tag{99}$$

$$= \frac{\sum_i m_i \,\mathrm{d}x_i(t)/\mathrm{d}t}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i v_{x_i}(t)}{\sum_i m_i} = \frac{p_{x_{tot}}(t)}{M_{tot}} \tag{100}$$

etc. per y e z

$$\vec{v}_{CM}(t) = \frac{\vec{p}_{tot}(t)}{M_{tot}} . \tag{101}$$

Sistema isolato: $\vec{p}_{tot}$ costante: $\rightarrow \vec{v}_{CM}$ costante.
Abbiamo visto che la variazione nel tempo della quantità di moto totale del sistema è dovuta soltanto alle forze esterne:

$$\sum_i \vec{F}_i^{(ext)} = \sum_i \frac{\mathrm{d}\vec{p}_i}{\mathrm{d}t} \tag{102}$$

$$\vec{F}^{(ext)} = \frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t} \tag{103}$$

$$= M \frac{\mathrm{d}\vec{v}_{CM}}{\mathrm{d}t} \tag{104}$$

$$= M \, \vec{a}_{CM} , \tag{105}$$

ove $\vec{F}^{(ext)}$ è la *risultante* delle forze esterne e M è la somma delle masse del sistema. È come se il CM si comportasse come un punto materiale di massa M (seconda legge della meccanica generalizzata ad un sistema di punti materiali).
Segue:

$$L^{(ext)} = \int_A^B F^{(ext)} \cdot \mathrm{d}x = \Delta \left(\frac{1}{2} M v_{CM}^2 \right) \Bigg|_A^B : \tag{106}$$

il lavoro fatto dalla risultante delle forze esterne è pari alla variazione di *energia cinetica di traslazione* del CM (nota: il sistema possiede anche energia cinetica dovuta al movimento interno).

Introduzione ai **problemi di urto**:
Schemi di urto di due oggetti in approssimazione di sistema isolato:

Sempre Si conserva quantità di moto:

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 \quad = \quad m_1\vec{v'}_1 + m_2\vec{v'}_2 \tag{107}$$

Urti elastici Si conserva anche energia cinetica totale:

$$\frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 \quad = \quad \frac{1}{2}m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2'^2 \tag{108}$$

Urti anelastici parte dell'energia 'meccanica' (cinetica) è persa: $\rightarrow$ calore, 'etc.'. Nota: gli urti in cui i corpi rimangono attaccati appartengono a questa classe, li chiamiamo
(nel CM energia cinetica sparisce): "urti completamente anelastici", sono particolarmente semplici da trattare.

Urto elastico frontale (unidimensionale).
Riprendiamo le leggi di conservazione (107)-(108) degli urti elastici, riscrivendole nel modo seguente:

$$\begin{aligned} m_1\, v_1 - m_1\, v'_1 &= m_2\, v'_2 - m_2\, v_2 & (109)\\ m_1 v_1^2 - m_1 v_1'^2 &= m_2 v_2'^2 - m_2 v_2^2\,, & (110)\end{aligned}$$

ovvero

$$\begin{aligned} m_1\,(v_1 - v'_1) &= +m_2\,(v'_2 - v_2) & (111)\\ m_1\,(v_1^2 - v_1'^2) &= m_2\,(v_2'^2 - v_2^2)\,, & (112)\end{aligned}$$

dalle quali, dividendo membro a membro (la seconda diviso la prima) e ricordandosi che $a^2 - b^2 = (a+b)\,(a-b)$, si ottiene

$$v_1 + v'_1 \quad = \quad v_2 + v'_2\,, \tag{113}$$

ovvero

$$v_1 - v_2 \quad = \quad (v'_2 - v'_1)\,. \tag{114}$$

La (113) ci dice che in un urto elastico frontale la somma della velocità iniziale e finale di una particella è pari alla somma della velocità iniziale e finale dell'altra particella. Più interessante è la 'lettura' della (114): **in un urto elastico la velocità relativa fra le due particelle viene invertita (ma resta costante in modulo)**. Notiamo che la (114) fornisce la soluzione immediata al problema in tutti i casi in cui una delle due masse sia molto maggiore dell' altra. In questo caso infatti la pallina (o altro) di massa maggiore, dopo l' urto, prosegue imperturbata (ossia senza cambiare velocità) il suo moto. Dunque nell' equazione resta solo incognita la velocità dopo l' urto della pallina di massa (molto) più piccola. Esempi: pallina contro racchetta da tennis, boccia contro boccino fermo, boccino contro boccia ferma.

Inizieremo a fare le considerazioni possibili utilizzando la (114)., conoscendo solo le 2 vel. iniziali e sapendo che una massa è molto maggiore dell' altra.

Urto elastico frontale (unidimensionale).
Riprendiamo da:

$$v_1 + v'_1 \;=\; v_2 + v'_2\,, \tag{115}$$

ovvero

$$v_1 - v_2 \;=\; (v'_2 - v'_1)\,. \tag{116}$$

Inizieremo a fare le considerazioni possibili utilizzando la (114)., conoscendo solo le 2 vel. iniziali e sapendo che una massa è molto maggiore dell' altra:
1) racchetta V_1 contro pallina $-V_2$:
(o calciatore che colpisce una palla al volo, boccia che colpisce un boccino che le va incontro ...) La differenza di velocità fra racchetta e pallina vale $V_1 - (-V_2) = V_1 + V_2$ e tale sarà la differenza fra la velocità finale della palla e quella della racchetta. Ma, nell'approssimazione di massa infinita della racchetta la velocità di quest'ultima non viene modificata dall'urto (si pensi al caso limite auto-moscerino). Quindi la velocità finale della palla vale $V'_2 - V'_1 = V_1 - V_2$ e $V'_2 = V_1 + (V_1 + |V_2|) = 2V_1 + |V_2|$.
2) boccia V_2 contro boccino fermo $V_1 = 0$:
Qui $V'_2 = V_2$, da cui: $V_2 - V'_1 = 0 - V_2$ e $V'_1 = 2V_2$
3) boccino V_2 contro boccia ferma $V_1 = 0$:
La boccia resta ferma e il boccino rimbalza all' indietro con la stessa velocità V_2, ossia $V'_2 = -V_2$.
Urti parzialmente anelastici: una parte dell'energia meccanica viene persa. Esempio: rimbalzi di pallini normali. Misura (indiretta) della frazione di energia persa dalla misura delle quote successive ad ogni rimbalzo (nota: l'inelasticità può dipendere anche dalla velocità di impatto e, quindi, dalla quota iniziale).
Ora continuiamo per studiare gli altri casi: da una di queste due equazioni e dalla (110) otteniamo un sistema di equazioni lineari, la cui soluzione è:

$$v'_1 \;=\; \frac{2\,m_2\,v_2 + (m_1 - m_2)\,v_1}{m_1 + m_2} \tag{117}$$

$$v'_2 \;=\; \frac{2\,m_1\,v_1 + (m_2 - m_1)\,v_2}{m_1 + m_2} \tag{118}$$

Notazione: possiamo scrivere, in generale:

$$(v'_2 - v'_1) \;=\; \epsilon(v_1 - v_2)\,. \tag{119}$$

dove ϵ ("fattore di conversione") è compreso fra 0 e 1, e vale:
$\epsilon = 1$ in un urto elastico, $\epsilon = 0$ in un urto completamente anelastico;
$\epsilon \approx 0.8$ per le palline da biliardo, $\epsilon \approx 0.58$ per le bocce.
Casi particolari:

$\boxed{v_2 = -v_1}$:

$$v'_1 = \frac{m_1 - 3\,m_2}{m_1 + m_2}\,v_1 \tag{120}$$

$$v'_2 = \frac{3\,m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\,v_1 \tag{121}$$

Sottocaso interessante:

$\underline{m_1 = m_2}$:

$$v'_1 = -v_1 \tag{122}$$

$$v'_2 = v_1 \tag{123}$$

$\rightarrow$ entrambe rimbalzano all'indietro, invertendo il vettore velocità.

$\boxed{v_2 = 0}$:

$$v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\,v_1 \tag{124}$$

$$v'_2 = \frac{2\,m_1}{m_1 + m_2}\,v_1 \tag{125}$$

Sottocasi interessanti:

$\underline{m_1 = m_2}$

$$v'_1 = 0 \tag{126}$$

$$v'_2 = v_1\ : \tag{127}$$

le particelle si scambiano il moto: quella che era ferma si muove con v_1, l' altra si ferma.

$\underline{m_1 \ll m_2}$ (ovvero urto contro un corpo di 'massa infinita')

$$v'_1 = -v_1 \tag{128}$$

$$v'_2 = 0\ : \tag{129}$$

la particella inizialmente in moto rimbalza; l'altra resta 'praticamente' in quiete (ma ha assorbito una quantità di moto pari a $2m_1v_1$!);

$\underline{m_1 \gg m_2}$ (esempio urto di palla grande contro 'pallino'):

$$v'_1 = v_1 \tag{130}$$

$$v'_2 = 2\,v_1\ : \tag{131}$$

la palla pesante prosegue praticamente imperturbata, mentre la seconda 'schizza' in avanti con velocità doppia della palla che l'ha colpita.

$\boxed{v_1 = V_1,\, v_1 = -V_2,\, m_1 \gg m_2}$ con V_1 e V_2 definite positive. (Caso fisico: racchetta contro pallina che viaggia in senso opposto)

$$v'_1 = V_1 \quad (132)$$
$$v'_2 = 2\,V_1 + V_2 \; : \quad (133)$$

la pallina rimbalza con una velocità pari alla sua velocità iniziale, aumentata del doppio della velocità della racchetta (ecco perché i tiri al volo contro palla che viene incontro sono particolarmente 'potenti').

Esercitazione. Svolti o proposti esercizi vari, fra cui:

(a) **Esonero cinematica:**
Due dischi inizialmente uniti e in quiete su un piano orizzontale senza attrito, sono allontanati da una esplosione interna e si muovono alla velocità di $v_1 = 50$ cm/s e $v_2 = -20$ cm/s. Determinare: 1) la velocità del centro di massa; 2) il rapporto fra le due masse; 3) Supponendo che il disco più grande abbia massa $M = 100$ g, trovare l' energia cinetica totale dei due dischi. Sol:
1) Ricordando che $\vec{v}_{CM} = \frac{\vec{p}_{tot}}{M_{tot}}$, e che la quantità di moto di un sistema isolato (i due dischi) si conserva, abbiamo che $\vec{v}_{CM}$= costante=0 (era nulla all' inizio, prima dell' esplosione).
2) conservazione quantità di moto: $(m_1 + m_2)v_i = m_1|v_1| - m_2|v_2|$, segue, poichè $v_i = 0$, che $m_1|v_1| = m_2|v_2|$ e dunque $\frac{m_1}{m_2} = \frac{|v_2|}{|v_1|}$=20/50=0.4.
3)Dunque se m_2=M=100 g (massa maggiore= velocità minore), si ha che $m_2 = 40$ g. $E_c = (1/2)m_1v_1^2 + (1/2)m_2v_2^2$= 7×10^{-3} J.

(b) Urti
Un ladro, dopo aver rubato da un treno che viaggia alla velocità di 6 m/s un sacco postale di massa 20.0 kg, lo getta ad un complice appostato in prossimità dei binari e con sua grande sorpresa vede quest'ultimo, appena afferrato il sacco, spostarsi nella stessa direzione del treno ad una velocità di 1.2 m/s (misurata rispetto ai binari). Quanto vale la massa del complice?
Soluzione:
$m_p = 20$ kg, $v_{treno} = 6$ m/s, $v_{finale} = 1.2$ m/s. Si tratta di un urto completamente anelastico. Conservazione quantità di moto:
m_pv_{treno}=$(m_C + m_p)v_{finale}$
(il pacco inizialmente è sul treno, dunque ha la veloc. v_{treno}). Da cui si ha: $(m_C + m_p) = m_pv_{treno}/v_{finale}$, $m_C = m_pv_{treno}/v_{finale} - m_p = \frac{20\times6}{1.2} - 20$= 80 kg.
Note: abbiamo preso come riferimento i binari, ossia la Terra. Avremmo anche potuto fare i conti prendendo il treno come riferimento e il risultato non sarebbe ovviamente cambiato.
Notiamo anche che il complice doveva stare su una superficie scivolosa, tipo ghiaccio,... altrimenti sarebbe rimasto fermo o al massimo sarebbe caduto... Calcolata anche la $\Delta\vec{p}$.

(c) Esempi di calcolo $\Delta\vec{p}$ di ciscuna delle due palline che urtano. Attenzione ai segni !

(d) Una pallina cade da 1 metro. Sapendo che nel rimbalzo sul pavimento viene perso il 20% dell'energia meccanica, si determini la velocità immediatamente dopo il rimbalzo.
Generalizzate al caso di n rimbalzi. Traccia della soluzione:
Traccia della soluzione:
$(1/2)mv^2 = mgh(1-0.2) = mgh\times0.8$ (se l' en. meccanica si fosse conservata avremmo avuto semplicemente $(1/2)mv^2 = mgh$). Da cui $v = \sqrt{2gh0.8}$.
Nota sulla cons. della quantità di moto che porta la pallina, schematizzata sempre come punto materiale, a mantenere solo la componente verticale della velocità.

(e) Data una forza costante $F = 2000$ N, applicata ad un corpo inizialmente fermo di massa m=50 g, per un tempo Δt di 1 secondo, calcolare la velocità finale raggiunta dal corpo, la sua velocità media e lo spazio percorso nel tempo Δt.
Sol: l' impulso dà la variazione della quantità di moto. Dunque $p_f = mv_f = F\Delta t$, da cui si ha: $v_f = \frac{2000\times1}{0.05} = 4\times10^4$ m/s. La velocità media è: $v_m = (v_f - v_i)/2 = 2\times10^4$ m/s. Lo spazio percorso $s = 1/2\ a(\Delta t)^2$, con $a = F/m$. Oppure con $s = v_m t$. Oppure $L = fs = \Delta E_c$.

(f) Svolto Esercizio su urti e lavoro: oggetto di massa 1 kg urta con velocità 10 m/s un altro oggetto di massa 3 kg. I due corpi rimangono attaccati. Il moto avviene su un piano di μ_D=0.2. Calcolare la distanza che i due corpi percorrono dopo l' urto prima di arrestarsi. Note: l' urto è anelastico. Si calcola v'. Poi si applica $L = \Delta E_c$, dove il lavoro L è compiuto dalla forza di attrito ($f_a = -\mu_D(m_1+m_2)g$). Risultato: la distanza percorsa è 1.6 m. Da svolgere anche con l' uso della cinematica, fatelo !

(g) Un proiettile di massa 20 g colpisce un oggetto a riposo di massa 1 kg. Sapendo che i corpi nell' urto rimangono attaccati e che nell' urto si sono persi 160 J di energia meccanica, calcolare la velocità iniziale del proiettile. Risultato: $v_i = 127.7m/s$. Traccia: conservazione dela quantità di moto nell' urto; differenza fra l' en. cinetica prima dell' urto e l' energia cinetica dopo l' urto pari a ΔE_c =160 J.

(h) **Urti** Due auto, a e b, si scontrano all' incrocio fra due strade perpendicolari. Le masse delle auto sono $m_a = 2400$ kg e $m_b = 1200$ kg. Le velocità prima dell' urto sono $v_a = 30$ km/h e $v_b = 60$ km/h. Supponendo l' urto completamente anelastico, determinare modulo e angolo rispetto alla direzione iniziale di a, del vettore velocità dopo l' urto

(i) **Oscillazioni**.
Es. 6.7 pag. 161 Serway, non è banalissimo: blocco di massa m a distanza h dall' estremità di una molla inizialmente a riposo, viene lasciato cadere sulla molla. Calcolare la compressione massima. Nota $k = 1000$ N/m h=1

m e m=1.6 kg.
1)Preso lo zero dell' energia potenziale gravitazionale nella situazione in cui la molla è stata compressa, a distanza $(h+d)$ dalla posizione iniziale della massa. d è l' incognita.
2)Soluzione data con il bilancio energetico:nella situazione di max compressione tutta l' energia potenziale della massa è energia potenziale della molla:

$$\begin{aligned} mg(h+d) &= \frac{Kd^2}{2} \qquad (134)\\ d^2 - Cd - Ch &= 0 \qquad (135)\\ C &= \frac{2mg}{K} \qquad (136) \end{aligned}$$

3)Soluzione data con il lavoro e teorema dell' energia cinetica, applicati alla situazione in cui la massa è caduta di h, ossia ha appena toccato la molla e ha velocità v (la sua velocità iniziale era 0):

$$\begin{aligned} mg(h+d) &= mgd + \frac{mv^2}{2} \qquad (137)\\ v &= \sqrt{2gh} \qquad (138)\\ L &= \int_0^d (mg - Kx)\,\mathrm{d}x \qquad (139)\\ L &= \Delta E_c = 0 - \frac{mv^2}{2} \qquad (140)\\ mgd - \frac{Kd^2}{2} &= -\frac{mv^2}{2} = -mgh \qquad (141)\\ d^2 - Cd - Ch &= 0 \qquad (142)\\ C &= \frac{2mg}{K} \qquad (143) \end{aligned}$$

ossia, ovviamente, arriviamo alla stessa Equazione con entrambi i procedimenti (il primo è chiaramente più semplice). Abbiamo una eq. di secondo grado, ossia avremo 2 soluzioni. Le 2 soluzioni, per come è stata ricavata l' Equazione, sono le 2 posizioni nelle quali l' energia della molla è tutta potenziale, ossia la posizione di max compressione (risposta al problema) e quella di max elongazione. Nota: ogni volta cha abbiamo una Eq. di secondo grado avremo 2 soluzioni, di cui una sarà la soluzione al nostro problema e l' altra ha comunque un significato fisico e bisognerebbe sempre cercare di capire quale è.

$$d_{+,-} = \frac{C}{2} \pm \sqrt{(\frac{C^2}{4} + Ch)} \qquad (144)$$

$$d_{+,-} = 0.0157 \pm 0.1767 \quad (145)$$
$$d_{+} = 0.192 \quad (146)$$
$$d_{-} = -0.161 \quad (147)$$

Notiamo che:

- il sistema (massa+molla) oscilla attorno a $\frac{C}{2} = 0.0157$ con ampiezza 0.1767;
- il fatto che $\frac{C}{2} = \frac{mg}{K} = 0.0157$ sia la nuova posizione di equilibrio lo si può anche vedere dalla relazione di equilibrio del sistema $mg = Kd_{eq}$;
- le due radici $d_{+,-}$, di cui d_+ è la risposta al problema, sono ampiezze di oscillazione prese rispetto alla posizione iniziale di riposo della molla e per questo non sono uguali in valore assoluto. Ma stressiamo il fatto che rispetto alla nuova posizione di equilibrio il sistema oscilla con ampiezza massima (sia in compressione che in allungamento)$= 0.1767$.

(j) Svolto esercizio n. 5 pag. 234 Serway: sferetta, m=5 g,che scivola su una guida senza attrito, da una quota $h = 3.5R$ percorrendo una traiettoria circolare da un certo punto in poi: trovare la velocità, in funzione di R, ad una certa quota A (quando è in cima alla traiettoria circolare, A=2R) e la forza normale agente sulla sferetta. Dunque conservazione dell' energia meccanica per trovare la velocit'a e diagramma delle forze ricordando che ma in questo caso è $-mv^2/R$ se ragioniamo in termini di forza centripeta. NOTA: non è un moto circolare uniforme perchè l' en. cinetica e dunque la velocità varia con la quota ($E_c + E_p$=costante), dunque ci sarà sia accelerazione radiale (centripeta) che tangenziale. Ma questo non cambia nulla nel calcolo della forza normale agente sulla sferetta in A. Traccia della sol.: Per trovare la velocità in A=2R si applica la conservazione dell' en. meccanica: $mhg = (1/2)mv_A^2 + mg2R$. Da cui: $v_A = \sqrt{3gR}$ (h=3.5 R, e (3.5R-2R)=1.5R). Per la normale: normale, forza peso e centripeta in A sotto tutte dirette verso il basso (la pallina deve stare all' interno della guida, che dunque la "preme" sempre da sotto): $n + mg = mv_A^2/R$, dunque $n = mv_A^2/R - mg = 2mg$=0.098 N.

(k) Esercizio della prova di esonero (una vera "prova" in vista dell' esonero), a febbraio 2006:
1) un blocco di 2 kg è spinto contro una molla di $K = 500$ N/m, accorciandola di 20 cm. Esso viene poi lasciato andare e la molla lo spinge lungo una superficie orizzontale priva di attrito, e poi su un piano inclinato di 45^o anche esso privo di attrito. Determinare: a) la velocità del blocco quando abbandona la molla; b) la distanza percorsa lungo il piano inclinato. Aggiungiamo anche: la quota h alla quale arriva; l' en. potenziale alla quota massima.
Sol: Notiamo che c' è scritto "energia" nel titolo ...
1) Conservazione dell' energia (en. meccanica della molla compressa= en.

cinetica del blocco non appena si stacca): (1/2) $Kx^2 = (1/2)\ mv_b^2$, da cui: $v_b = x\sqrt{K/m}$= $0.2 \times \sqrt{\frac{500}{2}}$=3.2 m/s.

2) Per calcolare la distanza percorsa sul piano inclinato utilizziamo lavoro-energia cinetica. Il lavoro è quello svolto dalla forza di gravità, che tende a riportare il blocco verso il basso. Non c' è attrito. Dunque: $L = -mg\sin\theta\Delta x = 0 - 1/2mv_b^2$ (avendo ora preso l' asse x lungo il piano inclinato, positivo verso l' alto; la vel. iniziale del blocco è v_b, quella finale nulla). Si ricava: $\Delta x = (1/2)v_b^2/(g\sin\theta)$=0.721 m.

3) Domande aggiunte: la quota h si ricava dal Δx, infatti h è un cateto del triangolo rettangolo che ha Δx come ipotenusa: $h = \Delta x \sin\theta$; l' en. potenziale del blocco alla quota massima è ovviamente mgh, che deve coincidere con l' en. iniziale (visto che non ci sono forze dissipative e in h l' en. cinetica del blocco è nulla): $mgh = 1/2Kx^2$=10 J

(formula semplicissima che potrebbe essere un altro modo per calcolare h e anche Δx).

Domanda: come cambiano le cose se sul piano inclinato ci fosse stato attrito, con $\mu_D = 0.2$? (da porgli e lasciargliela come esercizio).

(l) Esercizio. di esonero (dispense di esercizi): quanto vale la velocità angolare a cui dovrebbe ruotare la Terra affinchè la forza centripeta all' equatore sia uguale al peso di un corpo ivi situato; quanto varrebbe T ? Se un uomo che pesa ordinariamente 900 N stesse in piedi su una bilancia all' Equatore, quale sarebbe l' indicazione della bilancia ? Quanto sarebbe la durata del giorno solare medio ?

Prima di risolvere l' esercizio, ridiscussa l' equazione $\vec{F} = m\vec{a}$ nel caso di m sulla superficie della Terra, in piedi su una bilancia all' Equatore: $-mg + T = -m\omega^2\ R_T$, da cui $T = m(g - \omega^2 R_T)$. T è la reazione del vincolo. Nel problema in esame imporre $g = \omega^2 R_T$ corrisponde a $T = 0$, ossia ad assenza di vincolo. Dunque il peso di una persona su una bilancia all' Equatore è nullo. Notiamo che la soluzione $\omega = \sqrt{g/R_T} = 0.0012$ rad/s è identica a quella del problema del corpo in orbita attorna alla Terra, a distanza R_T o del corpo nel tunnel passante per il centro della Terra, problema che faremo. Infatti sono tutti casi in cui non esiste un vincolo ("caduta libera")

La durata del giorno solate medio sarebbe dunque $T = \frac{2\pi}{\sqrt{g/R_T}} \approx 5045$ s.

Ancora esempi di **urti** completamente anelastici: il pendolo 'balistico'.

I fluidi: statica generalità
Numero di Avogadro, mole.
Densità, dati i valori di densità dell' acqua, aria e ferro, come esempio.
Pressione: definizione e unità di misura (1 $N/m^2 = 1$ $pascal$)
Pressione atmosferica: 1 atm=$1.013 \cdot 10^5$ Pa
Fluido a riposo: preso un elementino di fluido la somma delle forze di volume (mg) e di pressione (p_i A_i) deve essere nulla
Variazione di pressione con la profondità: legge di Stevino. Conseguenza è che la pressione ha lo stesso valore in tutti i punti alla stessa quota, indipendentemente dalla forma del contenitore.
Risolto esercizio: Quanto varia la pressione se al mare ci immergiamo di 10 m?
Vasi comunicanti (conseguenza della legge di Stevino)
Legge di Pascal (conseguenza della legge di Stevino)
Il martinetto idraulico.

Esercitazione Svolto es. 15-3 dispense (legge di Stevino) tubo ad U con acqua e olio in equilibrio statico, sono dati i livelli di acqua e olio nelle due colonnine ($l_a = 135$ mm,$l_o = l_a + d$, $d = 12.3$ mm, l_a e l_o rispetto alla base delle 2 colonnine). Calcolare la densità dell' olio.
Sol: la pressione p_1, alla base delle 2 colonnine, è data da:
$p_1 = p_a + \rho_{olio}\,(l_a + d)$, e da $p_1 = p_a + \rho_{acqua}\,l_a$. Uguagliando si ha: $\rho_{olio} = \frac{\rho_{acqua}\,l_a}{l_a+d}$ $= \frac{10^3 \times 0.135}{(0.135+0.0123)} = 0.9 \times 10^3$ kg/m^3.
Notiamo che il fatto che $\rho_1\,l_1 = \rho_2\,l_2$, ossia che il prodotto ρl=costante è proprio il significato della legge di Stevino. Se il fluido è uno solo, questo porta al principio dei vasi comunicanti. .

Misure di pressione: **il barometro di Torricelli** (h colonnina di mercurio, che dà 1 atm). $\rho_{Hg} = 13.6 \times 10^3$ kg/m^3, h_{Hg}=0.76 m=760 mm.
Quanto deve essere alta la colonnina se il liquido anzichè mercurio è acqua ? Facciamo il calcolo e valutiamo che è circa 10 m. Vediamolo in pratica: mostrato bicchiere colmo di acqua, rovesciato (con un foglio di carta appoggiato sopra, per mantenere piano il livello dell' acqua mentre giriamo il bicchiere): l' acqua non cade. Ovviamente finchè il pezzo di carta non si bagna e inizia a rompersi

atmosfera, pascal, mmHg, torr, bar. 1 mmHh=133 pascal. 1 bar= 10^5 pascal. 1 torr $\approx$ 1 mmHg.

Il principio di Archimede Dimostrazione e considerazioni.
Fatto il calcolo: dato un corpo di massa m, volume V_0, densità ρ_0 che galleggia su un fluido di densità ρ_F con V_x immerso, trovare il rapporto V_x/V_0. Si ha equilibrio se: $-mg + F_a = 0$. Esplicitando: $\rho_0\,V_0\,g = \rho_F\,V_x\,g$, da cui $V_x/V_0 = \rho_0/\rho_F$, ovviamente valida solo se $\rho_0 \leq \rho_F$, infatti V_x non può essere maggiore di V_0, e nel caso di $\rho_0 > \rho_F$ il corpo affonderebbe.

Esercitazione

(a) Svolto es. di esonero (princ. di Archimede) sulla statica dei fluidi (es. 5 esonero pag. 261 dispense): calcolo del carico max che può portare una zattera di massa e volume noti. Zattera larga 2 m, lunga 6 m, con un bordo di 40 cm di altezza sull' acqua, di massa, senza carico, 250 kg. Calcolare il carico max.
Sol: $V = 2 \cdot 6 \cdot 0.4 = 4.8$ m^3 noto. All' equilibrio: $(M + m_x)g = \rho_a V g$, dove M=massa zattera, m_x max carico. Da cui: $m_x = \rho_a V - M$=4550 kg.

(b) È ragionevole il fatto che la zia di Harry Potter, per come si vede nel film e per come è descritto nel libro "Il prigioniero di Azkaban", si alzi in volo, se supponiamo che la magia di Harry sia servita solo a "gonfiarla" ? Ed è ragionevoli che riesca a trascinare anche lo zio in volo ?
Discussione e soluzione. Supponiamo che la zia pesi M=100 kg e che Harry l' abbia gonfiata con un fluido di peso trascurabile, ossia la sua massa resti M.
$Mg \leq \rho_{aria} V_{zia} g$ da cui: $V_{zia} >= \frac{M}{\rho_{aria}} = \frac{100}{1} = 100$ m^3, ossia il volume che dovrebbe avere la "zia gonfiata" è decisamente maggiore di quello che si vede nel film, o che si deduce dal libro (passa attraverso la finestra ...). E ancora di più quando trascina lo zio, altrettanto pesante, in volo. Ne deduciamo che la magia di Harry è consistita anche nel farla volare. Nota: se approssiamo la forma della "zia gonfiata" con una sfera, di volume $V = (4/3)\pi r^3$, ricaviamo il raggio $r = \frac{V}{(4/3)\pi} = \frac{100}{4.19} =$ 2.8 m, ossia un diametro di circa 6 m.

Dinamica dei fluidi: generalità, schematizzazione di fluido ideale,
Linee di flusso;
Equazione di continuità $A_1 v_1 = A_2 v_2$ e portata in volume: le dimensioni del prodotto AV sono m^3/s, dunque questo prodotto rappresenta la "portata in volume". La "portata in massa" sono invece kg/s;
Teorema di Bernoulli;
Nota: si può ricavare la legge di Stevino applicando il teorema di Bernoulli;
Tubo di Venturi. Paradosso idrodinamico.
Ricordare dunque che: dall' eq. di continuità segue che la velocità del fluido aumenta se la sezione del condotto diminuisce e, dal teorema di Bernoulli applicato ad un condotto orizzontale, segue che all' aumentare della velocità la pressione diminuisce.

Esercitazione sui fluidi

(a) Portanza dell' aereo. Teoria e poi svolto esercizio (vedi dopo)

(b) Scoperchiamento dei tetti in una bufera.

(c) La pressione nel corpo umano. Considerando 100 mmHg all' altezza del cuore, svolto il calcolo (con Stevino) della pressione ai piedi e sul capo. Sui piedi, supponendo 1.2 m fra cuore e piede, viene una pressione di 188 mmHg. A 0.5 m di altezza dal cuore, viene 63 mmHg.
Approssimiamo il sangue con un fluido di stessa densità dell' acqua. Strozzatura di una vena: dalla relazione fra sezione, pressione e densità (Bernoulli su quota orizzontale) spieghiamo gli eventi impulsivi che precedono la catastrofe, ossia l' ischemia della vena.

(d) **Esercizio aereo:** Se l' aria scorre sulla superficie superiore dell' ala di un aereo a $\vec{v_s} = 150$ m/s e su quella inferiore a $\vec{v_i} = 120$ m/s, si trovi: 1) la differenza di pressione fra le due superfici; 2) se l' area dell' ala è $S = 15$ m^2, si trovi la forza agente verso l' alto sull' ala. Sol:
Si tratta di un problema da risolvere con Bernoulli su quota orizzontale.
1) $p_s + (1/2)\rho_a v_s^2 = p_i + (1/2)\rho_a v_i^2$, da cui $p_i - p_s = (1/2)\rho(v_s^2 - v_i^2)$= $(1/2)\,1.28(150^2 - 120^2)$= 5.18 kPa, con p_i maggiore di p_s, come aspettato essendo v_i minore di v_s.
2) $\vec{F} = \vec{F_i} - \vec{F_s}\ (p_i - p_s)\vec{S}$ =7.8 $\times 10^4$ N, rivolta verso l' alto.

(e) Un cubo di ferro di lato $l = 0.5$ m, è in un recipiente pieno di mercurio. si ha: $\rho_{Hg} = 13.6 \times 10^3$ kg/m^3, $\rho_{Fe} = 7.86 \times 10^3$ kg/m^3. 1) Dire se il cubo galleggia o no e perchè.
2) Se galleggia, determinare l' altezza d di cui è sotto il livello del mercurio. Sol:

1) ρ_{Fe} minore di ρ_{Hg} dunque galleggia
2) Sotto il livello avremo un parallelepipedo rettangolo con due dimensioni pari a l e la terza incognita d. $V_{cubo} = l^3$, $V_{imm} = l^2\,d$. Equilibrio se: $m_{cubo}g = \rho_{Hg}V_{imm}g$, da cui $V_{cubo}\rho_{Fe}g = \rho_{Hg}V_{imm}g$,
$V_{imm} = \frac{\rho_{Fe}}{\rho_{Hg}}V_{cubo}$ e, sostituendo le espressioni dei volumi:
$d = \frac{\rho_{Fe}}{\rho_{Hg}}l = 0.29$ m.

Proposta di esercizi

(a) **Fluidi** La pressione sul fondo di un serbatoio di acqua è di $p_0 = 2 \times 10^5$ Pa superiore a quella atmosferica (ossia $p_2 = p_A + p_0$). Determinare: a) la profondità dell' acqua nel serbatoio; b) se dell' acqua viene versata nel serbatoio al ritmo di 750 l/min e si vuole mantenere costante il livello dell' acqua, quale dovrà essere la superficie di un foro praticato sul fondo del serbatoio ? c) quale sarà la velocità di uscita dell' acqua dal serbatoio in queste condizioni ? (sezione del serbatoio molto maggiore di quella del foro). Sol:
$\Delta p = \rho g h$. Da cui h= 20.4 m.
Voglio che $A_1 v_1 = A_2 v_2$, dove con 2 indico il flusso in uscita e con 1 quello in entrata. $A_1 v_1 = 750$ l/min = $\frac{750\ 10^{-3}}{60}$ =0.0125 m^3/s. Da cui $A_2 = \frac{A_1 v_1}{v_2}$.
Per calcolare v_2 uso Bernoulli, con la pressione $p_1 = p_2 = p_A$ e con $v_1 = 0$.

p_2 è uguale alla pressione atmosferica perche' c' è il foro. Si ha: $v_2 = \sqrt{2gh}$ e $A_2 = 6.25\ 10^{-4}$ m^3.

(b) **Fluidi** Appoggiando un peso di $m_1 = 10$ g nel centro di una tavoletta di legno di $M = 100$ g che galleggia sull'acqua si osserva che la fa affondare fino ad un determinato punto. Ripetendo l'esperimento con la stessa tavoletta, ma facendola galleggiare su una soluzione salina, si nota che per farla affondare fino al punto precedente il peso deve essere di $m_2 = 15$ g. Determinare la densità relativa (rispetto all'acqua) della soluzione salina. Sol:
Indichiamo con V il volume incognito immerso nel fluido, abbiamo: $\rho_a \cdot V \cdot g$ $=$
$(m_1 + M)g$ e $\rho_x \cdot V \cdot g = (m_2 + M)g$ dividendo le due equazioni si ha: $\frac{\rho_x}{\rho_a} = \frac{m_2+M}{m_1+M} = \frac{15+100}{10+100} = 1.045$

(c) **Fluidi** Una cisterna cilindrica chiusa disposta verticalmente, alta $h_0 = 20$ m e con un raggio di 1 m, contiene per metà acqua e per l'altra metà aria ad una pressione di 2 atm. Sul fondo della cisterna viene praticato un foro circolare di 1 cm di raggio. Determinare: a) la velocità di uscita dell'acqua; b) la portata del getto d'acqua R. Sol:
a) Si applica l'equazione di Bernoulli tra un punto sulla superficie dell'acqua dentro la cisterna ed un punto nell'acqua che sta uscendo dal foro. Si tenga presente che l'acqua esce "contro" la pressione atmosferica, mentre la pressione al si sopra dell'acqua nella cisterna è di 2 atmosfere. Si tenga inoltre presente che la velocità di abbassamento dell'acqua nella cisterna può essere trascurata rispetto alla velocità con la quale l'acqua esce dal foro (vedi l' equazione di continuità nei fluidi):
$2P_0 + \rho g h = P_0 + \frac{1}{2}\rho v^2$ dove $h = h_0/2 = 10$ m
$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{2P_0}{\rho} + 2gh} = \sqrt{\frac{2\cdot 1.01\cdot 10^5}{10^3} + 2\cdot 9.8\cdot 10}$ $=19.9\ m/s$
b) $R = v \cdot S = v \cdot \pi r^2 = 19.9 \cdot \pi(10^{-2})^2 = 62.5 \cdot 10^{-4}\ m^3/s = 6.2\ l/s$

(d) Potenza di una centrale idroelettrica:

$$P = \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(mgh)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\, gh\,, \tag{148}$$

ove $\mathrm{d}m/\mathrm{d}t$ è pari al flusso di acqua (in massa, ovvero in kg/s). Dati reali (centrale ENEL della diga sul Tevere di Castel Giubileo, 29/4/05):

- volume di acqua convogliata alle turbine: 180 m^3/s;
- dislivello: 7 m;
- potenza elettrica generata: 12 MW

dai quali ricaviamo $\mathrm{d}m/\mathrm{d}t = 180000$ kg/s (densità acqua= 1000 kg/m^3), da cui $P = 1.80\,10^5\,\mathrm{kg/s} \times 9.8\,\mathrm{m/s^2} \times 7\,\mathrm{m} = 1.2\,10^7\,\mathrm{W} = 12\,\mathrm{MW}$, in accordo con il dato avuto dalla centrale (vuol dire che, a parte arrotondamenti e approssimazioni, l'efficienza di conversione da potenza meccanica a potenza termica è molto elevato).

(e) Determinare la massa complessiva m_{atm} dell' atmosfera terrestre, noto $R_T = 6.37\ 10^6$ m e la pressione atmosferica p_a). Determinare anche il volume, nota la densità, supposta costante (Es. 15.1-5 pag. 534 Serway).
Sol:
Ci deve essere equilibrio fra la forza di gravità sulla massa m_{atm}, diretta verso la superficie terrestre (basso) e la spinta di Archimede, diretta verso l' alto. Dunque $m_{atm} g = \rho_{aria} V_{atm} g = p_{atm} S_{atm}$, dove $S_{atm} = 4\pi R_T^2$. Siamo ricorsi all' uso dell' espressione in funzione della pressione atmosferica perchè è la grandezza che conosciamo, mentre il volume non lo conosciamo. Dunque: $m_{atm} = \frac{p_{atm} S_{atm}}{g} = 1.013 \times 10^5 \times 4\pi \times (6.37 \times 10^6)^2 /9.8 = 5 \times 10^{18}$ kg. E il volume vale $V_{atm} = m_{atm}/\rho_{aria} = \frac{5\times10^{18}}{1.3} \approx 4 \times 10^{18}$

(f) Un corpo di massa 2 kg si muove su un piano orizzontale liscio con $v = 3$ m/s e urta contro una molla di $K = 450$ N/m vincolata ad un estremo su un piano verticale. Calcolare:
1) la max compressione della molla
2) supponendo che il piano sia scabro e che la massa urti la molla alla stessa velocità comprimendola (max compressione) di $x'_{max} = 18$ cm, trovare il μ_D e il lavoro fatto dalle forze di attrito dopo l' urto.
Sol: $x_{max} = 0.2$ m= 20 cm; $\mu_D = 0.48$; $L_{fa} = 1.71$ J

(g) Ad una boa di volume 200 l e $m_b = 20$ kg è appesa una catena di volume trascurabile e $m_c = 100$ kg. Alla catena è attaccato un corpo di volume trascurabile. Trovare:
a) la massa max del corpo appeso, tale che la boa non affondi

b) se il corpo avesse massa $m_x/2$ trovare la frazione di volume che affiora.
Sol:
a) $V_{boa} = 200$ l= 200 dm^3=0.2 m^3. $(m_b + m_c + m_x)g = V_{boa} g \rho_A$ da cui si ricava m_x= 80 kg.
b) Sol 1: $(m_b + m_c + m_x/2)g = \alpha V_{boa} g \rho_A$
qui α è la frazione di volume che è sotto l' acqua. $M_T = (m_b + m_c + m_x/2 = 160$ kg, $\alpha = \frac{M_T}{V_{boa}\rho_A}$. Si trova $\alpha = 0.8$, dunque la frazione di volume che emerge è $1 - \alpha = 0.2$. b) Sol 2: $(m_b + m_c + m_x/2)g = (1 - \alpha) V_b g \rho_A$
qui α è la frazione di volume che emerge l' acqua. Si trova $\alpha = 0.2$, consistente con la definizione data di α.

(h) Si osserva che la velocità limite raggiunta da una pallina lasciata cadere in un fluido è $v_{lim} = 10$ m/s. Determinare la velocità che la pallina aveva dopo 1 secondo.

Altri esercizi:

(a) **Fluidi** Una boa, che affiora sul mare, ha volume V_b= 100 l e massa trascurabile. È ancorata sul fondo del mare con una catena di ferro di spessore trascurabile che ha massa per unità di lunghezza 4 kg (spiegazione: ossia la sua densità lineare è $\lambda = dm/dx = 4$ kg/m). Trovare la max profondità a cui la boa può essere ancorata senza essere trascinata sott' acqua (spiegazione: ossia la max lunghezza della catena).

(b) **Urti:** Una pallina viene lanciata contro un' altra di massa identica, inizialmente a riposo, su un terreno scabro. Il coefficente di attrito dinamico sia $\mu_D = 0.8$. Si consideri l' urto fra le due palline elastico. Calcolare la velocità con la quale la prima deve urtare la seconda, affinchè quest' ultima si fermi dopo 2 m.

(c) **Fluidi:** Abbiamo una fontana con il getto rivolto verso l' alto. L' acqua esce da un tubo di diametro 2 cm, alla velocità di 8 m/s. Calcolare: 1) il diametro del getto all' altezza di 2 m; 2) la quota massima a cui arriva l' acqua.

(d) **Cinematica** Un oggetto lanciato verticalmente verso l'alto impiega 2 secondi prima di tornare al punto di partenza. Trovare:
1) l'altezza massima alla quale arriva l'oggetto; 2) la velocità che esso possiede quando è ad 1/3 dell'altezza massima (si trascuri la resistenza dell'aria).

(e) **Urti** In un urto fra due corpi A e B, che formano un sistema isolato, A subisce una variazione di quantità di moto $\Delta\vec{p}_A = \{1, -4, 3\}\,\mathrm{kg\,m/s}$. Sapendo che B, di massa 2 kg, aveva inizialmente una quantità di moto $\vec{p}_{B_{in}} = \{1, 4, -3\}\,\mathrm{kg\,m/s}$, trovare la sua velocità ed energia cinetica dopo l'urto.

(f) **Dinamica** Un oggetto di massa 1 kg è posto su un piano scabro. Si determina empiricamente che affinché l'oggetto cominci a scivolare è necessario inclinare il piano di 30 gradi. Successivamente il piano è riposizionato orizzontalmente e l'oggetto è tirato con una molla di costante elastica $k = 1000\,\mathrm{N/m}$. Determinare di quando si è allungata la molla quando l'oggetto comincia a muoversi.

(g) **Oscillazioni** Un orologio a pendolo viene portato sulla Luna, dove ricordiamo che $g_L = g/6$. Quanto tempo impiegano le sfere dell' orologio ad indicare un tempo apparente di 12 h ?

Soluzioni esercizi precedenti:

(a) Un carico di 100 kg viene sollevato di 10 m mediante un cavo, con accelerazione costante uguale, in modulo, ad $a = 0.2 \cdot g$ m/s^2, dove g è l' accelerazione di gravità. Determinare: 1) la tensione del cavo, 2) il lavoro complessivo compiuto sul carico, 3) la velocità finale del carico. Soluzione: Prendiamo il sistema di riferimento verso l' alto, nella direzione del moto. Se indichiamo con T la tensione del cavo e con m la massa del carico, avremo $T - mg = ma$.
a) T=mg+ma=mg(1+0.2)=1.18 kN
b) $L_t = T\,h - mgh = 1.96$ kJ, oppure , poichè la forza comlessiva è $F = ma$=196 N, si ha anche che $L_t = F \cdot h$=196 $\cdot$ 10=1.96 kJ.
c) $L_t = \Delta E_c$, dunque (poichè la velocità iniziale è nulla) $v_f = \sqrt{2\,L_t/m}$=6.3 m/s. O anche $v_f = \sqrt{2ah}$, che porta allo stesso risultato (si ottiene o dal lavoro L_t scritto come mah, o dalla rel. velocità-spazio nel moto unif. accelerato: $v_f^2 - v_0^2 = 2a(s - s_0)$).

(b) **Fluidi** Una boa, che affiora sul mare, ha volume V_b= 100 l e massa trascurabile. È ancorata sul fondo del mare con una catena di ferro di spessore trascurabile che ha massa per unità di lunghezza 4 kg (spiegazione: ossia la sua densità lineare è $\lambda = dm/dx = 4$ kg/m). Trovare la max profondità a cui la boa può essere ancorata senza essere trascinata sott' acqua (spiegazione: ossia la max lunghezza della catena). Sol:
equilibrio: $M_c g = \rho_a V_b g$, dove la massa della catena è $M_c = \lambda l$. Da qui si calcola $l = 25$ m

(c) **Urti:** Una pallina viene lanciata contro un' altra di massa identica, inizialmente a riposo, su un terreno scabro. Il coefficente di attrito dinamico sia $\mu_D = 0.8$. Si consideri l' urto fra le due palline elastico. Calcolare la velocità con la quale la prima deve urtare la seconda, affinchè quest' ultima si fermi dopo 2 m.
Sol: Ricordiamo che in un urto elastico centrale $v_1 - v_2 = v_2' - v_1'$ e che, se le due masse sono uguali, le due velocità si scambiano. Ossia $v_2 = 0 = v_1'$ e $v_2' = v_1$, dove v_1 è la velocità che dobbiamo calcolare. $L_{attrito} = -\mu_D mg\Delta x = \Delta E_c$, dove $\Delta x = 2$ m e $\Delta E_c = (1/2)mv_f^2 - (1/2)mv_i^2$ è la variazione di energia cinetica. $v_f = 0$ e $v_i = v_1$. Si ricava: $v_1 = \sqrt{2\mu_D g\Delta x} = \sqrt{2 \cdot 0.8 \cdot 9.8 \cdot 2} = 5.6$ m/s

(d) **Fluidi:** Abbiamo una fontana con il getto rivolto verso l' alto. L' acqua esce da un tubo di diametro 2 cm, alla velocità di 8 m/s. Calcolare: 1) il diametro del getto all' altezza di 2 m; 2) la quota massima a cui arriva l' acqua.
Sol: 1) Si usa Bernoulli e l' equazione della portata (velocità inversamente proporzionale al diametro del getto).
$(1/2)\rho v_1^2 + \rho g h_1 + p_1 =$
$(1/2)\rho v_2^2 + \rho g h_2 + p_2$, con $v_1 = 8m/s$, $h_1 = 0$, $h_2 = 2$ m, ρ = densità dell'

acqua, e $p_1 = p_2 = p_{atm}$.
Portata $= A_1 v_1 = A_2 v_2$. Dunque: $(1/2)\rho v_1^2$=
$(1/2)\rho v_2^2 + \rho g h_2$, da cui si ricava $v_2 = \sqrt{v_1^2 - 2gh_2}$= $\sqrt{8^2 - 2 \cdot 9.8 \cdot 2}$= 4.98 m/s. Ora serve l' equazione della portata, dove mettiamo $A_1 = \pi(d_1/2)^2$, $A_2 = \pi(d_2/2)^2$, con $d_1 = 2$ cm e d_2 da calcolare. Si ricava: $d_2 = d_1\sqrt{v_1/v_2}$=0.02 $\sqrt{8/4.98}$=0.025 m
2) Si usa Bernoulli, con le considerazioni fatte prima, tenendo presente che, alla quota massima, la velocità del getto diventa zero:
$(1/2)\rho v_1^2$=
$\rho g h_{max}$, da cui $h_{max} = (1/2g)v_1^2 = 3.27$ m.

(e) Un oggetto lanciato verticalmente verso l'alto impiega 2 secondi prima di tornare al punto di partenza. Trovare:
1) l'altezza massima alla quale arriva l'oggetto; 2) la velocità che esso possiede quando è a 1/3 dell'altezza massima (si trascuri la resistenza dell'aria). Sol:
1) Per simmetria, il tempo di salita è pari a quello di discesa e quindi l'altezza raggiunta è data da: $h_{max} = g\,(t/2)^2/2$=9.8 $(2/2)^2/2$= 4.9 m. Non ho calcolato la velocità iniziale perchè sto lavorando nel secondo tratto, dalla quota massima verso la quota minima. Più semplice, e il risultato è lo stesso, ovviamente. 2) Per trovare la velocità per la quota $z = h_{max}/3$ usiamo il bilancio energetico $m\,g\,h_{max} = \frac{1}{2}\,m\,v_m^2 + m\,g\,\frac{h_{max}}{3}$, da cui $v_m = \sqrt{2g\,(h_{max} - \frac{h_{max}}{3})} = 8.5$ m/s

(f) In un urto fra due corpi A e B, che formano un sistema isolato, A subisce una variazione di quantità di moto $\Delta\vec{p}_A = \{1, -4, 3\}$ kg m/s. Sapendo che B, di massa 2 kg, aveva inizialmente una quantità di moto $\vec{p}_{B_{in}} = \{1, 4, -3\}$ kg m/s, trovare la sua velocità ed energia cinetica dopo l'urto. Sol:
Per la conservazione della quantità di moto, $\Delta\vec{p}_B = -\Delta\vec{p}_A = \{-1, 4, -3\}$ kg m/s e quindi $\vec{p}_{B_{fin}} = \vec{p}_{B_{in}} + \Delta\vec{p}_B = \{0, 8, -6\}$ kg m/s.
Ne segue $\vec{v}_{B_{fin}} = \vec{p}_{B_{fin}}/m = \{0, 4, -3\}$ m/s, ovvero 5 m/s in modulo. L'energia cinetica finale vale quindi 25 J.

(g) Un oggetto di massa 1 kg è posto su un piano scabro. Si determina empiricamente che affinché l'oggetto cominci a scivolare è necessario inclinare il piano di 30 gradi. Successivamente il piano è riposizionato orizzontalmente e l'oggetto è tirato con una molla di costante elastica $k = 1000$ N/m. Determinare di quando si è allungata la molla quando l'oggetto comincia a muoversi. Sol:
Dall'angolo in cui l'oggetto comincia muoversi otteniamo il coefficiente di attrito statico, in quanto $mg\sin\theta = \mu_s mg\cos\theta$, ovvero $\mu_s = \tan\theta$, pari a $1/\sqrt{3} = 0.577$ con i dati del problema. Quando il piano è orizzontale la condizione di 'stacco' è data da $k\,\Delta x = \mu_s mg$, da cui $\Delta x = \mu_s mg/k = 5.6$ mm.

(h) Un orologio a pendolo viene portato sulla Luna, dove ricordiamo che $g_L = g/6$. Quanto tempo impiegano le sfere dell' orologio ad indicare un tempo apparente di 12 h ? Sol:
Periodo del pendolo sulla luna $T_L = 2\pi\sqrt{l/g_L}$= $2\pi\sqrt{(6 \cdot l)/g}$, dove g=9.8 m/s^2. Dunque: $T_L = \sqrt{6}T_T$, maggiore del periodo sulla Terra, T_T. Dunque, 12 ore apparenti sulla luna sono date da un tempo maggiore di 12 ore, ossia $t_L^{12h} = \sqrt{6} \cdot 12$= 29.4 ore.