



SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Effetti non lineari nella propagazione di impulsi di luce

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Laurea Triennale in Fisica

Lorenzo Fiordaliso
Matricola 1816400

Relatore
Prof. Tullio Scopigno

Correlatore
Dr. Giovanni Batignani

Anno Accademico 2022/2023

Tesi non ancora discussa

Effetti non lineari nella propagazione di impulsi di luce

Tesi di Laurea Triennale. Sapienza Università di Roma

© 2022 Lorenzo Fiordaliso. Tutti i diritti riservati

Questa tesi è stata composta con L^AT_EX e la classe Sapthesis.

Email dell'autore: fiordaliso.1816400@studenti.uniroma1.it

Indice

1	Richiami di elettromagnetismo ed equazione di Helmholtz	3
1.1	Equazioni di Maxwell	3
1.2	Equazione delle onde nel vuoto ed onde piane	3
1.3	Equazione di Helmholtz	4
1.4	Soluzione per onde quasi monocromatiche	6
1.5	Attenuazione	7
2	Propagazione della luce in mezzi dispersivi	8
2.1	Dispersione lineare, velocità di gruppo	8
2.2	Dispersione del secondo ordine, dispersione della velocità di gruppo .	9
2.3	Soluzione nel caso di impulso gaussiano	10
2.4	Durata e larghezza spettrale	11
2.5	Regimi dispersivi e chirp	11
2.6	Compressione dell'impulso	13
3	Ottica non lineare	15
3.1	Effetto Kerr ottico, auto-modulazione di fase	15
3.2	Solitoni	18
3.3	Solitone fondamentale	20
4	Conclusioni	22

Introduzione

Il campo dell'ottica ultra-veloce, che si occupa di impulsi luminosi con durate brevissime, nel range di femto- e pico- secondi, ha subito un grandissimo sviluppo negli ultimi 30 anni, trovando un'ampia gamma di applicazioni non solo nella ricerca fisica ed in spettroscopia ma anche in biologia, nell'industria delle telecomunicazioni, in elettronica, e per la lavorazione di componentistica microscopica in moltissimi settori. Sono ad esempio in corso di sviluppo connessioni wireless in grado di raggiungere bande molto più larghe di quelle attuali sfruttando frequenze dell'ordine dei TeraHertz. Sono in corso di sviluppo anche tecniche per trasmettere impulsi ultra-corti senza distorsioni attraverso fibre ottiche lunghe diverse migliaia di chilometri. Già oggi impulsi laser nel range dei nano-secondi sono utilizzati per avviare la fusione laser, e vi sono proposte in campo che utilizzerebbero impulsi ultra-corti. In elettronica l'ottica ultra-veloce è centrale negli studi per tentare di creare computer ottici. In bio-ingegneria impulsi dell'ordine dei femtosecondi sono adoperati per ingegnerizzare tessuti con una precisione senza precedenti. Per tutte queste applicazioni di grande interesse è diventato fondamentale avere una comprensione dettagliata della propagazione della luce nei materiali ed in generale dell'ottica non lineare. Una modesta frazione di questi temi è l'oggetto di questa dissertazione. In particolare ci concentreremo non sugli aspetti spaziali della propagazione, ma sulle distorsioni in termini di spettro e durata. La discussione è articolata come segue.

Nel **primo capitolo** partendo dalle equazioni dell'elettromagnetismo di Maxwell sarà ricavata l'equazione delle onde nel vuoto introducendone la soluzione sotto forma di onde piane. Successivamente si considera la presenza di un dielettrico e si ricava l'equazione di Helmholtz nel dominio delle frequenze. Si introduce l'espansione del numero d'onda che sarà ampiamente usata in seguito ed il coefficiente di attenuazione.

Nel **secondo capitolo** l'espansione al primo ordine viene interpretata definendo le velocità di fase e di gruppo. Si tratta anche l'espansione al secondo ordine e viene introdotta la dispersione della velocità di gruppo. Si analizza il fenomeno utilizzando impulsi gaussiani per ottenere soluzioni esplicite. Infine si illustra un modo per ottenere la massima compressione di un impulso in un punto arbitrario dello spazio, grazie ad una fase iniziale.

Nel **terzo capitolo** si abbandona l'ipotesi di risposta lineare del mezzo alla radiazione, e si introduce l'effetto Kerr ottico, ossia una variazione dell'indice di rifrazione del materiale generata dal campo elettromagnetico stesso. Si tratta quindi in maniera sintetica il fenomeno dell'auto-modulazione di fase e viene introdotto il concetto di

solitone. Infine viene ricavata analiticamente l'espressione esplicita per il solitone fondamentale.

Nell'ultimo capitolo vengono presentate le conclusioni del lavoro di tesi, discutendone i principali risultati.

Capitolo 1

Richiami di elettromagnetismo ed equazione di Helmholtz

1.1 Equazioni di Maxwell

Il punto di partenza della nostra trattazione sono le equazioni di Maxwell [1]:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho, \quad (1.1)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (1.2)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (1.3)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J}. \quad (1.4)$$

I campi spostamento elettrico \vec{D} e magnetico \vec{H} servono a tenere conto dell'eventuale presenza di materia e sono definiti come:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}, \quad \vec{H} = \frac{\vec{B} - \mu \vec{M}}{\mu},$$

dove \vec{P} e \vec{M} sono i vettori di polarizzazione e magnetizzazione. Nella nostra trattazione ci limiteremo a materiali in cui gli effetti magnetici sono trascurabili, dunque $\mu = \mu_0$, $\vec{M} = 0$ e $\vec{H} = \vec{B}$.

1.2 Equazione delle onde nel vuoto ed onde piane

Iniziamo per semplicità col ricavare l'equazione delle onde nel vuoto, in assenza di sorgenti ($\rho = 0$, $\vec{J} = 0$) [1]. Applicando l'operatore $\vec{\nabla} \times$ ad entrambi i membri della (1.3) e sostituendo grazie alla nota relazione vettoriale:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{v} = -\nabla^2 \vec{v} + \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}),$$

otteniamo:

$$-\nabla^2 \vec{E} + \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) = -\frac{\partial(\vec{\nabla} \times \vec{B})}{\partial t}.$$

Applicando poi la (1.1) e la (1.4) ci riduciamo a:

$$\nabla^2 \vec{E} = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2},$$

ossia l'equazione delle onde nel vuoto (posto $c_0 = \mu_0 \epsilon_0$):

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (1.5)$$

Per risolverla ci poniamo inizialmente in una situazione di onda piana polarizzata linearmente lungo l'asse x , che viaggia lungo l'asse z . Valgono dunque le seguenti proprietà:

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial y} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial z} = 0, \quad \vec{E} = (E_x, 0, 0).$$

In queste condizioni l'equazione delle onde assume la forma:

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0,$$

che ammette soluzioni del tipo:

$$E_x = E_0 \cos(kz - \omega t + \phi).$$

La relazione tra il campo elettrico \vec{E} ed il campo magnetico \vec{B} si può ricavare combinando le equazioni (1.3) e (1.4):

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 0 & 0 & \partial z \\ E_x & 0 & 0 \end{vmatrix} = \hat{y} \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} \right) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \begin{cases} B_x = B_z = 0 \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} = -\frac{\partial B_y}{\partial t} \end{cases},$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 0 & 0 & \partial z \\ 0 & B_y & 0 \end{vmatrix} = \hat{x} \left(-\frac{\partial B_y}{\partial z} \right) = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}_x}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial B_y}{\partial z} = -\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E_x}{\partial t}.$$

Quindi abbiamo ricavato che nel caso di onda piana, i campi \vec{E} e \vec{B} sono perpendicolari fra loro e con l'asse z . É possibile inoltre mostrare che \vec{E} e \vec{B} sono legati dalla relazione:

$$\frac{|\vec{E}|}{|\vec{B}|} = \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} = c_0.$$

1.3 Equazione di Helmholtz

Consideriamo adesso un'onda piana che si propaga in un dielettrico non magnetico, sempre in assenza di sorgenti. É conveniente studiare il problema nel dominio delle frequenze piuttosto che in quello del tempo. Sfruttando le proprietà della trasformata di Fourier, le equazioni (1.3) e (1.4) per un'onda piana polarizzata lungo la \hat{x} e che

viaggia lungo l'asse z possono essere riscritte come:

$$\begin{cases} \frac{\partial E_x}{\partial z} = -\frac{\partial B_y}{\partial t} \\ \frac{\partial B_y}{\partial z} = -\mu_0 \frac{\partial D_x}{\partial t} \end{cases} \xrightarrow{\mathcal{F}} \begin{cases} \frac{\partial \widetilde{E}_x}{\partial z} = i\omega \widetilde{B}_y \\ \frac{\partial \widetilde{B}_y}{\partial z} = i\omega \mu_0 \widetilde{D}_x \end{cases}$$

dove $\widetilde{f}(\omega)$ indica la trasformata di Fourier (\mathcal{F}) della funzione $f(t)$. Ipotizzando che il materiale abbia una risposta al campo elettrico lineare, locale e non istantanea, la polarizzazione \vec{P} assume la forma:

$$\vec{P} = \int_{-\infty}^t \chi(t-t') E(t') dt' \quad (1.6)$$

dove χ è la suscettività elettrica. Dunque \vec{P} è definito per mezzo di un prodotto di convoluzione, e passare al dominio delle frequenze consente di scrivere in modo semplice la relazione tra \vec{P} ed \vec{E} grazie al teorema di convoluzione:

$$\mathcal{F}[f * g] = \widetilde{f}(\omega) \widetilde{g}(\omega) \longrightarrow \widetilde{P}(\omega) = \epsilon_0 \widetilde{\chi}(\omega) \widetilde{E}(\omega).$$

Lo spostamento elettrico diventa

$$\widetilde{D} = \epsilon_0 \widetilde{E} + \widetilde{P} = \epsilon_0 \widetilde{E} + \epsilon_0 \widetilde{\chi}(\omega) \widetilde{E} = \epsilon_0 \widetilde{E} (1 + \widetilde{\chi}(\omega)) = \epsilon_0 \epsilon_r(\omega) \widetilde{E},$$

Prendiamo la costante dielettrica relativa ϵ_r come una quantità complessa, perché, come vedremo tra poco, questo ci consentirà di descrivere l'eventuale attenuazione dell'onda. Sostituendo \widetilde{D} nelle (1.3) e (1.4):

$$\begin{cases} \frac{\partial \widetilde{E}_x}{\partial z} = i\omega \widetilde{B}_y \\ \frac{\partial \widetilde{B}_y}{\partial z} = i\omega \mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r(\omega) \widetilde{E} \end{cases}.$$

Derivando la prima equazione rispetto a z e sostituendo la seconda al membro di destra otteniamo infine l'equazione di Helmholtz (2.7):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \widetilde{E}_x}{\partial z^2} &= i\omega \frac{\partial B_y}{\partial z} = -\omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r(\omega) \widetilde{E} \\ \frac{\partial^2 \widetilde{E}_x}{\partial z^2} + k^2(\omega) \widetilde{E} &= 0 \end{aligned} \quad (1.7)$$

Mostriamo che $k(\omega)$ è un numero d'onda, ricordando che l'indice di rifrazione vale $n = \sqrt{\epsilon_r}$ e la velocità della luce in un mezzo vale $c = c_0/n$:

$$k(\omega) = \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \sqrt{\epsilon_r} = \frac{\omega n}{c_0} = \frac{2\pi}{Tc} = \frac{2\pi T}{T\lambda} = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (1.8)$$

1.4 Soluzione per onde quasi monocromatiche

Abbandoniamo ora il caso di onde monocromatiche e occupiamoci di una situazione più realistica, ossia un impulso sempre polarizzato lungo l'asse \hat{x} e quasi monocromatico, cioè con spettro molto piccato intorno a una frequenza portante ω_0 , quale potrebbe essere la luce prodotta da un laser. Scriviamo quest'onda in termini di un inilivulo complesso e di una parte oscillante:

$$E(z, t) = F(z, t)e^{-i\omega_0 t}. \quad (1.9)$$

Effettuando la trasformata di Fourier della (1.9) è possibile mostrare che questa espressione conduce ad uno spettro centrato in ω_0 :

$$\tilde{E}(z, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} F(z, t) e^{-i\omega_0 t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} F(z, t) e^{i(\omega - \omega_0)t} dt = \tilde{F}(z, \omega - \omega_0)$$

Riprendendo l'equazione di Helmholtz (1.7), notiamo che è possibile fattorizzarla in modo da ottenere due equazioni separate per onde progressive e regressive:

$$\frac{\partial^2 \tilde{E}_x}{\partial z^2} + k^2(\omega) \tilde{E}_x = \left(\frac{\partial \tilde{E}_x}{\partial z} + ik \tilde{E}_x \right) \left(\frac{\partial \tilde{E}_x}{\partial z} - ik \tilde{E}_x \right) = 0. \quad (1.10)$$

Pertanto ci concentriamo sulla parte progressiva e vi inseriamo una soluzione di prova oscillante intorno a $k(\omega_0)$:

$$\tilde{E}_x = \tilde{F} = \tilde{A}(z, \omega - \omega_0) e^{ik(\omega_0)z}.$$

Sostituendo otteniamo:

$$ik(\omega_0) e^{ik(\omega_0)z} \tilde{A} + e^{ik(\omega_0)z} \frac{\partial \tilde{A}}{\partial z} = ik(\omega) \tilde{A} e^{ik(\omega_0)z}$$

Gli esponenziali si semplificano e ci riduciamo a:

$$\frac{\partial \tilde{A}}{\partial z} = i[k(\omega) - k(\omega_0)] \tilde{A}. \quad (1.11)$$

Grazie all'ipotesi di onda quasi monocromatica, sviluppiamo $\beta(\omega)$ intorno a ω_0 :

$$\beta(\omega) \simeq \beta(\omega_0) + \left. \frac{d\beta}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_0} (\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2\beta}{d\omega^2} \right|_{\omega=\omega_0} (\omega - \omega_0)^2 + \frac{1}{6} \left. \frac{d^3\beta}{d\omega^3} \right|_{\omega=\omega_0} (\omega - \omega_0)^3 + O((\omega - \omega_0)^4)$$

↓

$$\beta(\omega) \simeq \beta(\omega_0) + \beta_1(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2}\beta_2(\omega - \omega_0)^2 + \frac{1}{6}\beta_3(\omega - \omega_0)^3 + O((\omega - \omega_0)^4).$$

Poiché $k(\omega)$ é in generale una quantità complessa, aggiungiamo anche un termine immaginario puro indicato con $\alpha/2$ che vedremo essere responsabile dell'attenuazione dell'onda. Sostituendo questo sviluppo nell'equazione precedente (1.11) otteniamo:

$$\frac{\partial \tilde{A}}{\partial z} \simeq i[\beta_1(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2}\beta_2(\omega - \omega_0)^2 + \frac{1}{6}\beta_3(\omega - \omega_0)^3 + i\frac{\alpha}{2}] \tilde{A}, \quad (1.12)$$

o equivalentemente, nel dominio del tempo:

$$\frac{\partial A}{\partial z} \simeq \beta_1 \frac{\partial A}{\partial t} - \frac{i}{2} \beta_2 \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - \frac{1}{6} \beta_3 \frac{\partial^3 A}{\partial t^3} - \frac{\alpha}{2} A. \quad (1.13)$$

1.5 Attenuazione

Il termine $\alpha/2$ rappresenta il coefficiente di attenuazione dell'onda che viaggia nella materia. Per mostrarlo, supponiamo per l'intensità del campo I_0 ($\propto E^2$) un decadimento esponenziale regolato da α . Riscriviamo l'involuppo $A(z,t)$ in modo da evidenziare I_0 :

$$A(z, t) = \sqrt{I_0} a(z, t) e^{-\alpha z/2}.$$

Inserendo questa nuova soluzione di prova nella (1.13) otteniamo:

$$\begin{aligned} \sqrt{I_0} \frac{\partial a}{\partial z} e^{-\alpha z/2} - \frac{\alpha}{2} \sqrt{I_0} a(z, t) e^{-\alpha z/2} &= [\beta_1 \frac{\partial a}{\partial t} - \frac{i}{2} \beta_2 \frac{\partial^2 a}{\partial t^2} - \frac{1}{6} \beta_3 \frac{\partial^3 a}{\partial t^3} - \frac{\alpha}{2} a(z, t)] \sqrt{I_0} e^{-\alpha z/2} \\ \Downarrow \\ \frac{\partial a}{\partial z} &= \beta_1 \frac{\partial a}{\partial t} - \frac{i}{2} \beta_2 \frac{\partial^2 a}{\partial t^2} - \frac{1}{6} \beta_3 \frac{\partial^3 a}{\partial t^3}; \end{aligned}$$

questa è l'equazione di Helmholtz per un mezzo senza assorbimento, dunque la nostra ipotesi sull'andamento di I_0 è consistente con la teoria finora sviluppata e possiamo giustificare l'interpretazione di $\alpha/2$ (o equivalentemente α) come coefficiente di attenuazione.

Capitolo 2

Propagazione della luce in mezzi dispersivi

2.1 Dispersione lineare, velocità di gruppo

Per capire il ruolo del coefficiente β_1 nella propagazione dell'onda, imponiamo per il momento che $\beta_2 = \beta_3 = 0$, e consideriamo l'involuppo senza attenuazione $a(z, t)$ (trascuriamo quindi $\alpha/2 = \text{Im}[k(\omega)]$). L'equazione (1.11) per $a(z, t)$, scritta nel dominio delle frequenze, diventa:

$$\frac{\partial \tilde{a}}{\partial z} = i\omega\beta_1 \tilde{a}. \quad (2.1)$$

Supponiamo di conoscere la forma dell'involuppo e lo spettro di frequenze alla partenza:

$$a(z = 0, t) \equiv a_0(t) \rightarrow \tilde{a}(z = 0, \omega) \equiv \tilde{a}_0(\omega) \quad (2.2)$$

L'equazione differenziale con queste condizioni iniziali ha soluzione:

$$\tilde{a}(z, \omega) = \tilde{a}_0(\omega) e^{i\omega\beta_1 z}. \quad (2.3)$$

Per trovare quindi la forma dell'involuppo durante la propagazione effettuiamo l'antitrasformata:

$$\begin{aligned} a(z, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{a}(z, \omega) e^{-i\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{a}_0(\omega) e^{i\beta_1 \omega z} e^{-i\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{a}_0(\omega) e^{-i\omega(t - \beta_1 z)} d\omega \\ &= a_0(t - \beta_1 z). \end{aligned}$$

Per rendere più chiara la relazione appena trovata, la riscriviamo con il cambio di variabile $t \rightarrow t' \equiv t - \beta_1 z$:

$$a(z, t' + \beta_1 z) = a(z = 0, t');$$

dunque, per effetto di β_1 , l'involuppo trasla senza variare il proprio profilo temporale lungo l'asse di propagazione, e possiamo interpretare β_1 come l'inverso della sua velocità (senza attenuazione $n(\omega)$ è reale):

$$\beta_1(\omega_0) \equiv \left. \frac{d\beta}{d\omega} \right|_{\omega_0} = \left. \frac{d\left(\frac{\omega}{c_0} n(\omega)\right)}{d\omega} \right|_{\omega_0} = \frac{n(\omega)}{c_0} + \frac{\omega}{c_0} \left. \frac{dn(\omega)}{d\omega} \right|_{\omega_0} \equiv \frac{1}{v_g(\omega_0)} \quad (2.4)$$

dove con $v_g(\omega_0)$ abbiamo indicato la velocità di gruppo, ossia la velocità con cui si muove l'involuppo nel mezzo, che chiaramente sarà una funzione della frequenza portante ω_0 . È opportuno osservare che la velocità di gruppo è uguale alla velocità di fase $c = c_0/n$ solamente quando l'indice di rifrazione n non dipende da ω .

2.2 Dispersione del secondo ordine, dispersione della velocità di gruppo

Essendo la velocità di fase in generale dipendente dalla frequenza, le componenti cromatiche diverse all'interno di un involuppo si muovono con velocità diverse. Pertanto ci aspettiamo che l'involuppo si deformi durante la propagazione. È possibile descrivere questo fenomeno in termini del coefficiente β_2 ; poniamoci quindi nella situazione $\beta_1, \beta_2 \neq 0, \beta_3 = 0$. Consideriamo di nuovo l'involuppo normalizzato all'attenuazione $a(z, t)$ e supponiamo di conoscerne la forma $a_0(t)$ e lo spettro $\tilde{a}_0(\omega)$ alla partenza. L'equazione che studiamo è quindi:

$$\frac{\partial a}{\partial z} = \beta_1 \frac{\partial a}{\partial t} - \frac{i}{2} \beta_2 \frac{\partial^2 a}{\partial t^2}. \quad (2.5)$$

È conveniente lavorare nel sistema di riferimento solidale con l'involuppo, che si muove con velocità $v_g(\omega_0) = \beta_1^{-1}$. Le nuove variabili sono:

$$z \rightarrow z \quad t \rightarrow t' = t - \beta_1 z. \quad (2.6)$$

Sostituendo nell'equazione differenziale, essa diventa:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial t'}{\partial z} \frac{\partial}{\partial t'} = -\beta_1 \frac{\partial}{\partial t'} \\ \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial t'}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t'} = \frac{\partial}{\partial t'} \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial a}{\partial z} - \beta_1 \frac{\partial a}{\partial t'} + \beta_1 \frac{\partial a}{\partial t'} + \frac{i}{2} \beta_2 \frac{\partial^2 a}{\partial t'^2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial a}{\partial z} + \frac{i}{2} \beta_2 \frac{\partial^2 a}{\partial t'^2} = 0.$$

Come nella sezione precedente, è conveniente passare al dominio delle frequenze per poter riscrivere le derivate temporali. Chiamando ω' le frequenze associate a t' , abbiamo:

$$\frac{\partial a}{\partial z} + \frac{i}{2} \beta_2 \frac{\partial^2 a}{\partial t'^2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \tilde{a}(z, \omega')}{\partial z} = \frac{i\omega'^2}{2} \beta_2 \tilde{a}(z, \omega'), \quad (2.7)$$

con soluzione:

$$\tilde{a}(z, \omega') = \tilde{a}_0(\omega') e^{i\omega'^2 \beta_2 z / 2}. \quad (2.8)$$

A questo punto basta effettuare l'antitrasformata per ricavare $a(z, t')$:

$$a(z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega' t' + i\omega'^2 \beta_2 z / 2} \tilde{a}_0(\omega') d\omega'. \quad (2.9)$$

2.3 Soluzione nel caso di impulso gaussiano

Per risolvere esplicitamente l'antitrasformata, supponiamo che l'onda possieda inizialmente un profilo gaussiano:

$$a(0, t') = a_0(t') = e^{-\frac{t'^2}{2t_0^2}}; \quad (2.10)$$

ne calcoliamo la trasformata di Fourier con il metodo del completamento del quadrato:

$$\begin{aligned} \widetilde{a}_0(\omega') &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega't'} e^{-\frac{t'^2}{2t_0^2}} dt' = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2t_0^2}(t'^2 - 2i\omega't_0^2 t' - \omega^2 t_0^4)} e^{-\frac{\omega^2 t_0^2}{2}} dt' = \\ &= e^{-\frac{\omega^2 t_0^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(t' - i\omega' t_0^2)}{2t_0^2}} dt' = \sqrt{2\pi t_0^2} e^{-\frac{t_0^2 \omega'^2}{2}}. \end{aligned}$$

Dunque la trasformata è ancora una funzione gaussiana con varianza invertita. Inseriamo questo risultato nella (2.9) che risolviamo sempre con il completamento del quadrato:

$$\begin{aligned} a(z, t') &= \frac{t_0 \sqrt{2\pi}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega't'} e^{-\frac{\omega'^2 t_0^2}{2}} e^{i\beta_2 \omega'^2 z} d\omega' = \frac{t_0}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}[\omega'^2(t_0^2 - i\beta_2 z) + 2i\omega't']} d\omega' = \\ &= \frac{t_0}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}[\omega'^2(t_0^2 - i\beta_2 z) + 2i\omega't' - \frac{t'^2}{(t_0^2 - i\beta_2 z)}]} e^{-\frac{t'^2}{2(t_0^2 - i\beta_2 z)}} d\omega' = \\ &= \frac{t_0}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t'^2}{2(t_0^2 - i\beta_2 z)}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{(t_0^2 - i\beta_2 z)}{2}[\omega' + it'/(t_0^2 - i\beta_2 z)]^2} d\omega' = \\ &= \frac{t_0}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t'^2}{2(t_0^2 - i\beta_2 z)}} \sqrt{\frac{2\pi}{(t_0^2 - i\beta_2 z)}} = \sqrt{\frac{t_0^2}{(t_0^2 - i\beta_2 z)}} e^{-\frac{t'^2}{2(t_0^2 - i\beta_2 z)}}. \end{aligned}$$

Notiamo che l'involuppo rimane gaussiano, ma cambia in ampiezza e larghezza mentre si propaga lungo l'asse z secondo un fattore $t_0^2 - i\beta_2 z \equiv t_z^2$. Questa nuova larghezza $t(z)$ e di conseguenza l'esponentiale $e^{-\frac{t'^2}{2t(z)^2}}$ sono quantità complesse, per cui separiamo l'esponente in parte reale ed immaginaria, in modo da poter scrivere l'esponentiale in termini di modulo e fase:

$$\begin{aligned} -\frac{t'^2}{2t(z)^2} &= -\frac{t'^2}{2t(z)^2} \frac{t(z)^{2*}}{t(z)^{2*}} = -\frac{t'^2 \operatorname{Re}[t(z)^2] - it'^2 \operatorname{Im}[t(z)^2]}{2|t(z)^2|^2} = -\frac{t'^2 \operatorname{Re}[t(z)^2]}{2|t(z)^2|^2} + \frac{it'^2 \operatorname{Im}[t(z)^2]}{2|t(z)^2|^2} = \\ &= -\frac{t'^2}{2t_0^2(1 + \frac{\beta_2^2 z^2}{t_0^4})} + \frac{it'^2 \beta_2 z}{2t_0^4(1 + \frac{\beta_2^2 z^2}{t_0^4})} = \\ &= -\frac{t'^2}{2t_R(z)^2} + i\phi \longrightarrow e^{\frac{t'^2}{2t_R(z)^2}} e^{i\phi}, \end{aligned}$$

dove abbiamo definito la fase ϕ e la larghezza reale dell'impulso $t_R(z)$ come:

$$\phi = \frac{t'^2 \beta_2 z}{2t_0^4(1 + \frac{\beta_2^2 z^2}{t_0^4})}; \quad t_R(z) = t_0 \sqrt{1 + \frac{\beta_2^2 z^2}{t_0^4}}. \quad (2.11)$$

Facendo uso di questi due parametri vediamo quindi nel dettaglio come cambia l'impulso durante la propagazione.

2.4 Durata e larghezza spettrale

Alla partenza, la durata del nostro impulso gaussiano a_0 (2.10) è $\sigma_t = t_0$, mentre dalla trasformata \widetilde{a}_0 osserviamo che la larghezza nelle frequenze vale $\sigma_\omega = 1/t_0$. Vale quindi $\sigma_t\sigma_\omega = 1$ e l'impulso si dice "transform-limited": la durata dell'impulso è la minima possibile data una certa larghezza spettrale. Definiamo il parametro "lunghezza di dispersione" L_D come la distanza dopo la quale la durata dell'impulso è aumentata di $\sqrt{2}$:

$$L_D = \frac{t_0^2}{|\beta_2|} \longrightarrow t_R(z) = t_0\sqrt{1 + \left(\frac{z}{L_D}\right)^2}, \quad t_R(L_D) = t_0\sqrt{2}. \quad (2.12)$$

Notiamo che il profilo in frequenza non cambia durante la propagazione, infatti l'intensità dell'onda in funzione della frequenza è proporzionale al modulo quadro della trasformata dell'involuppo del campo elettrico $\widetilde{a}(z, \omega)$; ma secondo la (2.7) con soluzione (2.8), $\widetilde{a}(z, \omega)$ differisce da $\widetilde{a}_0(\omega)$ solo per una fase, che sparisce sotto modulo, lasciando lo spettro inalterato:

$$I(z, \omega) \propto |\widetilde{a}(z, \omega)|^2 = |\widetilde{a}_0(\omega)e^{i\omega'^2\beta_2 z/2}|^2 = |\widetilde{a}_0(\omega)|^2 \longrightarrow \Delta\omega|_z = \Delta\omega|_0.$$

Dunque durante la propagazione la durata dell'impulso aumenta e lo spettro resta inalterato, perciò si rompe la condizione $\sigma_t\sigma_\omega = 1$ e l'impulso non sarà più transform-limited. Il fenomeno dell'aumento della durata dell'impulso prende il nome di "Dispersione della velocità di gruppo" (Group Velocity Dispersion o -GVD- in inglese), ed è regolato dal parametro L_D . Più L_D è grande, minore sarà l'effetto della GVD e più grande sarà la distanza che l'impulso dovrà percorrere prima di subire un allargamento significativo.

2.5 Regimi dispersivi e chirp

Vediamo dall'espressione di ϕ che la fase dipende dal segno di β_2 . Distinguiamo quindi due regimi di dispersione a seconda del segno di $\beta_2 = \frac{\partial\beta_1}{\partial\omega} = \frac{\partial}{\partial\omega}(1/v_g)$:

DISPERSIONE NORMALE: $\beta_2 > 0 \longrightarrow \omega \nearrow v_g \searrow$: la velocità di gruppo è una funzione decrescente di ω , quindi le componenti a frequenze più basse viaggiano più velocemente;

DISPERSIONE ANOMALA: $\beta_2 < 0 \longrightarrow \omega \nearrow v_g \nearrow$: la velocità di gruppo è una funzione crescente di ω , quindi le componenti a frequenze più alte viaggiano più velocemente;

È utile introdurre i concetti di frequenza istantanea e modulazione in frequenza, o "chirp". La frequenza (angolare) istantanea è definita come:

$$\omega_{ist} = \omega_0 - \frac{\partial\phi}{\partial t}. \quad (2.13)$$

Un segnale in cui la frequenza istantanea varia col tempo si dice "chirp" o "chirpato".

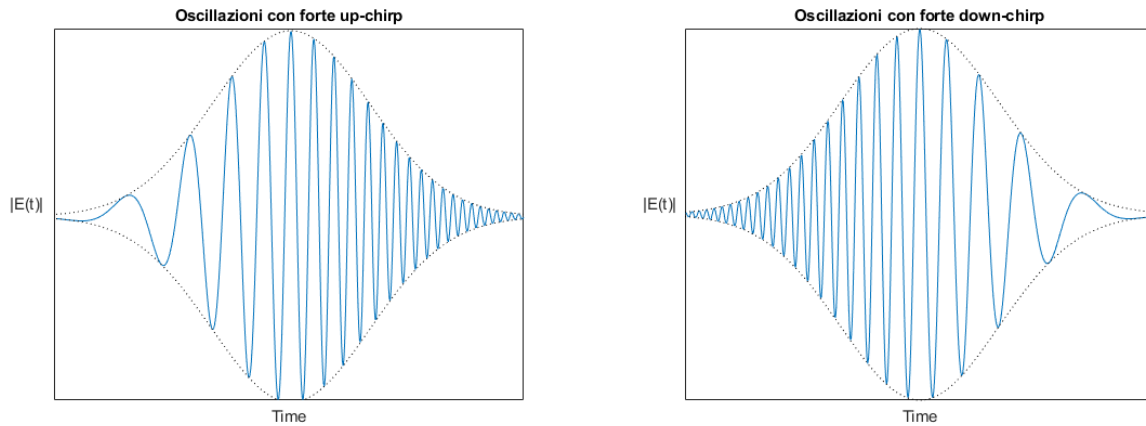


Figura 2.1. Esempi di oscillazioni con forte up-chirp e down-chirp. La frequenza di oscillazione cambia spostandosi nell'involuppo.

Nel caso considerato di impulso gaussiano, notiamo che in partenza manca una fase dipendente dal tempo e la frequenza istantanea è uguale a quella portante ω_0 lungo tutto l'impulso. In termini grafici la distanza tra due massimi resta costante in tutte le zone dell'involuppo. Durante la propagazione tuttavia, il mezzo impone una modulazione in frequenza attraverso la fase $\phi(t')$ (2.11):

$$\frac{\partial \phi}{\partial t'} = \frac{t' \beta_2 z}{t_0^4 (1 + \frac{\beta_2^2 z^2}{t_0^4})}; \quad (2.14)$$

a seconda che il regime sia di dispersione normale o anomala, il segnale diventa rispettivamente "up-chirped" o "down-chirped". Si ha inoltre che il chirp dovuto al mezzo è lineare. Guardando l'involuppo, in presenza di dispersione normale, le frequenze più basse viaggiano più in fretta e si accumulano nella parte dell'involuppo che arriva prima ("leading edge"), mentre le frequenze più alte si accumulano sulla "trailing edge". Viceversa per la dispersione anomala.

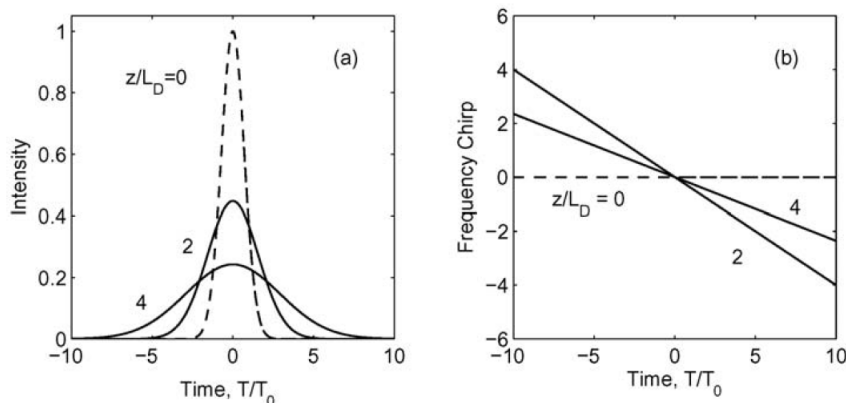


Figura 2.2. Cambiamenti nell'involuppo temporale (a) e chirp (b) indotti dalla GVD in un involuppo normalizzato gaussiano e inizialmente non chirpato. Grafico tratto da [4].

2.6 Compressione dell'impulso

È possibile sfruttare la fase indotta dal mezzo per ottenere la massima compressione di un impulso in un punto arbitrario dell'asse z . Supponiamo infatti di partire da un impulso gaussiano già chirpato in $z = 0$:

$$a(0, t') = |a(0, t')| e^{i\phi} = e^{-\frac{t'^2}{2t_0^2}(1+iC)} \rightarrow \frac{\partial\phi}{\partial t'} = \frac{\partial}{\partial t'} \left(-C \frac{t'^2}{2t_0^2} \right) = t' C / t_0^2, \quad (2.15)$$

dove C è una costante reale. La trasformata di Fourier sarà per $z=0$:

$$\begin{aligned} \widetilde{a}_0(\omega') &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega' t'} e^{-\frac{t'^2}{2t_0^2}(1+iC)} dt' = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2t_0} [t'(1+iC) - 2i\omega' t' t_0^2 - \frac{t_0^4 \omega'^2}{1+iC}] - \frac{t_0^2 \omega'^2}{2(1+iC)}} dt' = \\ &= \sqrt{\frac{2\pi t_0^2}{1+iC}} e^{-\frac{t_0^2 \omega'^2}{2(1+iC)}}. \end{aligned}$$

Inserendola nella soluzione (2.8) otteniamo $\widetilde{a}(z, \omega')$, per cui rimane solo da calcolare l'antitrasformata:

$$\begin{aligned} a(z, t') &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega' t'} \widetilde{a}_0 e^{i\omega'^2 \beta_2 z / 2} d\omega' = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2\pi t_0^2}{1+iC}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega' t'} e^{i\omega'^2 \beta_2 z / 2} e^{-\frac{t_0^2 \omega'^2}{2(1+iC)}} d\omega' = \\ &= \sqrt{\frac{t_0^2}{2\pi(1+iC)}} e^{-\frac{(t'+\beta_2 z/2)(1+iC)}{2t_0^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{[\omega' t_0 - i(1+iC)(t'+\beta_2 z/2)/t_0]^2}{2(1+iC)}} d\omega' = \\ &= \sqrt{\frac{t_0^2}{2\pi(1+iC)}} e^{-\frac{(t'+\beta_2 z/2)(1+iC)}{2t_0^2}} \sqrt{\frac{2\pi(1+iC)}{t_0^2}} = \\ &= e^{-\frac{(t'+\beta_2 z/2)(1+iC)}{2t_0^2}}. \end{aligned}$$

Sebbene l'impulso non sia transform-limited in partenza, perchè

$$\Delta t' = \frac{1}{t_0}, \quad \Delta \omega' = \frac{\sqrt{1+C^2}}{t_0}, \implies \Delta t' \Delta \omega' = \sqrt{1+C^2} \neq 1$$

esso può diventare transform-limited per un certo valore di z . Si ha infatti che la larghezza dell'impulso durante la propagazione vale:

$$t_R(z) = \frac{t_0}{\sqrt{1+C^2}} \sqrt{1 + \underbrace{\left(C + \frac{\beta_2 z (1+C^2)}{t_0} \right)^2}_{f(z)}}. \quad (2.16)$$

Cerchiamo il minimo di questa funzione annullando la derivata in z :

$$\begin{aligned} \frac{dt_R(z)}{dz} &= \frac{d}{dz} \frac{t_0}{\sqrt{1+C^2}} (1+f(z)^2)^{1/2} = \frac{t_0}{\sqrt{1+C^2}} \left(\frac{d(1+f(z)^2)^{-1/2}}{df(z)^2} \right) \left(\frac{df(z)^2}{df(z)} \right) \left(\frac{df(z)}{dz} \right) = \\ &\propto \frac{2f(z)}{2\sqrt{1+f(z)^2}} \underbrace{\frac{df(z)}{dz}}_{\text{const.}} \propto f(z) = 0; \\ &\Rightarrow C + \frac{\beta_2 z_{\min}(1+C^2)}{t_0} = 0 \Rightarrow z_{\min} = -\frac{C t_0}{\beta_2(1+C^2)}. \end{aligned}$$

Troviamo dunque che se $C > 0$, l'impulso si allarga continuamente e non vi è z_{min} (ricordiamo che $z \geq 0$), ma se $C < 0$, esiste un z_{min} per cui la durata diminuisce fino a z_{min} e poi aumenta. In z_{min} la larghezza sarà:

$$t_R(z_{min}) = \Delta t' = \frac{t_0}{\sqrt{1+C^2}}, \quad (2.17)$$

per cui vale $\Delta t' \Delta \omega' = 1$ e l'impulso è transform-limited, quindi ha la minima durata possibile data una certa larghezza spettrale.

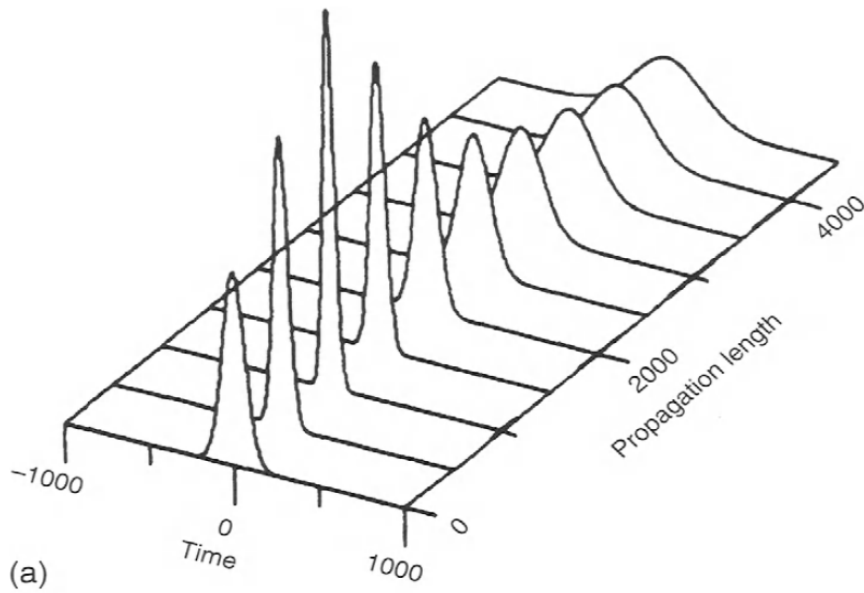


Figura 2.3. Compressione di un impulso gaussiano con chirp iniziale. La compressione è di impulsi è utile in molte applicazioni in quanto consente di concentrare potenza luminosa in un punto; il picco del campo alla massima compressione è infatti più intenso che alla partenza. Grafico tratto da [3].

Capitolo 3

Ottica non lineare

Finora abbiamo trattato l'equazione di Helmholtz (1.7), che è stata ottenuta assumendo che il mezzo di propagazione avesse una risposta lineare al campo elettrico (1.6). Nel caso si lavori con radiazione di alta intensità, quale può essere, ad esempio, quella prodotta da un laser, si perde la proporzionalità della polarizzazione \vec{P} al campo, e diventano rilevanti effetti non lineari. Espandiamo dunque \vec{P} in termini del campo \vec{E} :

$$\tilde{P}(\omega) = \epsilon_0(P_0 + \tilde{\chi}^{(1)}\tilde{E}(\omega) + \tilde{\chi}^{(2)}\tilde{E}^2(\omega) + \tilde{\chi}^{(3)}\tilde{E}^3(\omega) + \dots); \quad (3.1)$$

Il termine P_0 di polarizzazione intrinseca è presente solo per materiali ferromagnetici, e dunque lo trascuriamo. Sebbene la fenomenologia legata al termine quadratico sia interessante ed utile (generazione di seconda armonica, rettificazione ottica solo per citare degli esempi) in questa dissertazione ci concentriamo sugli effetti del terzo ordine. In realtà si può dimostrare che per materiali centro-simmetrici, che possiedono cioè un centro di inversione, la suscettibilità elettrica del secondo ordine $\chi^{(2)}$ si annulla. Supponiamo infatti di fermare l'espansione di \vec{P} al secondo ordine, e di invertire il verso di \vec{E} . Poiché il materiale gode di simmetria di inversione, anche \vec{P} deve cambiare di segno:

$$\tilde{P}(\omega) = \epsilon_0(\tilde{\chi}^{(1)}\tilde{E}(\omega) + \tilde{\chi}^{(2)}\tilde{E}^2(\omega)) \xrightarrow{\vec{E} \rightarrow -\vec{E}} -\tilde{P}(\omega) = \epsilon_0(-\tilde{\chi}^{(1)}\tilde{E}(\omega) + \tilde{\chi}^{(2)}\tilde{E}^2(\omega)).$$

Sommando le due equazioni si ottiene:

$$0 = 2\epsilon_0\tilde{\chi}^{(2)}\tilde{E}^2(\omega) \Rightarrow \tilde{\chi}^{(2)} = 0.$$

Poiché 11 delle 32 classi cristalline godono di questa proprietà, oltre a tutti i sistemi sciolti in soluzione o in forma liquida, possiamo disinteressarci dell'ottica al secondo ordine in una vasta gamma di materiali.

3.1 Effetto Kerr ottico, auto-modulazione di fase

L'effetto Kerr ottico è un cambiamento dell'indice di rifrazione n del mezzo dovuta all'intensità della radiazione che lo attraversa. Per materiali centro-simmetrici si ha

che:

$$\begin{aligned}\tilde{P}(\omega) &= \epsilon_0(\tilde{\chi}^{(1)}\tilde{E}(\omega) + \tilde{\chi}^{(3)}\tilde{E}^3(\omega)) = \epsilon_0(\tilde{\chi}^{(1)}\tilde{E}(\omega) + \tilde{\chi}^{(3)}|\tilde{E}|^2\tilde{E}) = \epsilon_0(\tilde{\chi}^{(1)} + \tilde{\chi}^{(3)}|\tilde{E}|^2)\tilde{E}(\omega) = \\ &= \epsilon_0\tilde{\chi}_{eff}\tilde{E}(\omega).\end{aligned}$$

Dunque passiamo da $\chi^{(1)}$, che é legato all'indice di rifrazione imperturbato n_0 da $\chi^{(1)} + 1 = n_0^2$, ad una suscettibilità efficace χ_{eff} , dipendente da $|E^2|$. Traduciamo questo cambiamento aggiungendo un termine correttivo dipendente anche esso da $|E^2|$:

$$n = n_0 + n_2|E^2|; \quad (3.2)$$

scrivere la relazione esplicita che in generale lega il coefficiente n_2 a χ_3 richiederebbe una trattazione completa dei tensori di suscettibilità. Per semplicità ci limitiamo a dire che valori tipici di n_2 sono dell'ordine di $10^{-22}m^2/W$. Con questa nuova espressione di n e quindi ϵ_r é sempre possibile ricavare l'equazione di Helmholtz (1.7), ma oltre al termine dispersivo $k(\omega) = \frac{\omega n}{c_0}$ sarà presente anche un nuovo termine $\frac{\omega n_2|\tilde{E}|^2}{c_0} = \gamma|\tilde{E}|^2$. Possiamo procedere come nella sezione [1.4] considerando un'onda quasi monocromatica scritta in termini di inviluppo $A(z, t)$ e oscillazione intorno ad una frequenza portante ω_0 , e espandendo il numero d'onda $k(\omega)$ intorno a ω_0 . Supponiamo poi di poter trascurare la dispersione della velocità di gruppo, in un senso che chiariremo tra un attimo, e di poter quindi porre $\beta_2 \simeq 0$. Infine effettuiamo un cambio di variabili per passare al sistema di riferimento solidale con l'inviluppo, ottenendo finalmente l'equazione:

$$\frac{\partial A}{\partial z} - i\gamma|A|^2A + \frac{\alpha}{2}A = 0. \quad (3.3)$$

Esplicitiamo l'inviluppo normalizzato all'attenuazione $a(z, t')$:

$$A(z, t') = \sqrt{I_0}a(z, t')e^{-\alpha z/2} = \sqrt{I_0}|a(z, t')|e^{i\phi}e^{-\alpha z/2},$$

e sostituiamolo nell'equazione (3.3):

$$\begin{aligned}0 &= \sqrt{I_0}\left(\frac{\partial|a|}{\partial z}e^{i\phi}e^{-\alpha z/2} + i|a|\frac{\partial\phi}{\partial z}e^{i\phi}e^{-\alpha z/2} - \frac{\alpha}{2}z|a|e^{i\phi}e^{-\alpha z/2}\right) + \\ &\quad - i\gamma I_0|a|^2e^{-\alpha z}\sqrt{I_0}|a|e^{i\phi}e^{-\alpha z/2} + \\ &\quad + \frac{\alpha}{2}\sqrt{I_0}|a|e^{i\phi}e^{-\alpha z/2},\end{aligned}$$

che semplificando diventa:

$$\frac{\partial|a|}{\partial z} + i|a|\frac{\partial\phi}{\partial z} - i\gamma I_0|a|^2|a|e^{-\alpha z} = 0. \quad (3.4)$$

Possiamo risolvere separatamente la parte reale ed immaginaria dell'equazione:

$$\begin{cases} \frac{\partial|a|}{\partial z} = 0 \implies |a(z, t')| = |a(0, t')| \equiv |a_0(t')| \\ \frac{\partial\phi}{\partial z} = I_0\gamma|a(z, t')|^2e^{-\alpha z} \end{cases}$$

Dalla prima equazione vediamo come l'effetto Kerr non cambi la forma temporale dell'inviluppo, che rimane costante. Integrando la seconda equazione rispetto a z , otteniamo:

$$\int_0^z \frac{\partial \phi(z')}{\partial z'} dz' = \int_0^z I_0 \gamma |a_0(t')|^2 e^{-\alpha z'} dz'$$

$$\phi(z) - \underbrace{\phi(0)}_{=0} = -\frac{I_0 \gamma |a_0(t')|^2}{\alpha} (e^{-\alpha z} - 1).$$

É conveniente riscrivere la fase in termini dei due parametri "lunghezza efficace" L_{eff} e "lunghezza non lineare" L_{nl} :

$$L_{eff} \equiv \frac{1 - e^{-\alpha z}}{\alpha}; \quad L_{nl} \equiv \frac{1}{\gamma I_0}; \quad (3.5)$$

$$\phi(z) = |a_0(t')|^2 \frac{L_{eff}}{L_{nl}}. \quad (3.6)$$

Vediamo quindi che l'effetto Kerr aggiunge un chirp al segnale, e che lo sfasamento è massimo in corrispondenza del tempo per cui $|a_0(t)|$ vale 1. L'espressione completa per l'inviluppo é quindi:

$$a(z, t') = |a_0(t')| e^{i|a_0(t')|^2 L_{eff}/L_{nl}} = |a_0(t')| e^{i\phi_{nl}}.$$

Per studiare eventuali cambiamenti nello spettro sarebbe necessario effettuare la trasformata di Fourier di $a(z, t)$, un passaggio spesso implementabile solo numericamente. I risultati numerici e sperimentali mostrano un aumento della larghezza spettrale durante la propagazione, fenomeno che prende il nome di auto-modulazione di fase (Self Phase Modulation o -SPM- in inglese). In analogia con la GVD anche la SPM é regolata dal parametro L_{nl} . Se il nostro impulso percorre distanze confrontabili con L_{nl} bisogna tenere conto della SPM. In questo paragrafo abbiamo approssimato $\beta_2 \simeq 0$, ed adesso possiamo chiarire che questo è valido quando $L_{nl} \gg L_d$. Viceversa quando $L_d \gg L_{nl}$ la GVD domina sulla SPM. Per mezzi con perdite trascurabili possiamo riscrivere la fase ϕ_{nl} :

$$L_{eff} = \frac{1 - e^{-\alpha z}}{\alpha} \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0} \frac{1 - (1 - \alpha z)}{\alpha} = z;$$

$$\phi_{nl} = \frac{|a_0(t)|^2 z}{L_{nl}}.$$

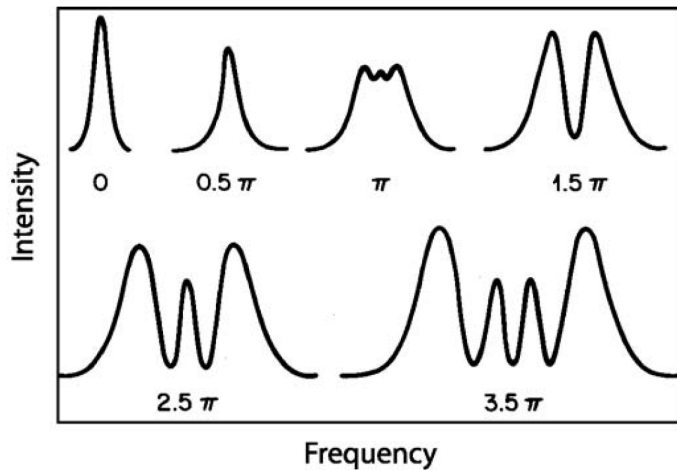


Figura 3.1. Allargamento dello spettro di un impulso gaussiano non chirpato per effetto della SPM. Da notare la separazione progressiva dello spettro in due picchi che si distanziano, che qualitativamente è la caratteristica visiva chiave della SPM. Le etichette si riferiscono alla fase ϕ_{nl} massima. Grafico tratto da [4].

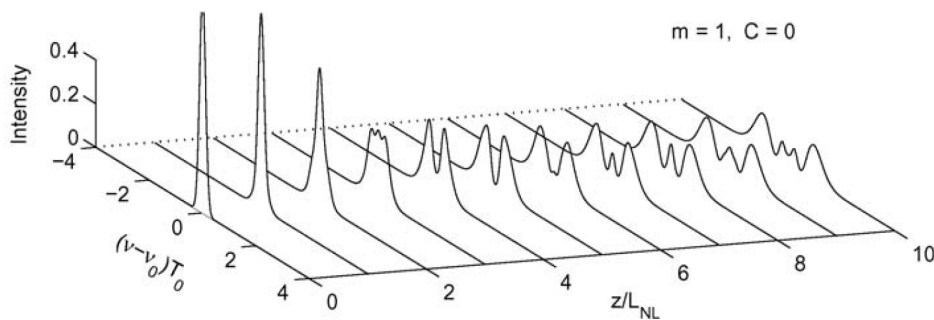


Figura 3.2. Evoluzione dello spettro di un impulso gaussiano non chirpato in una lunghezza di $10 L_{nl}$. Grafico tratto da [4].

3.2 Solitoni

In particolari condizioni è possibile che effetti dispersivi e non lineari si compensino a vicenda producendo un "onda solitaria" che ripete la propria forma temporale e spettrale periodicamente, o addirittura si mantiene inalterata durante la propagazione come in un mezzo lineare e non dispersivo. Si parla di "solitoni" quando questi impulsi hanno le proprietà aggiuntive di essere "ortogonali" nel senso che se due di essi si incontrano nel mezzo non interagiscono, a parte al più guadagnare una fase costante, e di essere localizzati. Consideriamo dunque una situazione per cui $L_D \sim L_{nl}$. Se β_2 e γ hanno segni concordi, i termini di fase (chirp) dovuti alla GVD ed alla SPM andranno a sommarsi in quanto concordi di segno ed entrambi i fenomeni contribuiranno all'allargamento dell'impulso. Se invece hanno segni diversi,

i chirp saranno opposti e potranno bilanciarsi. Per derivare una forma analitica dell'onda solitaria, ripartiamo dall'equazione per l'involuppo $A(z, t)$ (1.13) in cui teniamo sia il termine in β_2 che quello non lineare:

$$\frac{\partial A}{\partial z} + \beta_1 \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{i}{2} \beta_2 \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - i\gamma |A|^2 A + \frac{\alpha}{2} A = 0. \quad (3.7)$$

Effettuando il solito cambio di sistema di riferimento eliminiamo il termine in β_1 :

$$\frac{\partial A}{\partial z} + \frac{i}{2} \beta_2 \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - i\gamma |A|^2 A + \frac{\alpha}{2} A = 0. \quad (3.8)$$

Di nuovo esplicitiamo l'involuppo normalizzato $a(z, t')$ e sostituiamo nell'equazione:

$$\frac{\partial |a|}{\partial z} + \frac{i}{2} \beta_2 \frac{\partial^2 a}{\partial t'^2} - i\gamma I_0 |a|^2 a e^{-\alpha z} = 0. \quad (3.9)$$

Introduciamo le seguenti quantità adimensionali:

$$\tau = t'/t_0, \quad \zeta = z/L_D, \quad N^2 = \frac{L_D}{L_{nl}} = \frac{t_0^2/|\beta_2|}{1/\gamma I_0}, \quad (3.10)$$

in termini delle quali l'equazione diventa (si moltiplica tutto per un fattore L_D)

$$\frac{\partial |a|}{\partial \zeta} + \frac{i}{2} \text{sign}(\beta_2) \frac{\partial^2 a}{\partial \tau^2} - iN^2 e^{-\alpha z} |a|^2 a = 0. \quad (3.11)$$

Per risolverla consideriamo un regime di dispersione anomala ($\beta_2 < 0$), e trascuriamo le perdite ($\alpha = 0$). È da notare che queste ipotesi sono esemplificative ma non necessarie. Possiamo eliminare il parametro N dall'equazione introducendo la variabile "u":

$$u = N|a| = \sqrt{\gamma L_D I_0} a \quad (3.12)$$

In queste condizioni e moltiplicando per i otteniamo la forma canonica dell'equazione di Schrödinger non lineare:

$$i \frac{\partial u}{\partial \zeta} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + |u|^2 u = 0. \quad (3.13)$$

Si tratta di una ben studiata equazione alle derivate parziali non lineare, risolvibile con il metodo della trasformata inversa di scattering [5]. Senza addentrarci nei dettagli del metodo ci limitiamo a dire che per trovare la soluzione solitonica ci si riduce a risolvere un set di equazioni algebriche, e che questa soluzione sarà una funzione complessa con un numero di poli determinato dalla parte intera del parametro (reale) $N = \frac{L_D}{L_{nl}}$, che per questo motivo prende il nome di "ordine di solitone". Una trattazione completa dei solitoni esula dallo scopo di questa dissertazione. Ci accontentiamo di dire che ne esistono infiniti e che possono essere pensati come una base ortogonale dello spazio delle onde in un mezzo dispersivo e non lineare. I solitoni di ordine superiore ad uno non rimangono costanti ma ritornano alla forma originale dopo un intervallo di tempo chiamato "periodo di solitone", che è uguale per tutti gli ordini più grandi di 1. Quando il regime dispersivo è normale, i solitoni hanno forma molto diversa rispetto a quelli in regime normale e prendono

il nome di solitoni "scuri".

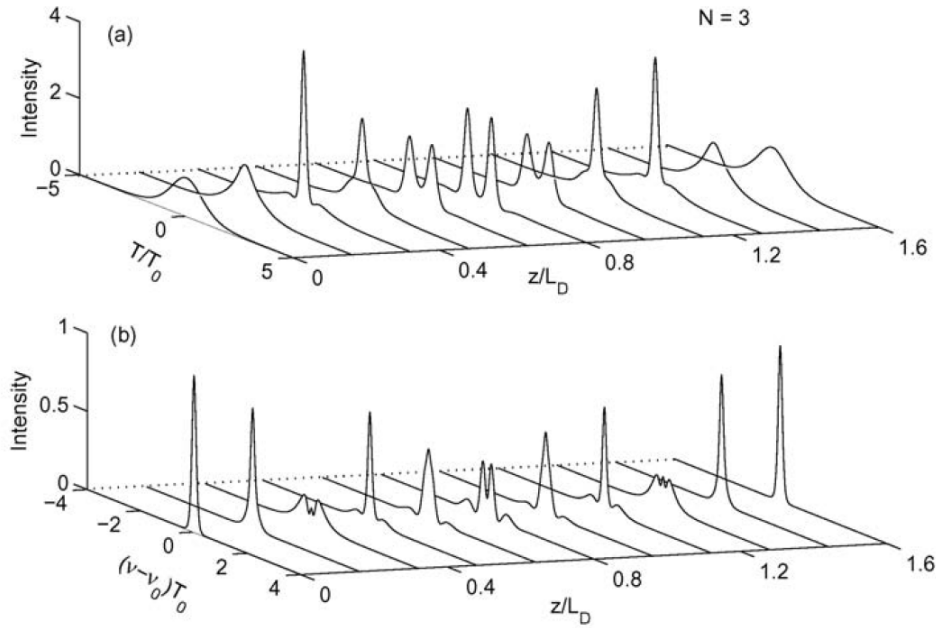


Figura 3.3. Sviluppo del profilo temporale e dello spettro del solitone del terzo ordine. È interessante notare come la SPM tenda a separare in due il picco e la GVD tenda ad allargarli causando il ripristino di un solo picco. Dopo un periodo di solitone si ritorna alla forma iniziale. Grafico tratto da [4].

3.3 Solitone fondamentale

È possibile ricavare una soluzione esplicita per la (3.13) senza applicare il metodo della trasformata inversa di scattering, nel caso di $N=1$ [4]. Ci basta ipotizzare che una soluzione di forma stabile esista e che abbia la forma:

$$u(\zeta, \tau) = V(\tau)e^{i\phi(\zeta)} \quad (3.14)$$

dove V è preso indipendente da ζ proprio perché la forma della soluzione non cambia durante la propagazione e analogamente ϕ è indipendente da τ perché altrimenti si avrebbe una modulazione in frequenza e lo spettro sarebbe instabile. Sostituendo nell'equazione (3.13) otteniamo:

$$\frac{1}{2}e^{i\phi} \left(-V \frac{d\phi}{d\zeta} + \frac{1}{2} \frac{d^2V}{d\tau^2} + V^3 \right) = 0; \quad (3.15)$$

$$(3.16)$$

$$\frac{d^2V}{d\tau^2} = 2V \left(\frac{\partial \phi}{\partial \zeta} - V^2 \right) \quad (3.17)$$

Moltiplichiamo questa equazione per $2\frac{\partial V}{\partial \tau}$ e integriamo:

$$\begin{aligned}\int 2\frac{d^2V}{d\tau^2}\frac{dV}{d\tau}d\tau &= \int 4V\frac{dV}{d\tau}\left(\frac{d\phi}{d\zeta} - V^2\right)d\tau \\ \int 2\frac{d^2V}{d\tau^2}dV &= \int 4V\left(\frac{d\phi}{d\zeta} - V^2\right)dV \\ \left(\frac{dV}{d\tau}\right)^2 &= 2V^2\frac{d\phi}{d\zeta} - V^4 + C\end{aligned}$$

dove C é una costante di integrazione che si determina ricordando che per definizione il solitone é un impulso localizzato, vale a dire sia $V(\tau)$ che $\frac{dV}{d\tau}$ si annullano per $\tau \rightarrow 0$. Il valore di $\frac{d\phi}{d\zeta}$ può essere determinato invece assumendo che per $\tau = 0$ ossia all'origine dei tempi, ci sia il picco dell'impulso, ossia $V = 1$, $\frac{dV}{d\tau} = 0$, condizione sempre realizzabile semplicemente traslando τ . Ricaviamo dunque

$$2\frac{d\phi}{d\zeta} = 1 \implies \frac{d\phi}{d\zeta} = 1/2 \quad \forall \zeta, \quad (3.18)$$

e l'equazione differenziale diventa:

$$\frac{dV}{d\tau} = \sqrt{V^2 - V^4}, \quad (3.19)$$

che ha soluzione immediata $V(\tau) = \text{sech}(\tau)$. Siamo infine arrivati all'espressione del solitone fondamentale:

$$u(\zeta, \tau) = \text{sech}(\tau)e^{i\zeta/2}. \quad (3.20)$$

L'intensità iniziale I_0 necessaria per produrre il solitone fondamentale é data dalla condizione $N^2 = 1 \rightarrow \frac{\gamma}{|\beta_2|}I_0t_0^2 = 1$ che lega assieme le caratteristiche del mezzo (γ, β_2) , la larghezza iniziale t_0 e l'intensità. É possibile mostrare che l'intensità necessaria ad avviare il solitone fondamentale é la più piccola tra tutti gli ordini di solitone, a parità di larghezza t_0 iniziale [4].

Capitolo 4

Conclusioni

All'interno di questo lavoro di tesi è stato discusso come grazie allo sviluppo in serie del numero d'onda nell'equazione di Helmholtz, e del vettore di polarizzazione, siamo in grado di descrivere la propagazione di impulsi di luce ultracorti in presenza di diversi effetti dispersivi. Introducendo un termine non lineare all'interno dell'equazione delle onde, al fine di descrivere una modulazione dell'indice di rifrazione indotta dallo stesso campo elettromagnetico che si propaga all'interno della materia (effetto Kerr ottico), abbiamo ricavato l'equazione di Schrödinger non lineare, discutendone alcune soluzioni particolari. Strumento chiave nelle varie derivazioni è la trasformata di Fourier, che ci consente di spostarci a seconda della comodità nel dominio delle frequenze e del tempo, di analizzare lo spettro, e di ridurre le notevoli difficoltà matematiche di un'equazione alle derivate parziali, a quella del calcolo di un'anti-trasformata. Abbiamo ricavato la soluzione esplicita dell'equazione di Helmholtz al secondo ordine per impulsi gaussiani. Abbiamo visto come è possibile in condizioni particolari sfruttare il chirp introdotto dal mezzo per comprimere un impulso in un particolare punto, e dunque raggiungere intensità luminose elevate in quel punto. Infine abbiamo studiato la self phase modulation indotta dall'effetto Kerr ottico e visto come è possibile che alcune particolari onde, i solitoni, viaggino inalterate in un dielettrico, sebbene esso sia dispersivo.

BIBLIOGRAFIA

1. C. Mencuccini & V. Silvestrini, Fisica - elettromagnetismo e ottica, 2nda edizione, C.E.A., 2017
2. G. R. Fowles, Introduction to modern optics, 2nd edition, Dover publications, 1975
3. J. C. Diels & W. Rudolph, Ultrashort laser phenomena, 2nd edition, Academic press, 2006
4. G. Agrawal, Nonlinear fiber optics, 5th edition, Academic Press, 2012
5. V. E. Zhakarov & A. B. Shabat, Exact theory of two-dimensional self-focusing and one-dimensional self-modulation of waves in nonlinear media, Journal of experimental and theoretical physics, Vol. 34 no. 1, 1972