1. **Pozzo per il centro della Terra**

La forza gravitazionale fra corpi non puntiformi è data da una sommatoria dei contributi dei tanti elementini di massa che li costituiscono. Al limite, si sostituisce la sommatoria con un integrale esteso al volume dei corpi. $\vec{F} = \sum_i F_i = \sum_i \frac{G\,\mu_i\,m}{r_i^2}\hat{r}_i$ (se m è di un corpo puntiforme). Se devo calcolare l' attrazione gravitazionale fra una massa distribuita uniformemente su una sfera e un punto materiale interno o esterno ad essa, posso usare il teorema di Gauss. Questo può essere dimostrato matematicamente e vale per qualunque distribuzione di massa. Nel caso sferico, lo si può capire anche in modo "intuitivo", ragionando sulle simmetrie e sulle proprietà della forza gravitazionale: gusci sferici aventi densità di massa uniforme non producono alcuna forza su masse che essi circondano (ossia poste all'enterno di essi). Il punto centrale del teorema di Gauss è legato al fatto che la superficie aumenta sempre con r^2 e la forza gravitazionale va come $1/r^2$. Se il punto materiale è esterno alla sfera per ogni elemento di massa sulla sfera ne esiste un altro che produce una forza uguale in modulo-per quanto detto prima- e contraria in verso.

Pozzo per il centro della Terra. Applicazione al problema del 'pozzo per il centro della Terra': dobbiamo calcolare la forza gravitazionale esercitata dalla Terra su una massa m che cade al suo interno, in funzione della distanza r della massa dal centro della terra:

$$\begin{aligned} F(r) &= -\frac{G\,M(r)\,m}{r^2} && (1)\\ &= -\frac{G\,\rho\,V(r)\,m}{r^2} && (2)\\ &= -\frac{G\,\rho\,4/3\,\pi\,r^3\,m}{r^2} && (3)\\ &= -4/3\,\pi G\,\rho\,m\,r, && (4)\end{aligned}$$

ove ρ indica la densità della terra ($5.5\,10^3\,\mathrm{kg/m^3}$). Da "$F = m\,a$" segue l'equazione differenziale

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}\,t^2} &= -\frac{4}{3}\,\pi\rho\,G\,r && (5)\\ \frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}\,t^2} &= -\frac{g}{R_T}\,r\,, && (6)\end{aligned}$$

ove l'ultima espressione è stata ottenuta ricordandoci che $a_r(r = R_T) = \mathrm{d}^2 r/\mathrm{d}\,t^2(r = R_T) = -g = -\frac{4}{3}\,\pi\rho\,G\,R_T$ (bastava anche semplicemente pensare che l'accelerazione è lineare in r e per $r = R_T$ sappiamo che vale $-g$). Si noti inoltre come la formula $T = 2\pi\,\sqrt{R_T/g}$ potrebbe trarre in inganno e far pensare che il periodo dipende da R_T: in realtà g è quello sulla superficie terrestre, ovvero andrebbe indicato con $g(R_T)$: esso dipende linearmente da R_T, in quanto $g(R_T) = 4/3\,\pi\,\rho\,G\,R_T$, e quindi $R_T/g(R_T)$ non dipende da R_T.

Massa di prova m messa invece in moto attorno alla Terra, a distanza $r \approx R_T$. L' applicazione di $\vec{F} = m\vec{a}$, dove ora $\vec{a}$ è $-m\omega^2 R_T$, ossia l' accelerazione centripeta, porta ad ω identica al caso precedente del moto nel pozzo passante per il centro della Terra.

Dunque, se gettiamo un sasso in un pozzo passante per il centro della Terra, che ad esempio parta e finisca sui Poli, e contemporaneamente una astronave viene messa in moto attorno alla Terra sempre a partire dallo stesso Polo, e poco lontano dalla superficie, i due si fanno "cu-cu'" ogni volta che ripassano per i due Poli.