1. $\boxed{\textbf{Dagli appunti e dalle lezioni del Prof. Giulio D' Agostini}}$

2. $\boxed{\textbf{Moto circolare uniforme}}$

Introduzione Nel descrivere il moto di un punto materiale servono 3 coordinate, se il moto si svolge nello spazio, 2 se si svolge su un piano e una solamente se il moto è su una linea. Ma la linea non deve essere necessariamente una linea retta, nè la superficie deve essere necessariamente piana (ad esempio la posizione di una nave sulla superficie terrestre è data da due sole coordinate, latitudine e longitudine, che sono coordinate angolari, non cartesiane). Se devo dare la posizione di una macchina da corsa su una pista è semplice capire che usare coordinate cartesiane sarebbe una inutile complicazione ...: ciò che serve ed è semplice è dare la distanza dalla linea di partenza, misurata come strada percorsa lungo la pista o come numero di giri fatti più la strada percorsa lungo la pista nel giro attuale.

Descriviamo il moto su pista circolare Supponiamo di avere un pista circolare e che la macchina stia percorrendo la pista. Il raggio della pista sia R. Abbiamo diversi modi in cui possiamo descrivere il moto della macchina:

(a) utilizzando $s(t)$, lo spazio percorso dal punto di partenza;
(b) utilizzando $\theta(t)$, angolo del raggio che unisce il centro della pista alla posizione della macchina;
(c) utilizzando $g(t)$, il numero di giri compiuti (che può essere an che un numero non intero, tipo 1.3 giri).

I tre modi indicati sono del tutto equivalenti e possiamo passare da una descrizione all' altra seguendo le relazioni:

$$s(t) = R\,\theta(t) \tag{1}$$

ricordando che la relazione fra l' arco s e l' angolo è $s = \theta\,R$. Da qui è chiaro che un angolo sia una grandezza adimensionale, rapporto fra due lunghezze;

$$\theta(t) = 2\pi\,g(t) \tag{2}$$

un giro corrisponde ad un angolo di 2π radianti;

$$s(t) = c\,g(t) = 2\pi R g(t) \tag{3}$$

un giro corrisponde ad avere percorso tutta la circongerenza, ossia $s(t =)2\pi R$;

Da qui seguono altre relazioni, che non vanno memorizzate, ma che dovreste essere in grado di ricavare da soli:

$$\theta(t) = \frac{s}{R} = 2\pi g(t) \tag{4}$$

$$g(t) = \frac{\theta(t)}{2\pi} = \frac{s(t)}{2\pi R} \tag{5}$$

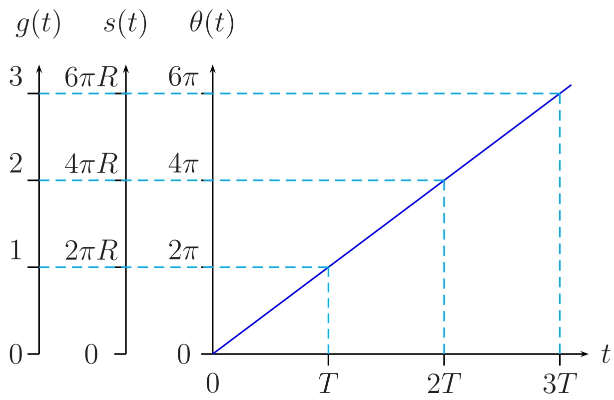

Figura 1: Moto circolare uniforme, in 3 diverse rappresentazioni

Moto a velocità costante Supponiamo ora che la macchina stia percorrendo la pista a velocità (quella segnata sul tachimetro) costante. Abbiamo le seguenti equazioni orarie, tutte rappresentate da una retta in un piano in cui un asse sia il tempo e l' altro la grandezza, s, θ, g considerata (vd. figura).

$$s = vt \quad (+s_0) \tag{6}$$
$$\theta = v_\theta t \quad (+\theta_0) \tag{7}$$
$$g = v_g t \quad (+g_0) \tag{8}$$

dove $v = \frac{ds}{dt}$, $v_\theta = \frac{d\theta}{dt}$, $v_g = \frac{dg}{dt}$
con $v_\theta = \omega$ velocità angolare (dimensioni: inverso di un tempo, unità di misura rad/s)
$v_g = \nu$ frequenza (dimensioni: inverso di un tempo, unità di misura Hz);

Andiamo avanti determinando ora le diverse velocità, supposte costanti in modulo, a partire dalle dimensioni del cerchio (la schematizzazione della nostra pista) e del periodo.

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{2\pi R}{T} \tag{9}$$

per $\Delta t = T$, dove T è il periodo, che corrisponde per definizione al tempo necessario a percorrere una circonferenza;

$$\omega = \frac{\Delta \theta}{\Delta t} = \frac{2\pi}{T} \tag{10}$$

un angolo giro viene percorso ad ogni periodo;

$$\nu = \frac{\Delta g}{\Delta t} = \frac{1}{T} \tag{11}$$

viene percorso un giro ad ogni periodo.

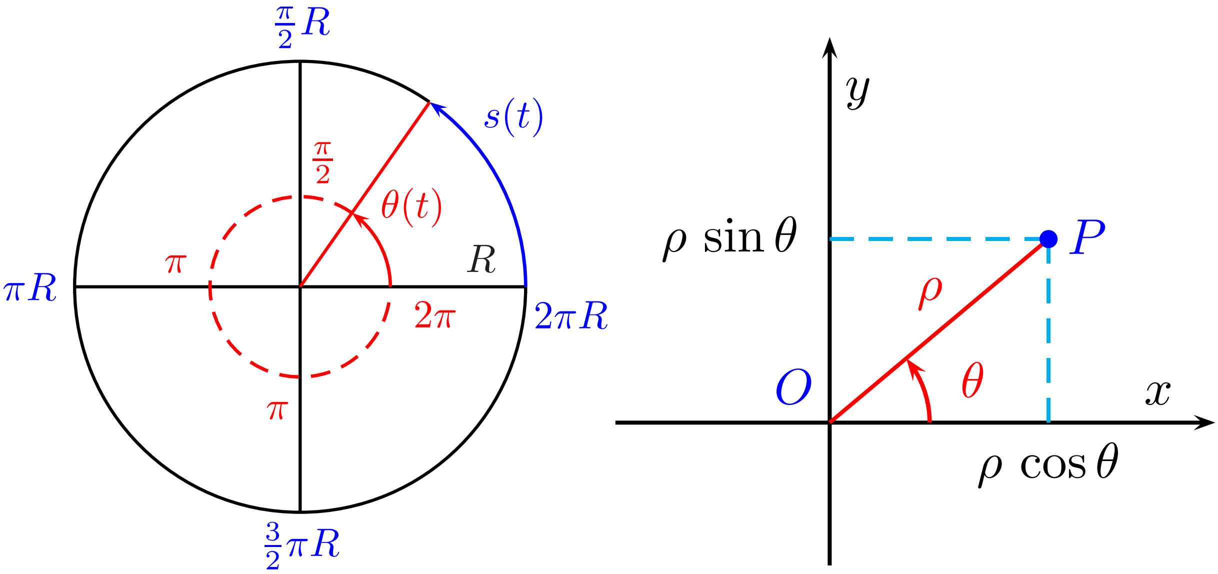

Figura 2: Moto circolare uniforme e relazione fra coordinate cartesiane e polari

Relazioni fra le tre velocità ovviamente analoghe a quelle che intercorrono fra le diverse "coordinate" con cui descriviamo il moto

(a) $v = R\omega$
(b) $\omega = 2\pi\nu = \frac{v}{R}$
(c) $\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{v}{2\pi R}$

Cercate di ricordare/capire/tenere presente che:
Se un corpo fa N giri al secondo farà $2\pi N$ radianti al secondo e percorrerà N circonferenze in un secondo, ossia $N2\pi R$ metri in un secondo
Se un corpo fa N radianti al secondo percorrerà $N\,R$ metri al secondo.

Descrizione tridimensionale del moto Disegniamo il vettore posizione sulla circonferenza che rappresenta la nostra pista circolare di raggio R. Vedi Fig. 2.

La posizione del punto materiale (schematizzazione della macchina) sulla circonferenza è data da P=x, y in coordinate cartesiane e in r, θ in coordinate polari. La relazione fra queste, nel nostro caso in cui la distanza dal centro della circonferenza è sempre $r = R$ (il moto si svolge sulla circonferenza), è:

$$x(t) = R\cos\theta \quad y(t) = R\sin\theta \tag{12}$$

Dalle relazioni precedenti, segue anche che:

$$x(t) = R\cos\omega\,t \quad y(t) = R\sin\omega\,t \tag{13}$$

x, y possono essere considerate le componendi di un vettore che va dal centro della circonferenza al punto P:
$\vec{r} = (R\cos\omega\, t,\ R\sin\omega\, t)$.
Calcoliamo ora le componenti del vettore $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$. Il calcolo di questa derivata lo trovate in questi appunti, all nota "Derivate e integrali..". Si ottiene

$$\vec{v} = \omega R \ \ (-\sin\omega\, t, \cos\omega\, t)$$

E se deriviamo ancora, otteniamo l' accelerazione:

$$\vec{a} = -\omega^2 R \ \ (\cos\omega\, t, \sin\omega\, t)$$

Ossia, vettorialmente abbiamo ottenuto:

$$\vec{a} = -\omega^2 \vec{r}$$

Equazione che descrive il moto armonico: moto oscillatorio con pulsazione ω.

Altre relazioni importanti Velocità e posizione sono sempre ortogonali. L' accelerazione è sempre ortogonale alla velocità e diretta verso il centro della circonferenza. Lo possiamo valutare ad esempio così: al tempo t=0 abbiamo: $\vec{r}(t = 0) = (R, 0)$ e $\vec{v}(t = 0) = (0, \omega R)$, ricordando che $\cos 0 = 1, \quad \sin 0 = 0$. Il primo è dunque un vettore parallelo all' asse delle x, il secondo all' asse delle y. I due vettori sono dunque ortogonali. Per motivi di simmetria questa relazione fra posizione e velocità si mantiene sempre. Il vettore accelerazione è invece parallelo, ma di verso opposto, al vettore spostamento. Calcoliamo il modulo dei tre vettori:

$$|r| = \sqrt{r_x^2 + r_y^2} = R$$

$$|v| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = R\omega$$

$$|a| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = R\omega^2$$

Il modulo dell' accelerazione può anche essere espresso come:

$$|a| = R\omega^2 = v^2/R$$

, ricordando che $\omega = v/R$. Inoltre, poichè $\omega = \frac{2\pi}{T}$, si ha:

$$|a| = (\frac{2\pi}{T})^2 R$$

L' accelerazione, ortogonale alla velocità, ne cambia il verso ma non il modulo. Il moto è dunque accelerato, perchè il vettore velocità cambia. Una accelerazione ortogonale alla velocità e diretta verso il centro si chiama centripeta.