



SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Raffreddamento atomico e condensati Bose-Einstein

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Fisica

Candidate

Amer Omar

ID number 1679234

Thesis Advisors

Prof. Tullio Scopigno

Dr. Giovanni Batignani

Academic Year 2018/2019

Thesis not yet defended

Raffreddamento atomico e condensati Bose-Einstein

Bachelor thesis. Sapienza – University of Rome

© 2019 Amer Omar. All rights reserved

This thesis has been typeset by L^AT_EX and the Sapthesis class.

Author's email: amer.1679234@studenti.uniroma1.it

Contents

1	Prime tecniche di laser cooling e intrappolamento di atomi	3
1.1	Doppler cooling	4
1.1.1	Limite raffreddamento Doppler	5
1.2	Intrappolamento di atomi neutri	6
1.2.1	Trappole magnetiche	7
1.2.2	Trappole magnetoottiche	7
1.2.3	Trappole a dipolo ottico	9
2	Oltre Doppler cooling	13
2.1	Effetto Sisifo	13
2.1.1	Effetto Sisifo per un atomo in movimento	14
2.2	Raffreddamento evaporativo	15
3	Condensazione di Bose-Einstein	17
3.1	Realizzazione dei condensati di Bose-Einstein	17
3.1.1	Conseguenze realizzazione condensati di Bose-Einstein	18
	Conclusioni	23

Introduzione

Alla normale pressione atmosferica il gas condensa nello stato liquido e successivamente passa allo stato solido mentre vengono raffreddati. Nei liquidi e nei corpi solidi, lo studio degli atomi è reso più difficile dal fatto che i singoli atomi e le molecole si avvicinano troppo l'uno all'altro. Se, tuttavia, il processo avviene nel vuoto, la densità può essere mantenuta sufficientemente bassa da evitare la condensazione e la solidificazione.

Steven Chu, Claude Cohen-Tannoudji, e William D. Phillips hanno sviluppato metodi per utilizzare la luce laser per raffreddare i gas a temperature dei μK e per intrappolare gli atomi.

È stato possibile realizzare il primo condensato di Bose-Einstein nel 1995, fenomeno puramente quantistico previsto già nel 1924 e conseguenza della natura ondulatoria delle particelle. Il condensato di Bose-Einstein è uno stato della materia che si ottiene quando si porta un insieme di bosoni a temperature estremamente vicine allo zero assoluto. In queste condizioni di grande raffreddamento una frazione non trascurabile delle particelle si porta nello stato quantistico di più bassa energia e gli effetti quantistici si manifestano su scala macroscopica.

La tesi è articolata nel seguente modo:

- Raffreddamento Doppler.
- Metodi con i quali si è riusciti ad andare oltre il limite di raffreddamento Doppler, e vengono spiegati come esempi l'effetto Sisifo e il raffreddamento evaporativo.
- Infine nel capitolo tre sono stati studiati i condensati di Bose-Einstein e le conseguenze della realizzazione di quest'ultimi.

Chapter 1

Prime tecniche di laser cooling e intrappolamento di atomi

Il raffreddamento laser (laser cooling) si riferisce ad un insieme di tecniche attraverso le quali un campione di atomi o molecole viene raffreddato a temperature vicino allo zero assoluto. Le tecniche di raffreddamento laser si basano sul fatto che quando un atomo assorbe e riemette un fotone il suo momento cambia. Un fotone di energia $E = h\nu$ ha un momento p , diretto lungo la direzione di propagazione della luce, pari a $p = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c} = \hbar k$, dove k è il vettore d'onda di valore $k = \frac{2\pi}{\lambda}$. A livello microscopico l'azione della luce sul moto degli atomi può essere compresa ricordando che quando un fotone è diffuso da un atomo il momento di rinculo p_r dell'atomo è dato dalla differenza tra il momento del fotone incidente e quello diffuso. Quindi ogni diffusione porta un cambiamento molto piccolo della velocità dell'atomo. Per avere un cambio significativo di velocità si deve aumentare il rate di collisioni atomo-fotone. Questo si può ottenere scegliendo una frequenza della luce incidente vicino alla frequenza di risonanza $\nu_{ba} = \frac{E_a - E_b}{h}$ in modo tale che i fotoni siano assorbiti. Se un atomo di massa M è irradiato da un luce risonante, esso assorbe un fotone in modo da transire dallo stato a allo stato b e l'energia del fotone è convertita in energia interna. Il momento del fotone, causa all'atomo un rinculo verso la direzione della luce incidente e quindi porta a un cambio di velocità pari a $v_r = \frac{\hbar k}{M}$. Ovviamente l'atomo che si trova nello stato eccitato non può più assorbire fotoni dalla luce che lo ha eccitato precedentemente. Quindi tra un assorbimento e un altro, l'atomo deve ritornare nello stato fondamentale attraverso un decadimento spontaneo, accompagnato dall'emissione di luce fluorescente. L'atomo subisce un rinculo anche quando torna nello stato fondamentale. Questa volta però il rinculo è verso una direzione casuale. Quindi la forza netta esercitata sull'atomo è in direzione del raggio di luce incidente, e la massima accelerazione è limitata solamente dal tempo di vita medio dello stato eccitato. Inoltre per far sì che gli atomi non "fuggano" dalla portata dei raggi laser si utilizzano delle trappole atomiche in modo tale da confinare gli atomi stessi nella regione in cui i laser agiscono. [2]

1.1 Doppler cooling

Attraverso il raffreddamento Doppler è possibile usare luce laser per raffreddare un gas di atomi. Per rallentare gli atomi in maniera isotropica, vengono normalmente utilizzati tre fasci laser, disposti lungo le tre direzioni cartesiane.

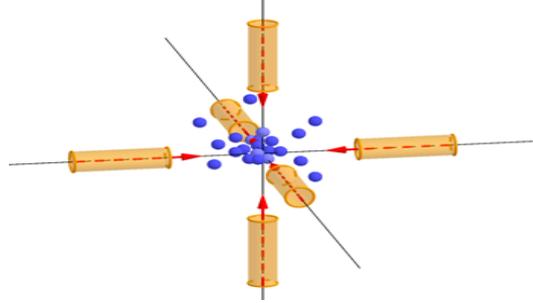


Figure 1.1. Tre fasci laser disposti lungo le tre direzioni cartesiane.[6]

I laser hanno una frequenza inferiore a quella di risonanza ($\nu < \nu_{ba}$). In questo modo un atomo assorbe un fotone solo quando si muove verso la sorgente laser, in quanto la frequenza vista dall'atomo è aumentata per effetto Doppler. Infatti se un oggetto con velocità v si muove a velocità non relativistiche, la lunghezza d'onda λ è, al primo ordine in v/c

$$\lambda = \lambda_0(1 \pm v/c) \quad (1.1)$$

dove il segno meno corrisponde a quando l'atomo si avvicina e il segno più a quando si allontana. Conseguentemente cambierà anche la pulsazione che sarà data da $\omega = \omega_0(1 \mp v/c)$ [7].

Quando l'atomo assorbe un fotone ha un rinculo verso la direzione del raggio laser e quindi rallenta. La successiva ri-emissione del fotone attraverso l'emissione spontanea porta un rinculo verso una direzione casuale, e quindi l'effetto netto è una decelerazione.

Un singolo laser esercita sull'atomo una forza pari a :

$$\vec{F} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} = \hbar\vec{k}\gamma_p \quad (1.2)$$

Dove $\Delta\vec{p}$ indica il momento scambiato, Δt indica il tempo in cui l'atomo si trova nello stato eccitato e conseguentemente γ_p indica il rate di eccitazione dell'atomo. Il rate di eccitazione γ_p per un atomo a due livelli è dato da:

$$\gamma_p = \frac{s_0\gamma/2}{1 + s_0 + [2(\delta + \omega_d)/\gamma]^2} \quad (1.3)$$

dove il parametro $\delta = \omega_l - \omega_a$ indica la differenza tra la frequenza laser e la frequenza di risonanza atomica, $\gamma = \frac{1}{\tau}$ indica il rate di decadimento dello stato eccitato in assenza di radiazione elettromagnetica, $s_0 = I/I_0$ è il rapporto tra l'intensità di radiazione elettromagnetica e l'intensità di saturazione e ω_D è lo spostamento di

frequenza del laser vista dall'atomo per effetto Doppler. Matematicamente la somma tra le forze esercitate dai raggi laser da destra e da sinistra è :

$$F_{OM} = F_{scatt}(\omega - \omega_0 - kv) - F_{scatt}(\omega - \omega_0 + kv) \cong F_{scatt}(\omega - \omega_0) - kv \frac{\partial F}{\partial \omega} - [F_{scatt}(\omega - \omega_0) + kv \frac{\partial F}{\partial \omega}] \cong -2 \frac{\partial F}{\partial \omega} kv$$

Questo squilibrio nelle forze derivanti dallo spostamento Doppler può essere scritto come

$$F = -\alpha v \quad (1.4)$$

Gli atomi è come se si muovessero in un mezzo viscoso creato dalla luce laser, chiamato 'melassa ottica'. Derivando l'espressione della forza otteniamo il coefficiente di smorzamento

$$\alpha = 2k \frac{\partial F}{\partial \omega} = 4\hbar k^2 \frac{I}{I_{sat}} \frac{-2\delta/\gamma}{[1 + (2\delta/\gamma)^2]^2} \quad (1.5)$$

Dove il termine I/I_{sat} è stato trascurato al denominatore in quanto si sta trattando il caso di basse intensità, quando il processo di emissione stimolata si può trascurare. Lo smorzamento richiede un valore positivo di α e quindi un detuning $\delta < 0$ in accordo con la spiegazione fisica della melassa ottica. [6]

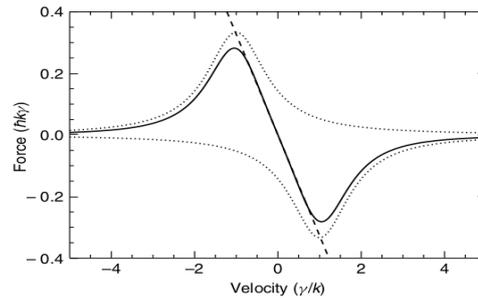


Figure 1.2. Le due linee tratteggiate mostrano la forza esercitata dai laser singolarmente, mentre la linea continua è la loro somma. [9]

1.1.1 Limite raffreddamento Doppler

Se non ci fossero altri effetti sul moto degli atomi, tutti questi decelererebbero rapidamente fino ad arrivare a $v = 0$, il campione raggiungerebbe una temperatura T pari a 0, un risultato non accettabile dal punto di vista fisico. Nei laser cooling emergono forze dovute allo scambio di momento tra gli atomi e i fotoni. Nonostante il momento medio trasferito per ogni emissione è 0, è diversa da 0 l'energia ricevuta da ogni rinculo; questa energia viene convertita in energia cinetica e il campione di atomi viene così riscaldato. L'equilibrio tra il riscaldamento e il raffreddamento avviene ad una temperatura minima chiamata "Doppler cooling limit", che ha un ordine di grandezza pari a $T_D = \frac{\gamma}{2k_b}$ dove γ è la larghezza della linea di risonanza e k_b la costante di Boltzmann. [2]

La forza di melassa riduce la velocità media degli atomi fino a zero, ma, mentre il valor medio della velocità tende a zero, il valor medio del quadrato della velocità

non fa altrettanto. La forza viscosa che è stata ricavata è solo la forza media; le fluttuazioni della forza producono riscaldamento. Un atomo con velocità media nulla ha la stessa probabilità di assorbire un fotone dall'onda che si propaga in un verso, come dall'onda che si propaga in senso opposto. Questo assorbimento porta ad un incremento di $\hbar k$ nell'impulso dell'atomo, che può essere sia positivo che negativo con uguale probabilità. Allo stesso modo l'emissione spontanea rappresenta un cammino casuale in tutte le direzioni spaziali. Durante un tempo t un atomo diffonde un numero medio di fotoni pari a $N = \gamma_p t$. Dunque l'emissione spontanea causa un incremento della velocità quadratica media di $\overline{v_z^2} = \eta \gamma_p t v_r^2$. Ciascuna emissione spontanea da un rinculo nella direzione z di $\hbar k \cos(\theta)$, dove $\eta = \langle \cos^2(\theta) \rangle$ è la media angolare. Allo stesso modo si calcola l'aumento della velocità media quadratica, dovuto alle fluttuazioni in assorbimento e in questo caso si ha un aumento di $v_r^2 \gamma_p t$. Inserendo questi contributi nell'equazione (1.4) e assumendo che per una coppia di laser lo scattering rate è $2\gamma_p$ otteniamo

$$\frac{1}{2} M \frac{d\overline{v_z^2}}{dt} = (1 + \eta) E_r (2\gamma_p) - \alpha \overline{v_z^2} \quad (1.6)$$

dove $E_r = \frac{1}{2} M v_r^2$ è l'energia di rinculo. Se l'emissione spontanea è isotropica, la media sugli angoli da un valore di $\eta = \frac{1}{3}$ ma nella configurazione di sei laser l'emissione spontanea è tre volte più grande rispetto a quando se ne hanno solo due. Dunque il fattore $1 + \eta$ nell'equazione precedente diventa $1 + 3\eta = 2$. Ponendo l'equazione (1.6) uguale a zero otteniamo [6]

$$\overline{v_z^2} = 2E_r \frac{2\gamma_p}{\alpha} \quad (1.7)$$

L'energia cinetica è legata alla temperatura secondo il teorema dell'equipartizione da $\frac{1}{2} M \overline{v_z^2} = \frac{1}{2} k_B T$ sostituendo l'espressioni per α e γ_p otteniamo

$$k_B T = \frac{\hbar \gamma}{4} \frac{1 + (2\delta/\gamma)^2}{-2\delta/\gamma} \quad (1.8)$$

Questa funzione di $x = -2\delta/\gamma$ ha un minimo per $\delta = -\gamma/2$, dunque la temperatura limite è

$$T_D = \frac{\hbar \gamma}{2k_B} \quad (1.9)$$

1.2 Intrappolamento di atomi neutri

Le melasse ottiche permettono di accumulare un campione di atomi, nella regione di spazio in cui i tre fasci contropropaganti si intersecano, in un regime di moto diffusivo. Questo non vuol dire però che siano intrappolati, infatti, per avere il confinamento in una certa regione dello spazio, è necessario che sugli atomi agisca una forza dipendente dalla posizione e che sia diretta verso il punto di intrappolamento. In questo modo un atomo che si allontani in una qualunque direzione dalla zona di intrappolamento risente di una forza di richiamo verso il centro della trappola. Le trappole atomiche possono essere classificate in 3 principali categorie a seconda dal procedimento fisico impiegato per confinare gli atomi:

- Un momento di dipolo atomico indotto.
- Campi magnetici.
- Una combinazione di campi magnetici e pressione di radiazione.

1.2.1 Trappole magnetiche

Le trappole magnetiche sfruttano l'interazione dell'atomo con un campo magnetico non uniforme. Un atomo possiede un proprio momento di dipolo magnetico μ , che è legato al momento angolare totale dell'atomo. In presenza di un campo magnetico \vec{B} l'atomo ha un'energia potenziale $-\vec{\mu} \cdot \vec{B}$, e risente una forza $\vec{F} = \nabla(\vec{\mu} \cdot \vec{B})$. Gli atomi intrappolati hanno $\vec{\mu}$ antiparallelo a \vec{B} e sentono una forza diretta verso il minimo del campo magnetico. [6], [9]

La trappola magnetica più semplice è formata dal campo magnetico di quadrupolo creato nel centro di due bobine che trasportano correnti in direzioni opposte, dove il campo magnetico svanisce. Una caratteristica particolarmente interessante delle trappole magnetiche è la possibilità di espellere gli atomi con un'energia ben definita guidando una transizione a radiofrequenza allo stato non intrappolato dove $\vec{\mu}$ è parallelo a \vec{B} .

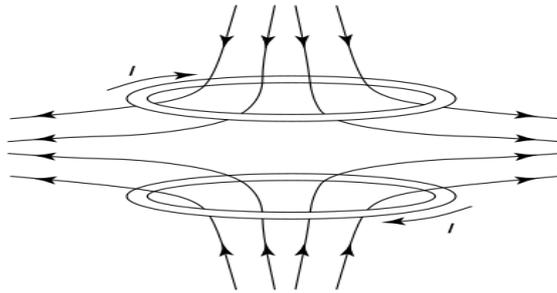


Figure 1.3. Due bobine che trasportano correnti in direzioni opposte, dove si vede che il campo magnetico al centro si annulla. [6]

1.2.2 Trappole magnetoottiche

L'idea che sta alla base delle trappole magnetoottiche (abbreviata in MOT dall'inglese Magneto-Optical Trap) è quella di sovrapporre alla melassa ottica un campo magnetico B statico e non omogeneo in modo tale che l'atomo allontanandosi dall'origine possa sentire una forza di richiamo. La forza di richiamo può essere facilmente ottenuta a partire da una configurazione di fasci di melassa con la giusta polarizzazione e l'aggiunta di un gradiente di campo magnetico.

Nella MOT, un gradiente di campo magnetico (come quello generato da due bobine in configurazione anti-Helmholtz) causa uno sbilanciamento tra le coppie di forze per pressione di radiazione dovute ai fasci contropropaganti, in funzione della posizione dell'atomo dal centro magnetico. Non è il campo magnetico, ma la forza per pressione di radiazione che confina gli atomi. [6]

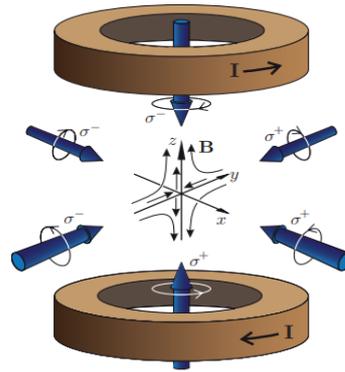


Figure 1.4. Una trappola magneto-ottica tridimensionale è formata da tre paia di fasci ortogonali, come nella melassa ottica, con la giusta configurazione di polarizzazioni circolari, che si incrociano al centro di una coppia di bobine in configurazione anti-Helmholtz. Nel centro di simmetria il campo è zero e, per piccole distanze, la sua ampiezza aumenta linearmente in tutte le direzioni dello spazio.[6]

In figura è mostrato il funzionamento di una MOT monodimensionale (ad esempio la direzione z lungo l'asse delle bobine) per una transizione $J = 0 \rightarrow J = 1$, come può essere quella dallo stato fondamentale ad uno eccitato negli alcalino-terrosi.

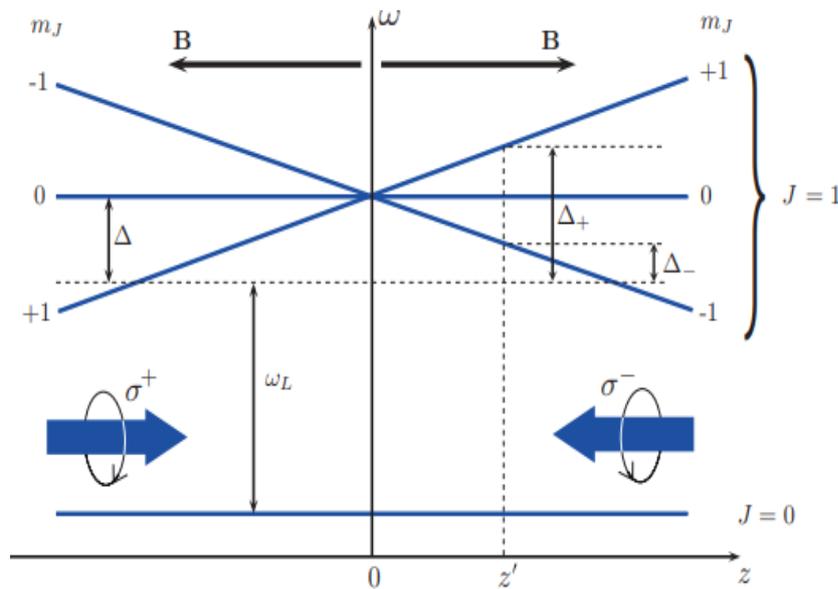


Figure 1.5. Meccanismo di funzionamento di una trappola magneto-ottica monodimensionale su una transizione $J = 0 \rightarrow J = 1$. L'illustrazione non è in scala; lo spostamento Zeeman è molto minore dell'energia della transizione ottica. [6]

Nel punto centrale tra le bobine, i campi magnetici prodotti dalle bobine si cancellano, quindi $B(z = 0) = 0$. In prossimità di questo zero del campo è presente un gradiente di campo uniforme, del tipo $B(z) = bz$, dove $b = \frac{dB}{dz} = \text{costante}$,

che perturba i livelli atomici. Lo spostamento Zeeman per i tre sottolivelli (con $m_j = 0, \pm 1$) del livello $J = 1$ sarà lineare con la posizione degli atomi:

$$\Delta E(z) = g_j m_j \mu_B B(z) \quad (1.10)$$

Il relativo spostamento in frequenza risulta:

$$\omega_0(z) = \omega_0(0) + m_j \beta z \quad (1.11)$$

dove $\beta = \frac{g_j \mu_B b}{\hbar}$. Lo stato eccitato con $m_j = +1$ è spostato in alto per $z > 0$, mentre lo stato con $m_j = -1$ è spostato verso il basso. Per $z < 0$ la situazione è invertita perché il campo magnetico è diretto nella direzione opposta.

Due fasci laser contropropaganti con polarizzazioni circolari opposte, entrambi con un disaccordo in frequenza $\Delta < 0$ rispetto alla risonanza atomica nello zero magnetico, investono gli atomi. L'effetto Zeeman produce uno sbilanciamento della forza per pressione di radiazione esercitata dai due fasci contropropaganti nel seguente modo. In posizione z' di figura 1.5, il campo magnetico provoca uno spostamento della transizione $\Delta m_j = -1$ verso la risonanza, mentre provoca un'allontanamento della transizione $\Delta m_j = +1$. Se la polarizzazione del fascio laser incidente da destra è σ^- , e corrispondentemente σ^+ per l'altro fascio, gli atomi interagiranno maggiormente con il fascio σ^- piuttosto che con il fascio σ^+ . Quindi gli atomi verranno spinti verso il centro della trappola dove il campo magnetico è zero. Dall'altra parte della trappola, il ruolo degli stati $m_j = \pm 1$ è invertito e gli atomi interagiranno maggiormente con il fascio polarizzato σ^+ , venendo nuovamente spinti verso il centro. [6]

La situazione è del tutto analoga allo smorzamento della velocità nella melassa ottica da parte dell'effetto Doppler. Nella MOT il meccanismo avviene nello spazio delle posizioni ed è dovuto all'effetto Zeeman. Poiché la radiazione laser ha un disaccordo in frequenza negativo in entrambi i casi, nella MOT si può realizzare simultaneamente il raffreddamento e l'intrappolamento. Per descrivere matematicamente la trappola magneto-ottica possiamo incorporare lo spostamento di frequenza causato dall'effetto Zeeman nell'espressione della F_{OM} così da ottenere

$$\begin{aligned} F_{MOT} &= F_{scatt}^{\sigma^+}(\omega - kv - (\omega_0 + \beta z)) - F_{scatt}^{\sigma^-}(\omega + kv - (\omega_0 - \beta z)) \cong \\ &\cong -2 \frac{\partial F}{\partial \omega} kv + 2 \frac{\partial F}{\partial \omega_0} \beta z \end{aligned}$$

Il termine $\omega_0 + \beta z$ è la frequenza risonante di assorbimento per la transizione $\Delta M_J = 1$ alla posizione z , e $\omega_0 - \beta z$ è quella per $\Delta M_J = -1$. La forza dipende dal detuning $\delta = \omega - \omega_0$, quindi $\frac{\partial F}{\partial \omega_0} = -\frac{\partial F}{\partial \omega}$ e quindi

$$F_{MOT} = -2 \frac{\partial F}{\partial \omega} (kv + \beta z) = -\alpha v - \frac{\alpha \beta z}{k} \quad (1.12)$$

1.2.3 Trappole a dipolo ottico

Le trappole a dipolo ottico sfruttano l'interazione non risonante fra gli atomi e il campo elettrico della radiazione. Quando un atomo viene posto in un fascio di luce laser, il campo elettrico $\vec{E}(\vec{r}, t)$ induce un momento di dipolo $\vec{p}(\vec{r}, t)$, il quale oscilla

con la stessa frequenza del campo. Le ampiezze dei due vettori sono legate da una relazione di proporzionalità tramite la costante di polarizzabilità complessa α , che dipende dalla frequenza ω

$$\vec{p}(\vec{r}) = \alpha \vec{E}(\vec{r}) \quad (1.13)$$

Ciò consente di calcolare il potenziale di interazione U , dato dalla formula

$$U = -\Re(\alpha)|E|^2 = -\frac{1}{2\epsilon_0 c} \Re(\alpha) I(\vec{r}) \quad (1.14)$$

dove \Re indica la parte reale ed è stata utilizzata la relazione $I = 2\epsilon_0 |E|^2$ che lega l'intensità della luce al modulo del campo elettrico. La forza di dipolo è il gradiente dell'energia potenziale

$$F = -\nabla U \quad (1.15)$$

A differenza di quanto accade in una melassa ottica oppure in una trappola magnetooptica, dove l'interazione è quasi risonante, in questo tipo di trappola non si ha dissipazione di energia: il potenziale risultante è conservativo e non si ha alcun effetto di raffreddamento. In questo senso le trappole ottiche di dipolo funzionano in modo molto simile alle trappole magnetiche, con la differenza che in una trappola ottica si possono intrappolare atomi indipendentemente dal loro stato interno di momento angolare, al contrario di quello che accade in una trappola magnetica, dove soltanto alcuni stati interni risultano essere intrappolabili.

È utile ora calcolare la polarizzabilità. Nel campo classico, la polarizzabilità può essere ricavata dal semplice modello di Lorentz dell'oscillatore classico. Nel modello di Lorentz, l'elettrone di massa m e carica e è considerato legato elasticamente al nucleo con una frequenza propria di oscillazione ω_0 e sottoposto all'accelerazione da parte del campo esterno ed allo smorzamento dovuto all'emissione di radiazione di dipolo. L'equazione del moto di tale sistema è [5] :

$$\ddot{x} + \gamma_w \dot{x} + \omega_0^2 x = -\frac{eE(t)}{m} \quad (1.16)$$

L'integrazione dell'equazione di sopra porta a determinare per il coefficiente di polarizzabilità il valore :

$$\alpha = \frac{e^2}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - im\omega\gamma_w} \quad (1.17)$$

dove

$$\gamma_w = \frac{e^2 \omega^2}{6\pi\epsilon_0 m c^3} \quad (1.18)$$

È il coefficiente di frenamento, dato dall'equazione di Larmor, dovuto alla perdita di energia radiativa.

Facendo le seguenti sostituzioni :

- $\frac{e^2}{m} = \frac{\gamma_w 6\pi\epsilon_0 c^3}{\omega^2}$
- $\gamma = \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 \gamma_w$

Si ottiene:

$$\alpha = 6\pi\epsilon_0 c^3 \frac{\gamma}{\omega_0^2} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma \frac{\omega^3}{\omega_0^2}} \quad (1.19)$$

Nella maggior parte degli esperimenti, il laser utilizzato opera nella condizione di *far detuning*, cioè con una frequenza sufficientemente lontana da quella di risonanza in modo tale da rendere trascurabile il termine di smorzamento; in questa approssimazione il calcolo fornisce

$$U(\vec{r}) = -\frac{3\pi c^2}{2\omega_0^3} \left(\frac{\gamma}{\omega_0 - \omega} + \frac{\gamma}{\omega + \omega_0} \right) I(\vec{r}) \quad (1.20)$$

Questa espressione mostra i due contributi di risonanza. Oltre al termine di risonanza solitamente considerato, $\omega = \omega_0$, c'è anche il cosiddetto termine contro-rotante $\omega = -\omega_0$. Quest'ultimo risulta trascurabile nell'approssimazione di onda rotante, ovvero in modo talche che $\delta = \omega - \omega_0$ soddisfi la condizione $|\delta| \ll \omega_0$. In questo caso l'espressione del potenziale si semplifica a :

$$U(\vec{r}) = \frac{3\pi c^2}{2\omega_0^2} \frac{\gamma}{\delta} I(\vec{r}) \quad (1.21)$$

A livello pratico, la frequenza dell'onda laser deve essere tale da poter soddisfare entrambe le approssimazioni appena fatte, discostandosi quindi non eccessivamente dalla frequenza propria del sistema oscillante. [5]

Una trappola ottica efficace deve limitare il più possibile i fenomeni di assorbimento e quindi il rate di scattering, favorendo invece l'interazione di dipolo.

Esistono due regioni di utilizzo di queste trappole:

- Red detuning ($\delta < 0$) : Il potenziale di dipolo è negativo, si verifica quindi che l'atomo è attratto verso regioni di alta intensità del campo, in quanto i minimi del potenziale occorrono in corrispondenza dei massimi d'intensità.
- Blue detuning ($\delta > 0$) l'interazione dipolo respinge gli atomi dal campo e i minimi potenziali corrispondono ai minimi dell'intensità.

Chapter 2

Oltre Doppler cooling

La spiegazione fisica per le temperature molto basse misurate avvenne a metà del 1988, quando gruppi a Stanford e a l'École normale supérieure proposero indipendentemente nuovi meccanismi di raffreddamento. L'origine fisica di questi nuovi meccanismi si basa sul fatto che gli atomi non sono un semplice sistema a due livelli, ma hanno vari sottostati Zeeman nello stato fondamentale che sono degeneri in assenza di un campo magnetico. Questi sottolivelli hanno aperto la porta ad importanti effetti fisici come il pompaggio ottico, che trasferisce atomi da un sottolivello g_m dello stato fondamentale g ad un altro sottolivello g'_m , attraverso cicli di assorbimento-emissione spontanea. Inoltre si deve considerare l'esistenza di gradienti di polarizzazione della luce (variazione spaziale della polarizzazione della luce) e dei light shifts.

2.1 Effetto Sisifo

All'inizio del 1988, misure più precise della temperatura, nella melassa ottica, mostrarono che la temperatura era di circa $40\mu K$, molto più bassa di quella stimata di $240\mu K$. Dunque un altro meccanismo di raffreddamento stava operando. Come esempio di un meccanismo che permette di raggiungere temperature inferiori alla temperatura Doppler, si descrive l'effetto Sisifo. [3], [4]

Tale effetto si ha in una melassa ottica in presenza di un gradiente di polarizzazione, come quello che si ottiene, per esempio, quando i fasci laser contropropaganti hanno polarizzazione lineare opposta.

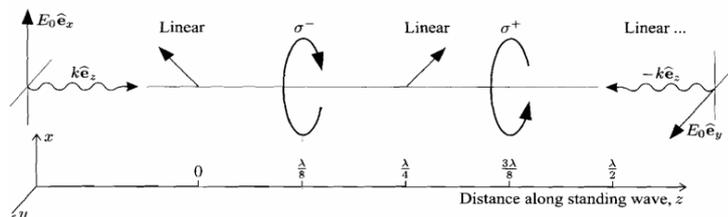


Figure 2.1. I raggi laser contropropaganti con polarizzazione lineare ortogonale producono un campo totale la cui polarizzazione cambia ogni $\frac{\lambda}{8}$ da polarizzata linearmente a polarizzata circolare. [6]

Per ottenere tale effetto gli atomi devono anche avere uno stato fondamentale con momento angolare J diverso da zero, in modo da possedere sottolivelli con diversa componente del momento angolare m_j . Tali sottolivelli risultano spostati in energia a causa dell'effetto Stark dinamico, che dipende da m_j e dallo stato di polarizzazione della luce.

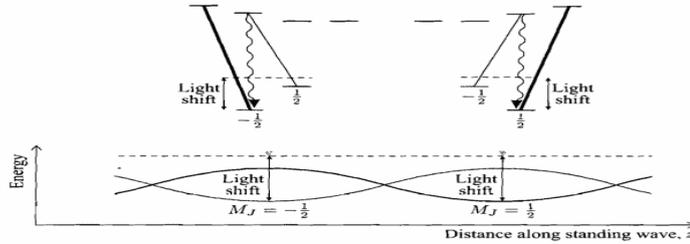


Figure 2.2. Energie degli stati alle posizioni di polarizzazione σ^+ e σ^- [6]

Per avere almeno due sottolivelli Zeeman nello stato fondamentale g , si prenda il semplice caso di una transizione atomica dallo stato fondamentale g con $J_g = \frac{1}{2}$ allo stato eccitato e con $J_e = \frac{3}{2}$. Si tratti il caso in cui gli atomi sono illuminati da due fasci laser contropropaganti di lunghezza d'onda λ_l con polarizzazione lineare opposta. A causa del gradiente di polarizzazione, le popolazioni e le energie dei due sottolivelli dello stato fondamentale dipendono fortemente dalla posizione dell'atomo lungo l'asse z . Consideriamo ad esempio un atomo a riposo che si trova a $z = \frac{\lambda}{8}$ dove la polarizzazione della luce è σ_- . L'assorbimento di un fotone σ_- può portare l'atomo dallo stato fondamentale $g_{\frac{1}{2}}$ allo stato eccitato $e_{-\frac{1}{2}}$ dal quale può decadere in $g_{-\frac{1}{2}}$. (Se l'atomo decadesse in $g_{\frac{1}{2}}$ potrebbe assorbire un altro fotone σ_- ed avere un'altra possibilità di arrivare allo stato $g_{-\frac{1}{2}}$.) Allo stesso modo assorbendo un fotone dallo stato fondamentale $g_{-\frac{1}{2}}$ l'atomo si porterebbe nello stato eccitato $e_{-\frac{3}{2}}$ dal quale potrebbe decadere solamente nello stato $g_{-\frac{1}{2}}$. Segue quindi che in stati stazionari, tutta la popolazione è otticamente pompata nello stato $g_{-\frac{1}{2}}$. Conseguentemente lo spostamento di energia Δ dello stato $g_{-\frac{1}{2}}$, dovuto all'effetto Stark dinamico, è tre volte più grande (in modulo) della variazione di energia Δ di quello dello stato $g_{\frac{1}{2}}$, in quanto lo spostamento di energia è tanto maggiore quanto maggiore è la probabilità di eccitazione a partire da quel sottolivello. Se la polarizzazione della radiazione non è costante, ma è diversa in differenti regioni dello spazio, lo spostamento dei livelli di energia dipenderà dalla posizione dell'atomo. Se l'atomo è a riposo a $z = \frac{3\lambda}{8}$ dove la polarizzazione è σ_+ , le precedenti conclusioni sono invertite. Se l'atomo si trova invece in un punto in cui la polarizzazione è lineare, considerazioni di simmetria mostrano che i due sottolivelli sono ugualmente popolati ed hanno dunque lo stesso shift di energia.

2.1.1 Effetto Sisifo per un atomo in movimento

Supponiamo che l'atomo si muova da sinistra verso destra, a partire dalla posizione $z = \frac{\lambda}{8}$. A causa della polarizzazione σ^- della luce, esso è 'pompato' otticamente

nel sottolivello $g_{-\frac{1}{2}}$. Se ha una velocità tale da percorrere una distanza dell'ordine di $\frac{\lambda}{4}$ nel tempo τ_p , necessario per il pompaggio ottico da un sottolivello all'altro dello stato fondamentale, l'atomo rimarrà nel sottolivello $g_{-\frac{1}{2}}$ fino a che non avrà raggiunto una posizione in cui la polarizzazione della radiazione è σ^+ ; potrà allora effettuare la transizione verso il livello dello stato eccitato $e_{\frac{1}{2}}$ e decadere poi nel sottolivello $g_{\frac{1}{2}}$, a partire dal quale sarà possibile iniziare un nuovo ciclo [6], [9].

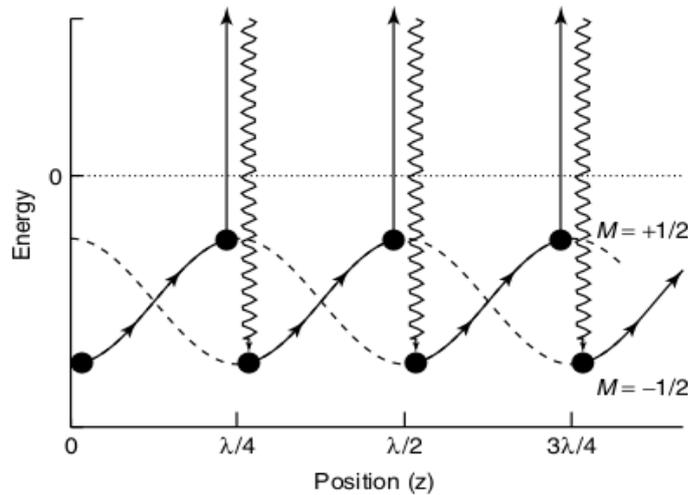


Figure 2.3. Le frecce mostrano il cammino eseguito dagli atomi raffreddati.[9]

Dunque muovendosi attraverso il campo luminoso, gli atomi devono aumentare la loro energia potenziale a causa del gradiente della polarizzazione della luce. Dopo aver viaggiato per una distanza di $\frac{\lambda}{4}$ la polarizzazione sarà cambiata, gli atomi arrivano in cima alla "collina di potenziale", dove hanno la massima probabilità di essere "pompati" otticamente nel livello eccitato per poi decadere nuovamente nello stato fondamentale con un valore m_j diverso da quello di partenza. A questo punto l'atomo si troverà nuovamente ai piedi della "collina" di potenziale e dovrà scalarne un'altra. Il processo si ripete finché l'energia cinetica diventa troppo piccola per scalare la prossima collina. Nello scalare la barriera di potenziale, l'energia cinetica è trasformata in energia potenziale, e nel processo di pompaggio ottico, l'energia potenziale viene irradiata via, in quanto la frequenza del fotone emesso, attraverso emissione spontanea, è maggiore di quella assorbita.

Tale fenomeno è stato denominato 'effetto Sisifo' da Claude CohenTannoudji e Jean Dalibard, i primi a spiegare in questo modo le basse temperature osservate nelle melasse: come nel mito di Sisifo, l'atomo è costretto a 'scalare' continuamente barriere di potenziale, dalle quali poi cade.

2.2 Raffreddamento evaporativo

Il principio del raffreddamento evaporativo, consiste nel espellere selettivamente atomi aventi energia superiore alla media, seguito da una termalizzazione delle

particelle rimanenti attraverso collisioni elastiche.

Un modo per pensare al raffreddamento evaporativo è quello di considerare il raffreddamento di un contenitore di un liquido caldo. Visto che le molecole più energetiche evaporano dal liquido e lasciano il contenitore, le molecole rimanenti ottengono una temperatura più bassa e sono così raffreddate. Inoltre è sufficiente l'evaporazione di una piccola frazione del liquido per raffreddarlo di una quantità considerevole. [6] [9]

Dunque il raffreddamento evaporativo funziona rimuovendo gli atomi di energia più alta come mostrato in figura. Quelle rimanenti hanno un'energia (temperatura) media molto più bassa e quindi occupano volume piccolo vicino al fondo della trappola aumentando così la densità.

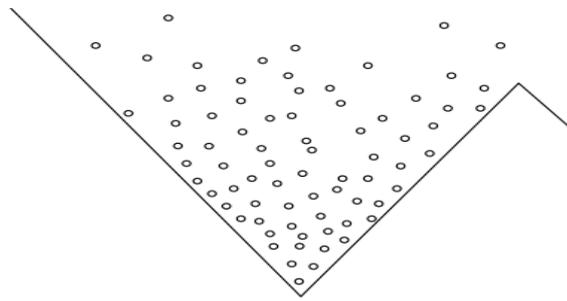


Figure 2.4. Principio della tecnica di evaporazione. Una volta che la profondità della trappola si abbassa, gli atomi con energia sopra la profondità della trappola possono sfuggire e gli atomi rimanenti raggiungono una temperatura più bassa. [9]

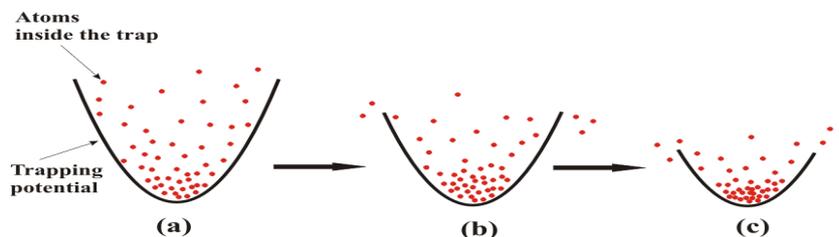


Figure 2.5. Schematica rappresentazione degli atomi confinati in un potenziale armonico.

Per gli atomi intrappolati, questo può essere ottenuto abbassando la profondità della trappola, consentendo così agli atomi di energie superiori alla profondità della trappola di sfuggire. Collisioni elastiche nella trappola portano quindi a una termalizzazione del gas.

Di recente sono state sviluppate tecniche più raffinate. Ad esempio per sostenere il processo di raffreddamento la profondità della trappola può essere abbassata continuamente ottenendo una diminuzione continua della temperatura. Tale processo è chiamato *Evaporazione forzata*.

Chapter 3

Condensazione di Bose-Einstein

Le particelle di un gas si possono immaginare come 'pacchetti', la cui estensione è data dalla lunghezza d'onda di de Broglie $\lambda_{dB} = \frac{h}{mv}$, con m massa della particella la cui velocità v diminuisce con la radice quadrata della temperatura e h costante di Planck. Alla temperatura ambiente, λ_{dB} è molto piccola ed è poco probabile che due particelle vengano a trovarsi a una distanza minore di tale lunghezza; le particelle, quindi, possono essere considerate distinguibili, consentendo la descrizione del sistema attraverso la meccanica statistica classica. Quando invece la temperatura è abbassata al livello in cui la lunghezza d'onda di de Broglie diventa confrontabile con la distanza tra le particelle, i pacchetti d'onda iniziano a sovrapporsi e il principio di indistinguibilità della meccanica quantistica assume un ruolo fondamentale.

Quando la temperatura T di un gas di bosoni scende al di sotto di un valore critico T_c , la maggior parte delle particelle (la totalità, nel limite in cui T raggiunge lo zero assoluto) si accumula nello stato di energia più basso del sistema e il gas subisce quindi una transizione di fase che prende il nome di condensazione di Bose-Einstein. Tale fenomeno non dipende dalle interazioni tra le particelle, ma è conseguenza della natura ondulatoria di queste ultime e del principio di indistinguibilità, concetti alla base della meccanica quantistica. [10]

3.1 Realizzazione dei condensati di Bose-Einstein

Anche se il fenomeno della condensazione di Bose-Einstein per un gas ideale era stato predetto nel 1924, soltanto nel 1995 è stata annunciata la sua osservazione diretta da Cornell insieme ai suoi collaboratori del laboratorio (Joint Institute for Laboratory Astrophysics), con atomi di rubidio (Rb^{87}). Le ragioni di tanta attesa tra predizione e osservazione sperimentale sono da ricercarsi nel fatto che la condizione di degenerazione quantistica richiede di operare ad alte densità e a temperature bassissime. Per effettuare un'analisi quantitativa si può scegliere come parametro la densità nello spazio delle fasi $\rho = n\lambda_{dB}^3$, dove n è il numero di particelle per unità di volume; per ottenere la condensazione di Bose-Einstein, ρ deve essere dell'ordine dell'unità, cosa tutt'altro che facile se si considera che, per un gas rarefatto a temperatura ambiente, ρ è circa venti ordini di grandezza più piccola. Nel caso dell'atomo di rubidio, per raggiungere la condensazione di Bose-Einstein è necessario raffreddare un gas di atomi con densità di circa 10^{13} cm^{-3}

a una temperatura prossima a 150 nK . È evidente che in questo caso non possono essere utilizzati metodi convenzionali di refrigerazione, anche perché bisogna evitare che, al diminuire della temperatura, il gas prima si liquefaccia e poi solidifichi; gli esperimenti sono condotti pertanto in condizioni di alto vuoto, partendo da un gas di atomi rarefatto ($n \sim 10^8 \text{ atomi} \cdot \text{cm}^{-3}$) a temperatura ambiente ($T \sim 300 \text{ K}$), a cui corrisponde una velocità media di centinaia di $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$. Utilizzando fasi successive di raffreddamento, si ottiene un campione con densità $n \sim 10^{14} \text{ atomi} \cdot \text{cm}^{-3}$ e una temperatura $T \sim 10^{-7} \text{ K}$, con velocità media di pochi $\text{mm} \cdot \text{s}^{-1}$. In un primo stadio di raffreddamento si utilizza la radiazione laser per raggiungere temperature dell'ordine del milionesimo di kelvin (μK), quindi il gas atomico può essere intrappolato con appositi campi magnetici e ulteriormente raffreddato, sino a ottenere la condensazione di Bose-Einstein, mediante un processo di evaporazione forzata. [10]

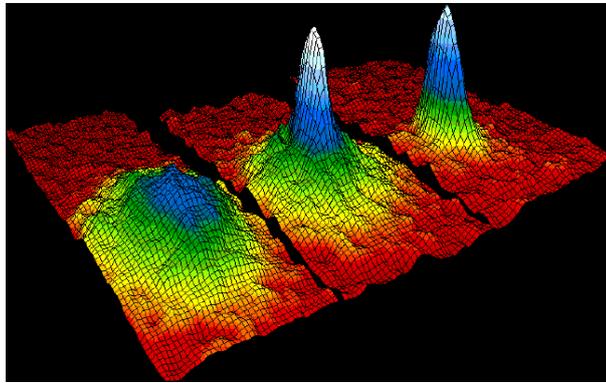


Figure 3.1. A sinistra gas non condensato, al centro condensato in parte, a destra quasi puro condensato. [10]

3.1.1 Conseguenze realizzazione condensati di Bose-Einstein

La realizzazione della condensazione di Bose-Einstein ha subito prodotto una quantità impressionante di ricerche in un campo fortemente interdisciplinare, con ricadute in diverse branche della fisica. Da un lato, un condensato può essere considerato un nuovo fluido quantistico, con la possibilità di studiare effetti di superfluidità, eccitazioni collettive, vortici; dall'altro, essendo formato da un gas di particelle 'coerenti', può essere considerato la versione atomica del laser e pertanto ha condotto a studi di interferometria o di ottica atomica non lineare. Si illustrano di seguito alcuni esperimenti indicativi dei progressi nel campo dell'ottica atomica. [10]

Ottica atomica

- Interferenza:

Nel caso della condensazione di Bose-Einstein nei gas atomici diluiti, la coerenza fu dimostrata per la prima volta nel 1997, al MIT, facendo interferire due condensati in un esperimento che è l'analogo di quello noto in ottica come 'esperienza di Young', effettuata utilizzando un interferometro a doppia fenditura. Al centro di un condensato intrappolato, viene posizionata adia-

baticamente una barriera di potenziale. Questa barriera di potenziale è creata utilizzando un fascio di luce laser, al centro della trappola magnetica dove è intrappolato il condensato, dettonata verso il blu con una frequenza molto lontana da quella di risonanza. In questo modo la forza di dipolo esercitata dal laser è negativa. Quindi il condensato risulta diviso in due parti separate dalla barriera di potenziale. Rimuovendo la trappola di potenziale i condensati vengono fatti espandere liberamente e nella zona di sovrapposizione si osservano delle frange di interferenza.

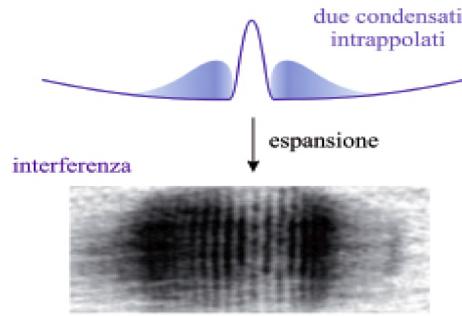


Figure 3.2. Due condensati intrappolati che si espandono producendo interferenza. [10]

L'hamiltoniana di un sistema di particelle identiche di spin 0 di massa m in un potenziale di confinamento esterno, $V_{ext}(r)$, in cui le interazioni atomiche sono modellate nell'approssimazione di campo medio tramite il termine $W\delta(r_i - r_j) = \frac{4\pi\hbar^2\alpha_s}{m}\delta(r_i - r_j)$, dove α_s è la lunghezza di scattering, è [1], [8]

$$H = \sum_i^N \left[\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_{r_i}^2 + V_{ext}(r_i) \right] + \sum_{i < j=1}^N W\delta(r_i - r_j) \quad (3.1)$$

Utilizzando il metodo di Hartee-Fock, per un sistema di bosoni, la funzione d'onda delle N -particelle $\Psi(r_1, r_2, \dots, r_n)$ è approssimata dal prodotto simmetrico di funzioni d'onda di singola particella $\psi_i(r_i)$. A temperatura 0 gli N bosoni si trovano nello stato fondamentale e sono descritti dalla stessa funzione d'onda, $\psi_i(r_i) = \psi(r_i)$, $i = 1, 2, \dots, N$, cosicchè la funzione d'onda delle N -particelle può essere scritta come

$$\Psi(r_1, r_2, \dots, r_N) = \prod_i^N \psi(r_i) = [\psi(r)]^N \quad (3.2)$$

con $\psi(r)$ funzione d'onda di singola particella incognita. Si noti che Ψ è simmetrica per scambio di particelle in quanto tutte le particelle si trovano nello stesso stato $\psi(r)$. Tale funzione è determinata minimizzando il valore di

aspettazione dell'hamiltoniana che risulta valere:

$$\begin{aligned} \langle \psi | H | \psi \rangle = & \int d^3 r_1 \dots d^3 r_N \Psi^*(r_1, \dots, r_N) H \Psi(r_1, \dots, r_N) = \\ & N \int d^3 r \psi^*(r) h \psi(r) + \frac{1}{2} N(N-1) \int d^3 r d^3 r' W |\psi(r)|^2 |\psi(r')|^2 \end{aligned}$$

Utilizzando i moltiplicatori di Lagrange, si trova per la funzione $\psi(r)$ di singola particella, la seguente equazione non lineare di Schrödinger:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_r^2 + V_{ext}(r) + W N |\psi(r)|^2 \right] \psi(r) = \mu \psi(r) \quad (3.3)$$

dove μ è l'energia di singola particella nello stato fondamentale, e indica l'energia richiesta per aggiungere un altro atomo al condensato, W è proporzionale alla lunghezza di scattering a_0 dell'onda s , $W = \frac{a_0 4\pi \hbar^2}{m}$ e il termine $N |\psi|^2 = n(r, t)$ rappresenta la densità del condensato.

Consideriamo i tipi di stati che si possono formare in una doppia buca di potenziale come in figura.

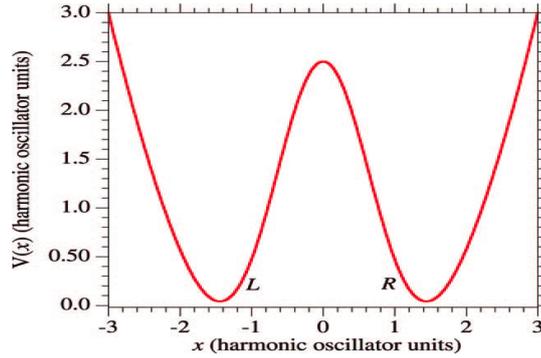


Figure 3.3. Doppia buca di potenziale. [1]

Supponiamo per semplicità che siano possibili solo due autostati ϕ_L e ϕ_R per la singola particella. La forma generale della funzione d'onda delle particelle è data da :

$$\begin{aligned} \Psi(r_1, r_2, \dots, r_n) = & c_0 \phi_L^N + c_1 \phi_L^{N-1} \phi_R + c_2 \phi_L^{N-2} \phi_R^2 + \dots + c_{N/2} \phi_R^{N/2} \phi_L^{N/2} + \dots \\ & + c_{N-1} \phi_L \phi_R^{N-1} + c_N \phi_R^N \end{aligned}$$

Due forme limite per l'equazione di sopra sono lo stato coerente, che si ottiene con $\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_L + \phi_R)$ il quale ha ampiezze determinate dai coefficienti binomiali ($c_n = \binom{N}{n}$ $n=0,1,2,\dots,N$) e lo stato frammentato descritto da $\psi = \phi_R^{N/2} \phi_L^{N/2}$. Nel primo caso gli atomi che formano il condensato hanno una uguale probabilità

di trovarsi a destra o a sinistra della barriera di potenziale, mentre nel secondo caso esattamente $N/2$ atomi si trovano a destra della barriera e $N/2$ si trovano alla sua sinistra.

Consideriamo il secondo caso. Questo è il caso in cui la barriera di potenziale è abbastanza alta da rendere trascurabile l'effetto tunnel.

Nella trattazione di seguito si utilizzerà la teoria dei campi.

Nella teoria dei campi la funzione d'onda che dipende da $3N$ coordinate viene sostituita da un *operatore di campo* $\hat{\psi}$ che dipende solo da 3 coordinate spaziali

$$\Psi(r_1..r_N) \rightarrow \psi(\hat{r}) \quad (3.4)$$

In questo modo si passa ad una rappresentazione che tiene conto della totalità del sistema e non delle singole particelle che lo compongono. Si può dimostrare che questa formulazione è del tutto analoga alla meccanica quantistica. Nel caso dei condensati di Bose-Einstein è possibile, nell'approssimazione di campo medio, ritornare ad una descrizione tipo Schrödinger in termini di una funzione d'onda (non più un campo) che dipende da un solo set di tre coordinate spaziali, e che riveste il ruolo di funzione d'onda macroscopica del condensato.

La funzione d'onda totale del sistema sarà data da :

$$\Psi_0 \sim (a_R^\dagger)^{N_L} (a_L^\dagger)^{N_R} |0\rangle \quad (3.5)$$

dove gli operatori $(a_R^\dagger)^{N_L}$ e $(a_L^\dagger)^{N_R}$ rappresentano gli operatori di creazione, fanno cioè passare da stati con N particelle a stati con $N + 1$ particelle. Il termine di interferenza dato dall'operatore densità $n(r, t)$ svanisce. Infatti la densità al tempo t nella posizione r è data dal valore di aspettazione dell'operatore densità $\hat{n} = \hat{\psi}^\dagger(r, t)\hat{\psi}(r, t)$,

$$n(r, t) = \langle \Psi_0 | \hat{\psi}^\dagger(r, t)\hat{\psi}(r, t) | \Psi_0 \rangle \quad (3.6)$$

Qui l'operatore $\hat{\psi}$ può essere espanso in termini delle autofunzioni ϕ_i :

$$\hat{\psi}(r, t) = \hat{a}_R \phi_R + \hat{a}_L \phi_L \quad (3.7)$$

Sostituendo l'operatore di campo nel valore di aspettazione dell'operatore densità si ottiene

$$\begin{aligned} & \langle \Psi_0 | (\sum_{i=L,R} \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i |\phi(r, t)|^2) + \\ & + \hat{a}_R^\dagger \hat{a}_L \phi_R^\dagger(r, t)\phi_L(r, t) + c.c. | \Psi_0 \rangle \end{aligned}$$

Il termine di interferenza dato dalla parte destra dell'equazione di sopra si annulla. Infatti l'espressione $\langle \Psi_0 | \hat{a}_R^\dagger \hat{a}_L | \Psi_0 \rangle$ si annulla per stati dati come quello in eq (3.5) (stato frammentato). Mentre per uno stato dato dal prodotto di stati coerenti

$$\Psi_0 \sim [\frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{a}_L^\dagger + \hat{a}_R^\dagger)]^N |0\rangle \quad (3.8)$$

il termine di interferenza è presente. Pertanto ci aspettiamo che per lo stato inizialmente frammentato non abbia frange di interferenza, mentre lo stato inizialmente coerente si.

- Laser atomico:

Il laser atomico è un fascio di atomi emessi da un condensato di Bose-Einstein coerente e in movimento. Un laser atomico è in grado di generare un'onda coerente di materia anziché un'onda elettromagnetica: tale onda, composta appunto di atomi, può essere mirata verso una destinazione specifica, o viaggiare grandi distanze senza che i suoi elementi costitutivi si disperdano; inoltre, essendo affine come comportamento a un fascio di luce coerente, ha la proprietà di interferire con altri fasci simili.

Conclusions

I laser cooling hanno reso possibile manipolare atomi neutri in una maniera completamente nuova e di intrappolarli attraverso forze magnetiche e di dipolo. Alcune applicazioni dei laser cooling sono le seguenti

- Misure spettroscopiche ad alta risoluzione eliminando l'allargamento Doppler.
- Studiare il comportamento dei gas ultrafreddi, che possono mostrare fenomeni interessanti come la condensazione di Bose-Einstein, ad esempio.
- Ricerca e applicazioni dell'ottica quantistica nella tecnologia dell'informazione quantistica.

Bibliography

- [1] Y.B.Band (2008). Interference of Bose-Einstein Condensates, in *"American Chemical Society"* Vol.112, n.50, 16097-16100.
- [2] B.H Bransden, C.J.Joachain (1983). *Physics of Atoms and Molecules*, Pearson
- [3] C. N. Cohen- Tannoudji e W.D. Phillips (1990). New Mechanisms for Laser Cooling, in *"Physics Today"* Vol.43, n.10, 33-38
- [4] J.Dalibard e C.Cohen- Tannoudji (1989). Laser cooling below the Doppler limit by polarization gradients: simple theoretical models, in *"Journal of the Optical Society of America B"* Vol.6, n.11, 2023.
- [5] R.Grimm , Weidmüller, Y.B Ovchinnikov (1999). *Advances In Atomic, Molecular, and Optical Physics*, Elsevier.
- [6] C.J.Foot (2004) *Atomic Physics*, Oxford University Press.
- [7] G.R.Fowles (1968). *Introduciton To Modern Optics*, Dover Pubns.
- [8] K.Huang (1997). *Meccanica statistica*, Zanichelli.
- [9] H.J.Metcalf, Peter van der Straten (2003). Laser Cooling and Trapping of Neutral Atoms, in *"Journal of the Optical Society of America B"*, Vol.20, n.5, 8-11, 31-36.
- [10] G.Tedone e A. Alippi (1992). *Enciclopedia delle Scienze Fisiche*, Enciclopedia italiana.