



SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Studio numerico della propagazione della luce attraverso il Beam Propagation Method

Facoltà di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Fisica e Astrofisica

Virginia Protano
Matricola 1899759

Relatore
Prof. Giovanni Batignani

Correlatore
Prof. Eugenio Del Re,
Prof. Tullio Scopigno

Anno Accademico 2023/2024

Tesi non ancora discussa

Studio numerico della propagazione della luce attraverso il Beam Propagation Method

Sapienza Università di Roma

© 2024 Virginia Protano. Tutti i diritti riservati

Questa tesi è stata composta con L^AT_EX e la classe Saphthesis.

Email dell'autore: protano.1899759@studenti.uniroma1.it

Indice

Introduzione	iii
1 Diffrazione in mezzi non omogenei	1
1.1 Equazioni di Maxwell macroscopiche	1
1.2 Convoluzione e descrizione di mezzi anisotropi in componenti monocromatiche	2
1.3 Equazione di Helmholtz	3
2 Approssimazione parassiale e Beam Propagation Method	5
2.1 Slowly-Varying Envelope Approximation	5
2.2 Beam Propagation Method	7
2.3 Mezzi omogenei	9
3 Propagazione di un fascio gaussiano in una fibra ottica tipo Mach Zehnder	13
3.1 Mezzi non omogenei	13
3.2 Beam Propagation Method come guida d'onda	13
3.3 Giunzione ad Y come 1x2 Power Splitter	15
3.4 Interferometro Mach Zehnder	16
3.5 Simulazione Mach Zehnder come modulatore di intensità	18
4 Conclusioni	22
Bibliografia	23
Appendice	25

Introduzione

Da sempre la luce accompagna l'esistenza dell'uomo, rappresentando uno degli elementi a noi più familiari. Le sue molteplici proprietà offrono altrettanti campi di applicazione nella fisica nelle altre scienze. Ad esempio la luce rappresenta uno strumento fondamentale per trasferire informazioni su lunghe distanze, come nelle comunicazioni ottiche Terra-Terra, attraverso l'atmosfera [1], e persino oltre il sistema Terra-Luna come l'esperimento in corso DSOC (Deep Space Optical Communications) della NASA [2]. Ha un'importanza cruciale per studiare le proprietà della materia attraverso tecniche spettroscopiche e microscopiche, che permettono imaging di alta qualità [3][4]. Inoltre è utilizzata per lo sviluppo di nuove architetture neuromorfiche, accelerando sia l'addestramento che il funzionamento di vere e proprie reti neurali, che archiviano ed apprendono informazioni creando traiettorie preferenziali nella rete [5][6].

All'interno di questo lavoro di tesi introdurremo il Beam Propagation Method, uno strumento numerico estremamente potente sia dal punto di vista teorico, perché permette di analizzare la propagazione di fasci luminosi, che dal punto di vista sperimentale. In particolare verrà affrontato il caso di propagazione di fasci gaussiani in mezzi non omogenei, con simulazioni relative a guide ottiche rappresentate da fibre e fino a configurazioni interferometriche più complesse come l'interferometro Mach-Zehnder.

A tal fine, la tesi sarà strutturata secondo il seguente schema.

Capitolo 1: Consiste nell'introdurre la parte teorica di questo metodo, derivando l'equazione di Helmholtz per mezzi non omogenei in una forma semplice da integrare dal punto di vista numerico, partendo dalle equazioni di Maxwell.

Capitolo 2: A partire dai risultati del capitolo precedente si ricava l'equazione parabolica tramite la cosiddetta SVEA, utile per descrivere la propagazione di fasci laser. Si procede poi risolvendola numericamente tramite lo Split-Step-Fourier method, studiando il caso di mezzi omogenei.

Capitolo 3: Verrà applicata la teoria del BPM nel caso di mezzi non omogenei. In particolare si affronta lo studio della propagazione in guide d'onda, analizzando come queste permettano di compensare gli effetti diffrattivi. Ed infine si studierà il principio di funzionamento di un Mach-Zehnder integrato, analizzando che succede al variare della differenza di fase tra i due bracci dell'interferometro.

Capitolo 1

Diffrazione in mezzi non omogenei

All'interno di questo capitolo saranno descritti i passaggi matematici e le approssimazioni fisiche, che permettono di ricavare, a partire dalle relazioni di Maxwell l'equazione di Helmholtz, che rappresenta il punto di partenza per la risoluzione numerica della propagazione di fasci di luce tramite Beam Propagation Method.

1.1 Equazioni di Maxwell macroscopiche

Il modello di base dell'ottica è costituito dalle equazioni di Maxwell macroscopiche (macroscopic Maxwell equation), che rappresentano il modo più efficace per studiare l'interazione della luce con la materia [7].

Il movimento delle cariche nello spazio è descritto da un campo scalare $\rho(\vec{r}, t)$, detto densità di carica, e da un campo vettoriale $\vec{J}(\vec{r}, t)$, detto densità di corrente. In presenza di questi due campi il comportamento di campi elettrici e magnetici nello spazio può essere descritto dalle equazioni:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1.1)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (1.2)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1.3)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (1.4)$$

Queste equazioni di Maxwell microscopiche possono essere scritte anche in termini dei vettori spostamento dielettrico $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ e campo magnetico $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$, che descrivono il comportamento nei materiali.

In ottica macroscopica si lavora su scale spaziali e temporali molto maggiori delle scale atomiche. Ad esempio nel range del visibile le lunghezze d'onda sono $\lambda \sim 400-800$ nm e su tempi caratteristici di oscillazione dell'onda elettromagnetica ($T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\lambda}{c} \sim 2 \cdot 10^{-15}$ s) in cui la materia varia con continuità. Questo permette di valutare una media spaziale e temporale su scale macroscopiche rispetto alle fluttuazioni microscopiche della materia e, da queste medie spaziali, si arriva alla

nuova trattazione che utilizza le equazioni di Maxwell macroscopiche. In particolare possiamo scrivere il capo elettrico medio come:

$$\langle \vec{E}(\vec{r}, t) \rangle = \frac{1}{Vt} \int_V d\vec{r}' \int_0^T dt' \vec{E}'(\vec{r}', t') \quad (1.5)$$

Dove T è un intervallo di tempo molto minore rispetto al periodo dell'onda ottica ($T = \frac{2\pi}{\omega}$), $\vec{E}'(\vec{r}', t')$ è il campo microscopico e $V = L^3$ con L molto minore rispetto alla lunghezza d'onda considerata. Le equazioni di Maxwell macroscopiche sono quindi le equazioni 1.1, 1.2, 1.3 e 1.4, scritte in termini dei campi macroscopici 1.5.

1.2 Convoluzione e descrizione di mezzi anisotropi in componenti monocromatiche

Introduciamo i seguenti vettori definiti per i dielettrici (materiali isolanti in cui le cariche possono oscillare, formando dei domini microscopici e polarizzandosi, ma senza muoversi nel materiale):

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \vec{M}$$

Dove \vec{P} è il vettore di polarizzazione e \vec{M} è il vettore di magnetizzazione. Consideriamo un materiale dielettrico continuo non magnetizzato ($\vec{M} = 0$).

Di conseguenza il modello che ci permette di collegare \vec{P} ad \vec{E} è il modello di risposta lineare, che ha un vettore polarizzazione descritto da:

$$\vec{P}(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \int_0^\infty \chi(\vec{r}, t') \vec{E}(\vec{r}, t - t') dt' \quad (1.6)$$

integrale di convoluzione, una relazione di causa-effetto tra \vec{E} e \vec{P} , mentre χ è detto suscettività e dipende dal materiale. Corrisponde ad una risposta di un oscillatore armonico forzato di elettroni, che oscillando emettono onde elettromagnetiche, le quali si vanno a sovrapporre al campo \vec{E} forzante [7]. Per questo si avrà come risultato un campo diverso dove la velocità di fase non sarà quella della luce nel vuoto ma più corta, a causa dell'effetto ritardante della forzante.

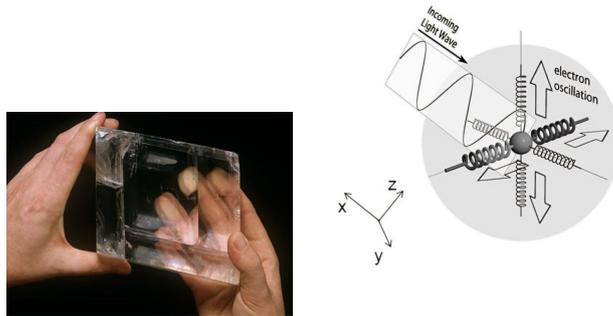


Figura 1.1. Esempio di risposta anisotropa. (Figura tratta da [8]).

Questo modello può essere facilmente esteso per studiare dei mezzi anisotropi. Ho una risposta anisotropa quando eccitando un materiale, l'oscillazione risultante non è parallela all'eccitazione, ma è ruotata in funzione del reticolo sottostante che

produce anisotropia (quindi la risposta \vec{P} non sarà parallela ad \vec{E}). L'oggetto matematico che compie questa operazione è una matrice, o più precisamente un duotensore, che nella nostra descrizione corrisponderà alla suscettività χ .

Per studiare questi fenomeni si usa una descrizione in termini di componenti di Fourier o componenti monocromatiche. Con campo monocromatico si intende un campo a livello macroscopico costituito da una pulsazione angolare ω , una lunghezza d'onda λ e con una soluzione del tipo:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_\omega(\vec{r}) e^{i\omega t} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} \quad (1.7)$$

Quindi consideriamo la soluzione per la singola frequenza ω per poi sommare tutto l'involuppo di frequenze del sistema considerato. Con l'integrale di convoluzione ricavato nell'equazione 1.6, possiamo scrivere le componenti di \vec{P}_ω come:

$$\vec{P}_\omega(\vec{r}) = \epsilon_0 \chi_\omega(\vec{r}) \vec{E}_\omega(\vec{r}) \quad (1.8)$$

dove $\chi_\omega(\vec{r})$ è la trasformata di Fourier della suscettività:

$$\chi_\omega(\vec{r}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} \chi(\vec{r}, t) dt. \quad (1.9)$$

1.3 Equazione di Helmholtz

Al fine di scrivere la regola di propagazione della luce in un materiale, in questa sezione ricaveremo l'equazione di Helmholtz.

Consideriamo inoltre un mezzo non magnetico e consideriamo la risposta di un materiale dielettrico che assumiamo essere perfetto (quindi la conducibilità è $\sigma=0$). Ricordiamo che per $\vec{M} = 0$ e $\vec{P} \neq 0$ valgono le relazioni:

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

Allora utilizzando le equazioni 1.3 e 1.4 possiamo scrivere le componenti monocromatiche di \vec{E}, \vec{H} come:

$$\nabla \times \vec{E}_\omega = i\omega \mu_0 \vec{H}_\omega \quad (1.10)$$

$$\nabla \times \vec{H}_\omega = i\omega \epsilon \vec{E}_\omega \quad (1.11)$$

con $\epsilon(\vec{r}, \omega) = \epsilon_0(1 + \chi(\vec{r}))$ costante dielettrica.

Introduciamo ora $\vec{D}_\omega(\vec{r}) = \epsilon(\omega, \vec{r}) \vec{E}_\omega$:

$$\nabla \cdot \vec{D}_\omega = \nabla \cdot (\epsilon(\omega) \vec{E}_\omega) = \vec{E}_\omega \cdot \nabla \epsilon(\omega) + \epsilon(\omega) (\nabla \cdot \vec{E}_\omega) = 0$$

che in generale per un dielettrico, in assenza di densità di cariche elettriche, è nulla. In questo modo arriviamo all'equazione:

$$\nabla \cdot \vec{E}_\omega = -\frac{\vec{E}_\omega \cdot \nabla \epsilon(\omega)}{\epsilon(\omega)} \quad (1.12)$$

Applichiamo il rotore ad entrambi i membri della 1.10 si ottiene:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}_\omega) = \nabla(\nabla \cdot \vec{E}_\omega) - \nabla^2 \vec{E}_\omega = -i\omega \mu_0 (\nabla \times \vec{H}_\omega) \quad (1.13)$$

Infine inserendo la 1.11 e la 1.12 in quest'ultima equazione (1.13) si ottiene:

$$\nabla^2 \vec{E}_\omega + \nabla \left(\vec{E}_\omega \frac{\nabla \epsilon(\omega)}{\epsilon(\omega)} \right) - i\omega \mu_0 (i\omega \epsilon(\omega) \vec{E}_\omega) \quad (1.14)$$

Definendo le quantità $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$ velocità della luce, $n(\omega, \vec{r}) = \sqrt{\frac{\epsilon(\omega, \vec{r})}{\epsilon_0}}$ indice di rifrazione e $k_0 = \frac{\omega}{c}$ vettore d'onda nel vuoto, l'equazione diventa:

$$\nabla^2 \vec{E}_\omega + 2\nabla[\vec{E}_\omega \cdot \nabla \ln(n(\omega))] + k_0^2 n(\omega)^2 \vec{E}_\omega = 0 \quad (1.15)$$

Riconosciamo tre termini nell'equazione: il primo e il terzo scalano come $\sim \frac{E}{\lambda^2}$, nel secondo possiamo sviluppare il logaritmo ottenendo il termine $\nabla \left(\frac{\vec{E} \nabla n^2}{n^2} \right)$ che va come $\frac{1}{\lambda} \frac{1}{l_n} - \left| \frac{\delta n}{n_1} \right|$ (Con l_n si indica la modulazione dell'indice di rifrazione pesata dal fattore $\left| \frac{\delta n}{n_1} \right|$, inoltre si considera n come $n(\vec{r}) = n_1 + \delta n(\vec{r})$, ovvero la somma dell'indice di rifrazione medio e la sua variazione rispetto alla posizione).

Nelle condizioni in cui la modulazione è piccola e in cui la stessa avviene su scale molto maggiori della lunghezza d'onda ($\frac{\delta n}{n_1} \ll 1$ e $l_n \gg \lambda$), è possibile trascurare il secondo termine, e l'equazione diventa:

$$\nabla^2 \vec{E}_\omega + k_0^2 n(\omega)^2 \vec{E}_\omega = 0 \quad (1.16)$$

Questa è l'Equazione di Helmholtz scalare e permette di studiare la propagazione delle singole componenti spettrali del campo conoscendo l'indice di rifrazione alle lunghezze d'onda di interesse.

Capitolo 2

Approssimazione parassiale e Beam Propagation Method

All'interno di questo capitolo andremo a risolvere l'equazione di Helmholtz nel caso di radiazione laser incidente. In questo caso si hanno due grandi semplificazioni dovute al tipo di radiazione: la forte monocromaticità, che permette di risolvere per una singola frequenza ω , e la forte direzionalità, che permette di individuare una direzione di propagazione del fascio. Per convenzione, assumeremo come direzione di propagazione l'asse z .

Come vedremo, per descrivere il sistema si usa l'equazione parabolica, derivata attraverso la cosiddetta Slowly-Varying Envelope Approximation (SVEA)[\[9\]](#).

2.1 Slowly-Varying Envelope Approximation

Iniziamo con il riscrivere il campo \vec{E} in funzione di un'altra grandezza vettoriale \vec{A} e di un fattore rapidamente oscillante che tiene conto della propagazione lungo z :

$$\vec{E}_\omega(\vec{r}) = \vec{A}(\vec{r}, z)e^{-ikz} \quad (2.1)$$

con $k = k_0 n_1 = \frac{\omega}{c}$, dove n_1 è l'indice di rifrazione medio del materiale. Questo ha la caratteristica di variare molto lentamente rispetto alla lunghezza d'onda del fascio.

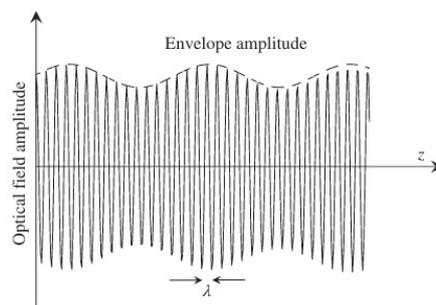


Figura 2.1. L'immagine mostra l'ampiezza del campo in funzione della distanza z per un fascio gaussiano. L'envolpe amplitude rappresenta il profilo del fascio che si modula in modo gaussiano, mentre la lunghezza d'onda λ indica la periodicità dell'onda ottica all'interno del fascio. [Immagine tratta da [\[10\]](#)].

Come vedremo questo permetterà di risolvere matematicamente, in maniera più semplice, l'equazione. Inoltre da un punto di vista computazionale ci permetterà di campionare le grandezze fisiche di interesse su griglie computazionali molto più compatte, in modo da poter campionare con un sampling spaziale molto maggiore di λ .

Sostituendo la relazione 2.1 nell'equazione di Helmholtz, riscrivendola nel caso scalare, con $\vec{r}_\perp = (x, y)$, avremo che:

$$\nabla^2(A(\vec{r}_\perp, z)e^{-ikz}) + k_0^2 n(\omega)^2 A(\vec{r}_\perp, z)e^{-ikz} = 0 \quad (2.2)$$

Ricordando la definizione di n e considerando che siamo nel caso $\delta n \ll n_1$ possiamo trascurare il termine δn^2 senza perdere la dipendenza da \vec{r} , ovvero l'informazione sulla disomogeneità:

$$n^2 = n_1^2 + 2n_1 \delta n(\vec{r}) \quad (2.3)$$

Inoltre è possibile risolvere la derivata nel primo termine scomponendo il nabla quadro nelle direzioni:

$$\nabla^2 = \nabla_\perp^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (2.4)$$

A questo punto si risolve la derivata come:

$$\nabla^2(A(\vec{r}_\perp, z)e^{-ikz}) = \nabla_\perp^2 A e^{-ikz} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial A}{\partial z} e^{-ikz} - ik A e^{-ikz} \right) \quad (2.5)$$

Raccogliendo i termini:

$$\nabla^2(A(\vec{r}_\perp, z)e^{-ikz}) = \left[\nabla_\perp^2 A + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} - 2ik \frac{\partial A}{\partial z} + k^2 A \right] e^{-ikz} \quad (2.6)$$

Ora si sostituisce nell'equazione 2.2, usando la 2.3 e $k^2 = k_0^2 n_1^2$:

$$\nabla_\perp^2 A + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} - 2ik \frac{\partial A}{\partial z} - k_0^2 n_1^2 A + k_0^2 n_1^2 A + 2k_0^2 n_1 \delta n A = 0 \quad (2.7)$$

Ricordando che A varia lentamente, si può trascurare la derivata seconda di A rispetto a z , perchè $\left| \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} \right| \ll k \left| \frac{\partial A}{\partial z} \right|$. Questa approssimazione prende il nome di Slowly-Varying Envelope Approximation o (SVEA) e ci porta all'espressione dell'equazione parabolica:

$$\nabla_\perp^2(A) - 2ik \frac{\partial A}{\partial z} + 2k_0^2 n_1 \delta n A = 0 \quad (2.8)$$

Questa si può riscrivere, per calcolare l'evoluzione dell'envelope A tramite un approccio numerico, esplicitando la derivata di A rispetto a z :

$$\frac{\partial A}{\partial z} = -\frac{i}{2k} \nabla_\perp^2(A) - \frac{ik \delta n}{n_1} A \quad (2.9)$$

Nella forma appena ricavata l'involuppo del fascio, isolato nella parte sinistra dell'equazione, segue una dinamica dipendente unicamente dalla derivata prima di z .

2.2 Beam Propagation Method

Questo algoritmo risolutivo, sfruttando la dipendenza lineare in z , ci permette di ricavare il campo in $z + dz$ se si conosce il suo valore in z , considerando un dz sufficientemente piccolo.

Questo avviene seguendo il cosiddetto Split-Step Fourier Method di cui di seguito ne mostriamo il funzionamento matematico.

Introduciamo i seguenti operatori:

$$\hat{D} = -\frac{i}{2k} \nabla_{\perp}^2 \quad (2.10)$$

$$\hat{N} = -\frac{ik\delta n(\vec{r})}{n_1} \quad (2.11)$$

Questi tengono conto rispettivamente della diffrazione e della disomogeneità nel materiale. In linea di principio, il secondo termine può tenere conto di termini non-lineari del campo [11].

In questo modo è possibile riscrivere la (2.9) come :

$$\frac{\partial A}{\partial z} = (\hat{D} + \hat{N})A \quad (2.12)$$

A livello numerico si propaga A lungo z partendo da delle condizioni al contorno con $z=0$ per poi determinare $A(x, y, z = dz)$, $A(x, y, z = 2dz)$... con dz piccolo. Ovvero si integra la relazione (2.9) passando da $A(x, y, z=0)$ ad $A(x, y, dz)$, iterando il processo per tutti i dz . Matematicamente si ha:

$$A(x, y, z + dz) = e^{(\hat{D} + \hat{N})dz} A(x, y, z) \quad (2.13)$$

Computazionalmente è possibile valutare la propagazione dell'involuppo tramite la soluzione approssimata:

$$A(x, y, z + dz) = e^{\hat{D}dz} e^{\hat{N}dz} A(x, y, z) \quad (2.14)$$

Questo è possibile nonostante gli operatori $\hat{D}dz$ e $\hat{N}dz$ non commutino tra di loro, perché attraverso la relazione di Baker–Campbell–Hausdorff (BCH):

$$\hat{Z} = \hat{X} + \hat{Y} + \frac{1}{2}[\hat{X}, \hat{Y}] + \frac{1}{12}[\hat{X}, [\hat{X}, \hat{Y}]] - \frac{1}{12}[\hat{Y}, [\hat{X}, \hat{Y}]]... \quad (2.15)$$

considerando nel nostro caso $\hat{X} = \hat{D}dz$ e $\hat{Y} = \hat{N}dz$, si può verificare che l'errore che si commette fattorizzando l'esponenziale in questi due termini è dell'ordine di $(dz)^2$. Partiamo dalla definizione di \hat{Z} (2.15), esplicitando \hat{X} ed \hat{Y} :

$$\hat{Z} = (\hat{D} + \hat{N})dz + \frac{dz^2}{2}[\hat{D}, \hat{N}] + \frac{dz^3}{12}[\hat{D}, [\hat{D}, \hat{N}]] - \frac{dz^3}{12}[\hat{N}, [\hat{D}, \hat{N}]] + ... \quad (2.16)$$

Consideriamo ora l'errore che si commette fattorizzando l'esponenziale in termini dei singoli operatori, espandendo tramite la relazione BCH l'esponenziale $e^{\hat{X}}e^{\hat{Y}}$ e confrontandolo con $e^{\hat{Z}}$.

$$e^{\hat{X}}e^{\hat{Y}} = 1 + (\hat{D} + \hat{N})dz + \frac{dz^2}{2}(\hat{D})^2 + \frac{dz^2}{2}(\hat{N})^2 + \hat{D}dz\hat{N}dz + O(dz^3) \quad (2.17)$$

Possiamo vedere che l'espansione fino all'ordine dz^2 coincide esattamente con quella di $e^{(\hat{D}+\hat{N})dz}$:

$$e^{(\hat{D}+\hat{N})dz} = 1 + (\hat{D} + \hat{N})dz + \frac{dz^2}{2}(\hat{D} + \hat{N})^2 + O(dz^3) \quad (2.18)$$

Pertanto l'errore commesso fattorizzando l'esponenziale nei due termini è dato dai termini successivi della serie, dovuto alla presenza del termine misto $\hat{D}dz\hat{N}dz$, dove non si tiene conto del commutatore $\frac{dz^2}{2}[\hat{D}, \hat{N}]$. Quindi possiamo concludere che l'errore commesso è dell'ordine di dz^2 .

In questo modo, a livello risolutivo, i due termini seguono un percorso ben preciso e facilmente risolvibile con il programma. Infatti noto $\delta n(x, y, z)$ la risoluzione del programma inizia dal passo iniziale con $z=0$ e continua con la propagazione per ogni dz , ottenendo l'andamento dell'involuppo, e di conseguenza il campo elettrico propagante, come illustrato nella figura (2.2).

In particolare la propagazione in \hat{N} consiste nella risoluzione del seguente integrale:

$$A(x, y, z + dz) = e^{-i\frac{k}{n_1} \int_z^{z+dz} \delta n(x, y, z') dz'} \cdot A(x, y, z) \quad (2.19)$$

considerando δn costante nell'intervallo scelto.

La propagazione in \hat{D} invece prevede un passo in più, dovendo passare al dominio di Fourier. Consiste infatti nello scrivere $A(x, y, z)$ in funzione della sua trasformata $\tilde{A}(k_x, k_y, z)$:

$$A(x, y, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_x dk_y \tilde{A}(k_x, k_y, z) e^{i(k_x x + k_y y)} \quad (2.20)$$

e ricordando la proprietà della trasformata della derivata di $f(x)$:

$$FT = \left[\frac{\partial^n}{\partial x^n} f(x) \right] = (ik)^n \tilde{f}(k) \quad (2.21)$$

la 2.7 nel dominio coniugato può essere espressa come:

$$\frac{\partial \tilde{A}}{\partial z} = \frac{i}{2k} (k_x^2 + k_y^2) \tilde{A}(k_x, k_y, z) \quad (2.22)$$

la cui soluzione è:

$$\tilde{A}(k_x, k_y, z + dz) = e^{\frac{i}{2k} (k_x^2 + k_y^2) dz} \tilde{A}(k_x, k_y, z) \quad (2.23)$$

Per tornare al dominio spaziale di partenza è sufficiente applicare l'anti-trasformata:

$$A(k_x, k_y, z + dz) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{i}{2k} (k_x^2 + k_y^2) dz - ik_x x - ik_y y} \tilde{A}(k_x, k_y, z) dk_x dk_y \quad (2.24)$$

(iterando il processo per tutti i dz).

Il procedimento illustrato si riferisce all'algoritmo risolutivo noto come Beam Propagation Method o Split-Step Fourier Method. L'algoritmo usato in questa dissertazione segue lo stesso principio, ma risulta più efficiente ed è noto come Split-Step Simmetrizzato. Questo consiste nella seguente fattorizzazione degli operatori:

$$A(x, y, z + dz) \simeq e^{\hat{D} \frac{dz}{2}} e^{\hat{N} dz} e^{\hat{D} \frac{dz}{2}} A(x, y, z) \quad (2.25)$$

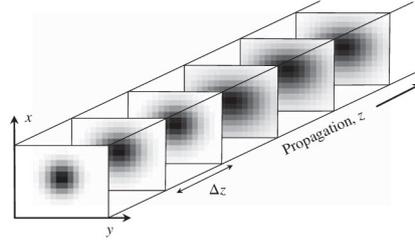


Figura 2.2. L'algoritmo BPM per la propagazione ottica ci consente di determinare il campo nel piano ($z + dz$) conoscendo il campo discretizzato nel piano trasversale alla posizione z . [Immagine tratta da [10]]

Ovvero la propagazione avviene inizialmente facendo agire solo l'operatore \hat{D} fino a $\frac{dz}{2}$, quando arriva a metà dz applica l'operatore disomogeneità \hat{N} , che agirà su tutto dz . Infine agisce sul secondo tratto $\frac{dz}{2}$ con il secondo operatore diffrazione. Svolgendo questo algoritmo risolutivo, converge più velocemente con un errore di ordine (dz^3) [12].

2.3 Mezzi omogenei

Per sviluppare i diversi schemi numerici utili al nostro studio e dimostrarne il funzionamento, partiamo dal caso più semplice, ovvero quello della propagazione di luce laser in un mezzo omogeneo [12]. Un mezzo otticamente omogeneo è definito come un materiale in cui le sue proprietà ottiche sono indipendenti dalla posizione, per cui la sua struttura risulta identica in ogni direzione. Questo si traduce nell'annullamento del termine di disomogeneità dell'indice di rifrazione ($\delta n = 0$) e dell'operatore \hat{N} . Di conseguenza l'equazione parabolica assume la forma:

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial z} = -\frac{i}{2k} \nabla_{\perp}^2 (\vec{A}) = \hat{D} \cdot \vec{A} \quad (2.26)$$

Applicando la trasformata di Fourier, nel dominio coniugato l'equazione diventa:

$$\frac{\partial \vec{A}(k_{\perp}, z)}{\partial z} = \frac{i}{2k} (k_x^2 + k_y^2) \vec{A}(k_{\perp}, z) \quad (2.27)$$

Con $k_{\perp} = (k_x, k_y)$. La cui soluzione imponendo la condizione al contorno $\vec{A}(k_{\perp}, z = 0)$ (spettro spaziale nella posizione iniziale) è:

$$\vec{A}(k_{\perp}, z) = \vec{A}(k_{\perp}, 0) e^{\frac{i}{2k} (k_x^2 + k_y^2) z} \quad (2.28)$$

Come già specificato, grazie alla linearità, qualsiasi sua combinazione lineare continua ad essere una soluzione, quindi per tornare al dominio spaziale applichiamo l'anti-trasformata alla nostra soluzione:

$$\vec{A}(r_{\perp}, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{A}(k_{\perp}, 0) e^{\frac{i}{2k} (k_x^2 + k_y^2) z - ik_x x - ik_y y} dk_x dk_y \quad (2.29)$$

Questa è esattamente l'espressione della slowly-varying envelope della soluzione generale per la diffrazione di Fresnel nell'approssimazione parassiale.

Per valutare l'efficacia dell'approccio Split Step possiamo simulare la propagazione di un fascio gaussiano ¹, il cui involuppo di partenza è descritto da:

$$\vec{A}(\vec{r}_\perp, z = 0) = \sqrt{I_0} e^{-\frac{(x^2+y^2)}{w_0^2}} \quad (2.30)$$

Con I_0 intensità del picco e w_0 larghezza del fascio d'ingresso (waist iniziale)[13]:

$$w(z) = w_0^2 \left[1 + \frac{\lambda z}{\pi w_0^2} \right] \quad (2.31)$$

$$I(r, z) = I_0 \left[\frac{w_0}{w(z)} \right]^2 e^{-\frac{2r^2}{w(z)^2}} \quad (2.32)$$

Prendiamo in esame un fascio gaussiano di larghezza iniziale $w_0 = 5\text{cm}$ e con lunghezza d'onda $\lambda = 0.5\mu\text{m}$ e propaghiamolo per $z = 200\text{m}$ con 50 passi discreti lungo la direzione di propagazione z . L'indice di rifrazione è scelto pari a quello del vuoto, ovvero $n_0 = 1$.

Iniziamo con l'affrontare il caso 2+1D, avremo quindi un fascio gaussiano in x e y da propagare lungo z . Questo si traduce in una matrice bidimensionale di partenza, utilizzando il codice BPM riportato in [Appendice](#). Si hanno i seguenti risultati:

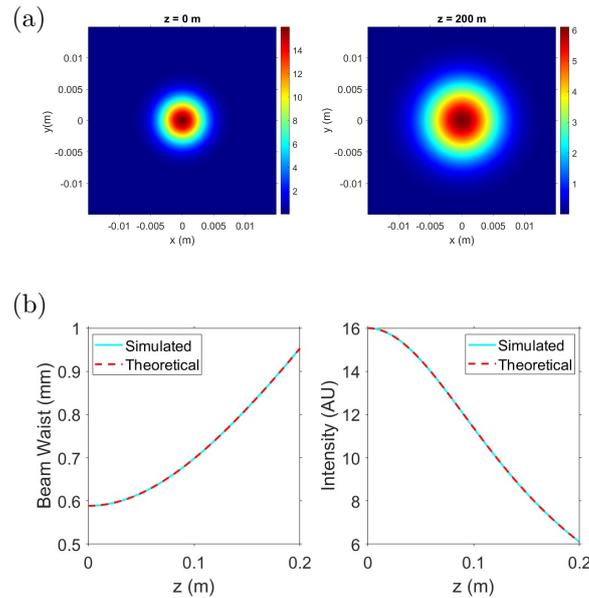


Figura 2.3. Nel pannello (a) è riportata l'intensità del fascio nel piano (x,y) nella posizione di partenza e dopo essersi propagato di $dz=200\text{m}$. Si può notare l'allargamento del profilo gaussiano con la conseguente perdita di intensità. Nel pannello (b) si confrontano il Beam Waist e l'intensità del fascio simulati con quelli previsti dalla teoria.

¹si riferiscono al fatto che la luce emessa dagli oscillatori ottici è un'onda elettromagnetica idealmente monocromatica, quasi piana, la cui intensità assume il valore massimo in prossimità dell'asse di propagazione e decresce generalmente, sul piano normale alla direzione di propagazione, con andamento gaussiano [14].

La gaussiana iniziale propagandosi, pur rimanendo gaussiana, ha un calo di intensità di picco dovuto alla conservazione dell'energia. Infatti per far conservare la potenza del fascio:

$$W(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} |\vec{A}(x, y, z)|^2 dx \quad (2.33)$$

se la curva gaussiana si allarga, allora l'intensità dovrà diminuire per far sì che resti costante.

Studiamo ora il caso 1+1D, qui a differenza del caso precedente avremo un fascio gaussiano solamente in x da propagare lungo z . I risultati ottenuti con il codice riportato in [Appendice](#), sono i seguenti:

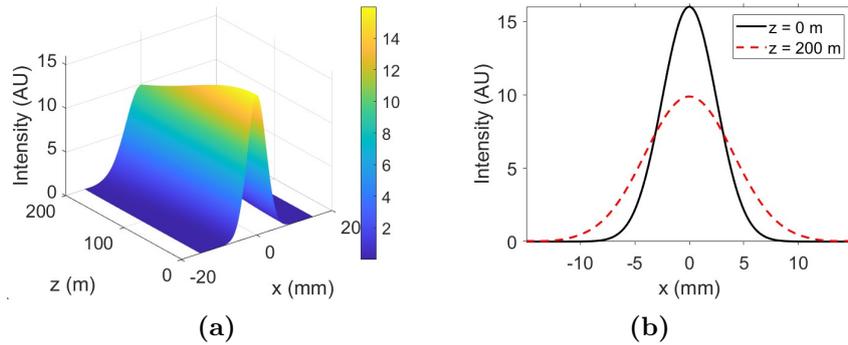


Figura 2.4. Il pannello (a) mostra l'evoluzione della distribuzione dell'intensità del fascio lungo la direzione di propagazione z , visualizzata come una superficie tridimensionale, con colori che rappresentano l'intensità relativa in unità arbitrarie (AU). Il pannello (b) confronta il profilo di intensità trasversale del fascio all'inizio (Linea nera continua) e alla fine (Linea rossa tratteggiata) della propagazione.

Mettendo a confronto i due casi si può evidenziare un fatto interessante:

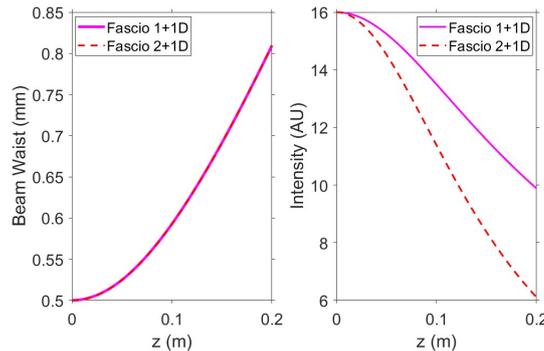


Figura 2.5. Questi grafici mostrano il confronto tra i due casi presi in esame (fascio 1+1D in rosa, fascio 2+1D in rosso). In particolare si mostra l'andamento del waist e dell'intensità di picco.

Notiamo come l'intensità nel caso 2+1D decresce più rapidamente rispetto a quella del caso 1+1D, mentre nel beam waist gli andamenti risultino perfettamente sovrapposti. Il fatto che l'intensità decresca più rapidamente nel caso 2+1D è dovuto al fatto

che con $z \gg z_R = \frac{\pi\omega_0^2}{\lambda}$ (lunghezza di Rayleigh) c'è una netta distinzione dei due casi, dovuta alla dimensione della divergenza e della distribuzione dell'energia del fascio. Per $z \gg z_R$, ossia molto lontano rispetto alla lunghezza di Rayleigh, il fascio gaussiano si comporta come un fascio divergente.

Nel caso 1+1D il fascio gaussiano si propaga lungo z e si espande solo lungo la dimensione x . Per cui l'energia del fascio si distribuisce solo lungo x , e la sua ampiezza diminuisce come $\frac{1}{\sqrt{z}}$. l'intensità, essendo proporzionale al quadrato dell'ampiezza diminuisce perciò come $\frac{1}{z}$.

$$I(z) \approx \frac{1}{w(z)} \approx \frac{\pi\omega_0}{\lambda z} \approx \frac{1}{z} \quad (2.34)$$

Quindi questo comportamento è dovuto al fatto che l'espansione è confinata in una sola dimensione trasversale.

Nel caso 2+1D invece l'energia si distribuisce su un'area che cresce come z^2 e l'ampiezza diminuisce come $\frac{1}{z}$, perciò l'intensità diminuisce come $\frac{1}{z^2}$.

$$I(z) \approx \frac{1}{w(z)^2} \approx \frac{\pi^2\omega_0^2}{\lambda^2 z^2} \approx \frac{1}{z^2} \quad (2.35)$$

Questa differenza dipende dunque da come l'energia del fascio viene distribuita nello spazio in base alle dimensioni trasversali disponibili.

Capitolo 3

Propagazione di un fascio gaussiano in una fibra ottica tipo Mach Zehnder

Affronteremo in questo ultimo capitolo la propagazione di fasci gaussiani in mezzi non omogenei, quindi con indice di rifrazione variabile. Verrà dunque applicata la teoria del BPM vista finora a simulazioni relative alla propagazione di fasci gaussiani all'interno di guide ottiche rappresentate da fibre e di configurazioni interferometriche più complesse come l'interferometro Mach-Zehnder.

3.1 Mezzi non omogenei

Nel caso non omogeneo si ha $\delta n \neq 0$ [12], ed una soluzione altrettanto esplicita dell'Equazione Parassiale non è generalmente disponibile. Un caso esplicitamente trattabile è quando $\delta n(x, y, z) \approx \delta n(z)$. In questo caso, la sostituzione diretta mostra che la soluzione d'onda piana

$$\vec{A}_\omega = \vec{A}_{\omega,0} e^{-\frac{i\omega}{c} \int_0^z \delta n(z') dz'} \quad (3.1)$$

è una soluzione.

In verità, questa è una soluzione valida solo quando il pattern dell'indice non è in grado di riflettere una porzione finita dell'onda propagata, poiché l'intero approccio parassiale è limitato all'analisi dell'onda in propagazione in avanti,

$$\vec{E}_\omega(\vec{r}) = \vec{A}_\omega(\vec{r}_\perp, z) e^{-ik\omega(z)} \quad (3.2)$$

mentre l'equazione d'onda completa deve anche considerare l'eventuale accoppiamento con l'onda riflessa all'indietro. Noi considereremo solo quella in avanti, discutendone alcuni esempi nelle sezioni successive.

3.2 Beam Propagation Method come guida d'onda

I dispositivi fotonici integrati si basano sulla propagazione della luce lungo guide d'onda ottiche [10]. La progettazione e l'ottimizzazione di tali dispositivi richiedono tecniche numeriche di propagazione delle onde per la simulazione accurata della luce lungo strutture ottiche non omogenee.

Per testare il nostro algoritmo con il BPM nella progettazione di tali guide d'onda

iniziamo con l'analizzare la propagazione di un fascio laser attraverso un mezzo con un indice di rifrazione variabile. Utilizziamo il BPM come guida d'onda applicata ad un mezzo con variazione spaziale dell'indice di rifrazione, come può essere una fibra ottica con un n più alto al centro che diminuisce verso i bordi.

Le fibre hanno due componenti principali racchiuse da una guaina protettiva opaca alla luce: la parte più interna, detta core (nucleo), è generalmente caratterizzata da un indice di rifrazione più elevato, la parte più esterna, detta cladding (mantello), ha invece un indice di rifrazione più basso [15].

Questa differenza di indice di rifrazione crea un potenziale ottico che confina il fascio di luce all'interno del nucleo per riflessione totale interna. Nel caso di sistemi di guida d'onda ottici anche una variazione minima nell'indice di rifrazione è sufficiente per confinare la luce nel core, grazie al fenomeno della riflessione totale interna. Nel nostro caso questa la differenza tra $n_{core} = 1.5$ e $n_{cladding} = 1.500095$ è di $9.5 \cdot 10^{-5}$. La variazione di δn prevista dal programma è controllata dalla funzione gradino di Heaviside, che restituisce 1 per valori non negativi e 0 per valori negativi. La teoria di questa sezione è quindi riferita ai mezzi non omogenei 3.1 nel caso 1+1D, con intensità iniziale del fascio modellata come una gaussiana.

In questo scenario la modulazione dell'indice di rifrazione fa da guida d'onda al fascio gaussiano e questa variazione può focalizzare o defocalizzare il fascio a seconda della sua forma.

In particolare la variazione spaziale dell'indice di rifrazione segue il seguente modello:

$$\delta n(x) = n_0 \left(1 - \left(\frac{x}{R} \right)^2 \right) \cdot \theta(x) \quad (3.3)$$

dove $\theta(x)$ indica la Theta di Heaviside di x (che assicura che δn sia non negativa), n_0 indica la variazione massima dell'indice di rifrazione, ed R il raggio caratteristico della guida. Questa variazione crea un potenziale ottico che confina il fascio all'interno di una regione specifica, simulando il comportamento di una guida ottica come una fibra.

Un δn positivo significa quindi che l'indice di rifrazione è maggiore all'interno del nucleo rispetto al cladding, in questo modo assicura il confinamento della luce [16].

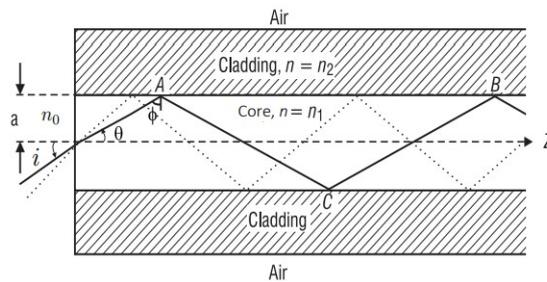


Figura 3.1. Sezione di una fibra ottica [Immagine tratta da [17]].

Verrà simulata la propagazione di un fascio gaussiano con $w_0 = 10\mu m$, $\lambda = 0.5\mu m$, $R = 7.07\mu m$, per un tratto $z = 12mm$ con 400 passi discreti, usando il programma riportato in [Appendice](#). Inserendo un $\delta n \neq 0$ il mezzo di propagazione risulta non omogeneo, il fascio si propaga evolvendosi in esso, risultando ben confinato ([Figure 3.2a](#), [3.2b](#)).

Mentre nel caso con $\delta n = 0$ (mostrato in Figura 3.2c) l'indice di rifrazione diventa costante e la propagazione diventa quella di un fascio gaussiano in uno spazio libero, o in un mezzo omogeneo, senza nessun effetto di guida d'onda o modulazione dell'indice di rifrazione. Di conseguenza, l'evoluzione del fascio sarà dominata solo dalla diffrazione, che comporterà un allargamento del fascio con conseguente diminuzione di intensità, come si osserva dalla trasformazione di Fourier nel dominio spaziale.

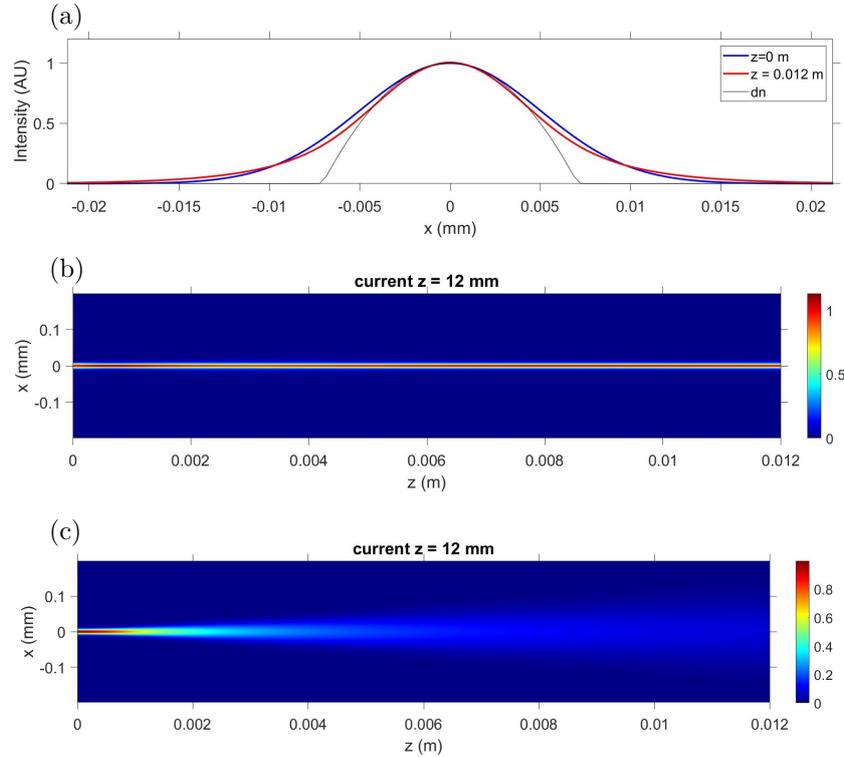


Figura 3.2. Il grafico (a) mostra il profilo dell'intensità del fascio iniziale (curva blu) e finale (curva rossa) lungo x ad una data posizione z , confrontandola con la distribuzione dell'indice di rifrazione (curva nera). Il grafico (b) mostra la distribuzione dell'intensità nel piano (x,z) per $\delta n \neq 0$, fornendo una visione complessiva di come il fascio si propaga e si evolve nel mezzo, risultando ben localizzato. Il pannello (c) mostra la propagazione del fascio lungo z e come varia la sua intensità nel caso con $\delta n = 0$ dove il fascio si allarga per la diffrazione.

3.3 Giunzione ad Y come 1x2 Power Splitter

Il modo più semplice per fabbricare un Beam Splitter ¹ nei circuiti a guida d'onda consiste nel progettare una giunzione ad Y, dove una guida d'onda di ingresso (solitamente monomodale ² alla lunghezza d'onda di lavoro) si separa tramite una transizione curva convergente in due (o più) guide[10].

¹I beam splitter sono componenti ottici utilizzati per dividere la luce incidente in un rapporto designato in due fasci separati.

²Una guida d'onda monomodale è progettata in modo che supporti solo una modalità di propagazione della luce. Questo significa che solo un singolo percorso di luce può propagarsi attraverso la guida d'onda, riducendo la dispersione modale e mantenendo l'integrità del segnale.

Se la giunzione a Y è simmetrica con due guide d'onda di uscita, questo elemento può funzionare come un divisore di potenza, che prevede una divisione al 50% della potenza in ingresso in ciascun ramo di uscita).

Per evitare alte perdite, la regione curva dovrebbe essere adiabatica³, il che implica l'uso del corretto raggio di curvatura nelle regioni curve. In particolare R dovrebbe essere abbastanza grande per evitare perdite alla transizione e, in secondo luogo, la separazione S tra le guide d'onda di uscita dovrebbe essere sufficientemente ampia per evitare il disaccoppiamento tra di esse.

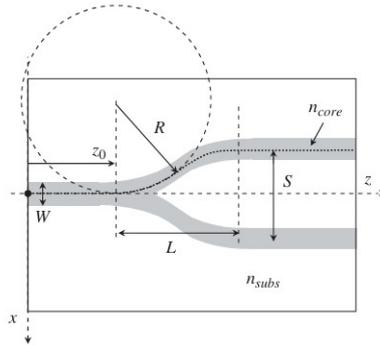


Figura 3.3. Progettazione geometrica di una giunzione ad Y basata su guide d'onda planari a indice graduale. [Immagine tratta da [10]].

3.4 Interferometro Mach Zehnder

Esistono diverse configurazioni interferometriche comunemente utilizzate nelle applicazioni di rilevamento in fibra ottica. Una delle implementazioni più semplici è l'interferometro Mach-Zehnder, mostrato nella figura 3.4, dove la luce si propaga in una direzione, dalla sorgente attraverso l'interferometro, fino ai rivelatori[18].

La sua struttura prevede due rami di ingresso, uno nullo ed uno con un fascio gaussiano di input. Quest'ultimo interagendo con un Beam-Splitter si divide in due rami detti bracci interferometrici.

Questi sono tipicamente denominati braccio sensore, con lunghezza fisica L_S , e braccio di riferimento, con lunghezza fisica L_R (In molti casi il braccio di riferimento è schermato dall'ambiente e solo il braccio sensore è esposto alla grandezza da misurare).

In un interferometro Mach-Zehnder (MZI), uno shift di fase viene introdotto intenzionalmente in uno dei due rami dell'interferometro per ottenere una modulazione dell'intensità nei due rami di uscita.

Nel caso preso in esame in questa sezione, la differenza di fase viene introdotta considerando una variazione dell'indice di rifrazione, che simula una diversa distanza di propagazione. Infine, dopo che il fascio si è ricongiunto, si ha un secondo Beam-Splitter che può avere due output. Queste uscite corrispondono al fascio che si propaga in avanti che arriva sul diodo rivelatore, e al fascio che torna indietro verso il punto di origine (In questo modo si tiene conto sia della propagazione del fascio, che della conservazione dell'energia).

³un sistema adiabatico è un sistema chiuso che non può scambiare calore con l'ambiente esterno, può invece scambiare lavoro.

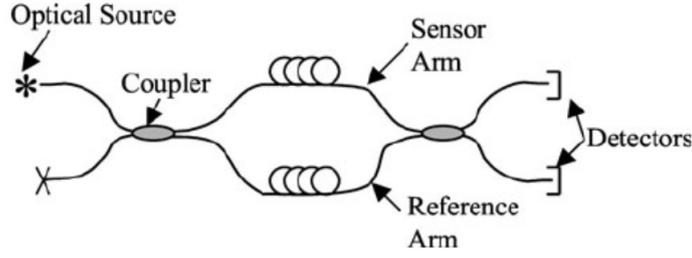


Figura 3.4. Layout della struttura di un interferometro Mach-Zehnder in fibra [Immagine tratta da [18]].

Nella struttura MZI [19], la distribuzione del campo di lancio in input è $E(x, y)$. Questo viene regolato per entrare nel divisore del ramo ad Y (3.3) dove è diviso in due raggi, $E_1(x, y)$ passa attraverso il braccio sensore ed $E_2(x, y)$ passa attraverso il braccio di riferimento. Entrambi dipendono dalla distribuzione del campo.

Ciò che avviene invece quando le fibre si avvicinano per unirsi è qualcosa di assimilabile all'effetto tunnel⁴. Più le fibre sono vicine e più la probabilità di saltare dall'una all'altra, e quindi che il fascio si unisca, aumenta.

Se infatti la lunghezza del canale risulta opportuna rispetto al sistema fisico in esame, la probabilità, e quindi la divisione del fascio, sarà perfettamente al 50%, costruendo in questo modo un Beam-Splitter bilanciato. Altrimenti se questa lunghezza risulta minore o maggiore avremo un rapporto tra trasmissione e riflessione che non sarà zero, ma rispettivamente maggiore di zero o minore di zero.

L'intensità di uscita di MZI si comporta come una funzione coseno della variazione di fase.

Il segnale che arriva ai rivelatori in output è dato da [18]:

$$I_{out1} = I_R + I_S + 2\sqrt{I_R I_S} \cdot \cos(\Delta\phi) \quad (3.4)$$

$$I_{out2} = I_R + I_S - 2\sqrt{I_R I_S} \cdot \cos(\Delta\phi) \quad (3.5)$$

dove I_R e I_S sono le potenze delle guide d'onda di riferimento e di misura osservate in ciascun braccio del MZI e $(\Delta\phi = \phi_R - \phi_S)$ è la differenza di fase tra entrambi i bracci delle guide d'onda.

Una rappresentazione più generale delle equazioni 3.4 e 3.5 è data da:

$$I_{out1,2} = I_0[1 \pm V \cos(\Delta\phi)] \quad (3.6)$$

Con $I_0 = (I_R + I_S)$ potenza ottica media, $V = \frac{(I_{max} - I_{min})}{(I_{max} + I_{min})} = \frac{2\sqrt{I_R I_S}}{(I_R + I_S)}$ visibilità, e $\Delta\phi$ differenza di fase ottica tra i due bracci dell'interferometro.

Questo spostamento di fase ϕ è legato all'indice di rifrazione del mezzo di misurazione e della lunghezza del braccio di misurazione tramite la seguente formula:

$$\Delta\phi = \frac{2\pi L \Delta n_{eff}}{\lambda} \quad (3.7)$$

⁴L'effetto tunnel consiste nel passaggio di particelle attraverso barriere di potenziale apparentemente invalicabili, previsto dalla meccanica quantistica. Questo è dovuto al fatto che la soluzione dell'equazione di Schrödinger all'interno della barriera assume la forma di una funzione esponenziale decrescente, che per definizione non raggiunge mai esattamente zero, esiste perciò sempre una piccola probabilità che la particella oltrepassi la barriera.[20]

dove λ è la lunghezza d'onda, L è la lunghezza dell'area di rilevamento e $n_{eff} = (n_R - n_S) \cdot n_R$ è l'indice di rifrazione effettivo.

Nella configurazione MZI con i bracci simmetrici all'ingresso Y(2-1) e all'uscita Y(1-2), una differenza di fase $\Delta\phi = 0$ tra di essi corrisponde ad un'interferenza costruttiva, fornendo lo stato ON per la modulazione dell'intensità. Al contrario, una differenza di fase di $\Delta\phi = \pi$ tra i due bracci porta a un'interferenza distruttiva senza che la luce venga accoppiata alla guida d'onda di uscita nel diodo rivelatore (stato OFF).

3.5 Simulazione Mach Zehnder come modulatore di intensità

Il comportamento del modulatore di intensità basato su MZI può essere simulato mediante BPM. In questo caso, la direzione di propagazione è l'asse z , il fascio di ingresso è gaussiano e l'indice di rifrazione è variabile.

Nella simulazione proposta si hanno due Beam Splitter che prevedono una divisione del fascio al 50%.

Come già anticipato, le situazioni ON e OFF create in laboratorio da un piezoelettro, vengono qui simulate attraverso la variazione dell'indice di rifrazione (eq.3.3) che simula un cambio di lunghezza dei bracci dell'interferometro. Mostriamo in questo modo come variazioni controllate dell'indice di rifrazione, quindi della differenza di fase tra i due rami, possono manipolare la propagazione dei fasci di luce.

Simuliamo un fascio gaussiano di intensità di picco $I_p = 1AU$, lunghezza d'onda $\lambda = 0.5\mu m$, waist iniziale $w_0 = 15\mu m$ riportato in [Appendice](#).

Iniziamo con l'inserire nel programma una differenza di fase nulla ($\Delta\phi = 0$) tra i due bracci dell'interferometro. Questa abbiamo visto che corrisponde alla situazione in cui i percorsi ottici nei due bracci sono uguali. Questo fa sì che le differenze integrate degli indici di rifrazione lungo i due bracci si annullano e si semplifica il profilo dell'indice di rifrazione nel mezzo, rendendolo più uniforme lungo la direzione di propagazione:

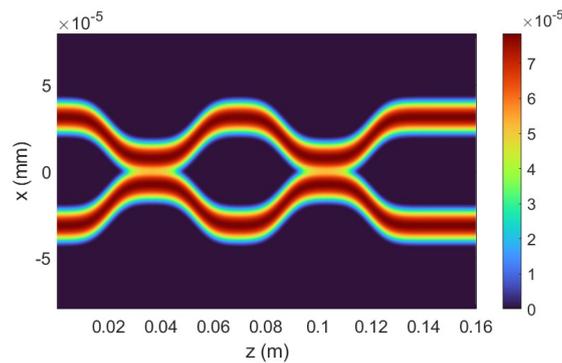


Figura 3.5. Questo grafico rappresenta la distribuzione dell'indice di rifrazione δn nel mezzo nel caso $\Delta\phi = 0$, la colorazione rappresenta i valori dell'indice di rifrazione. Si può notare che è omogenea. L'asse z è lungo la direzione di propagazione, mentre l'asse x è la direzione trasversale

Quello che vedremo in uscita sarà il fascio propagato in avanti, che andrà a finire dunque nell'output in basso (di destra), ovvero nel diodo facendo interferenza costruttiva.

Vediamo nelle seguenti immagini la propagazione del fascio e le sue divisioni nell'interferometro:

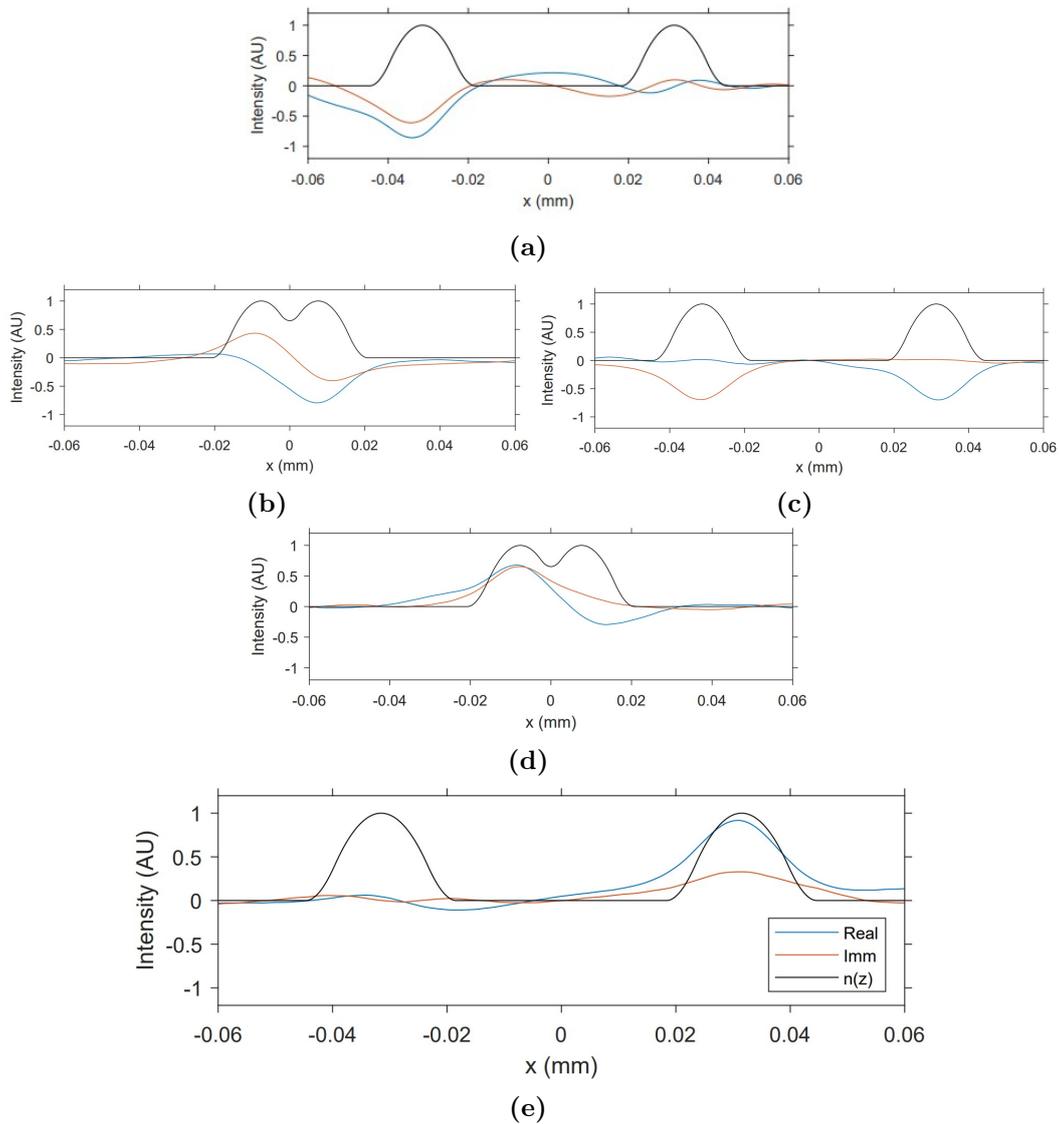


Figura 3.6. Questa sequenza di immagini mostra l'evoluzione del campo elettrico del fascio all'interno dell'interferometro, sia della parte reale (curva blu) che di quella immaginaria (curva rossa), confrontandole con il profilo dell'indice di rifrazione (curva nera), nel caso $\Delta\phi = 0$. Il pannello (e) indica il frame finale dell'evoluzione del fascio, che risulta localizzato a destra.

Il profilo di intensità sarà dunque il seguente, si vede in particolare come il fascio di luce segua il percorso previsto ([Fig:3.7](#)).

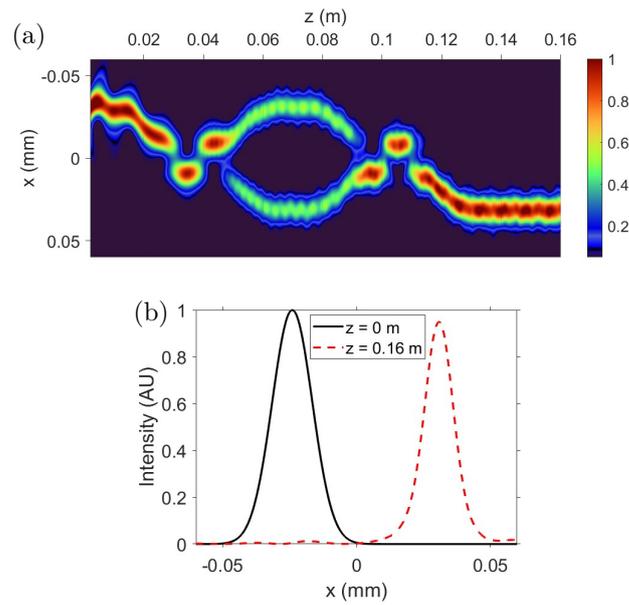


Figura 3.7. Il pannello (a) mostra il grafico 3-D dell'evoluzione dell'intensità del fascio. La colorazione rappresenta la sua intensità in unità arbitrarie. In questa immagine si può vedere chiaramente il percorso del fascio gaussiano similmente alla figura 3.4 ed anche qui, come aspettato, l'uscita è quella dell' output in basso (di destra). Il pannello (b) mostra il confronto dell'intensità iniziale e finale del fascio, rispettivamente per $z = 0m$ e $z = 0.16m$, nel caso $\Delta\phi = 0$.

Andiamo ora ad inserire nel programma la fase opportuna rispetto al nostro sistema fisico, ma con uno sfasamento di π tra le ampiezze dei due campi ($\Delta\phi = \pi$). Si introduce quindi una perturbazione δn sufficiente a generare una differenza di fase di π tra i due bracci dell'interferometro, in modo da provocare un'inversione nella distribuzione dell'intensità del fascio in uscita, rispetto al caso omogeneo. In questo caso abbiamo quindi un indice di rifrazione che varia all'interno del sistema, per essere più precisi al momento della prima divisione nel braccio sensore:

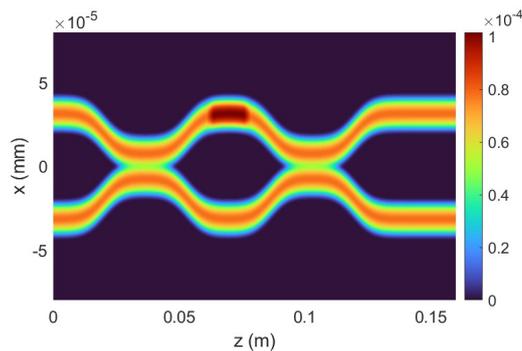


Figura 3.8. Questo grafico mostra la distribuzione dell'indice di rifrazione δn nel mezzo. La colorazione rappresenta i valori dell'indice di rifrazione e possiamo notare come cambi in corrispondenza di uno dei due bracci.

Questa volta il fascio finisce nell'output in alto (di sinistra), che corrisponde al caso in cui torna indietro, facendo interferenza distruttiva sul diodo (Fig:3.9). Infine facciamo vedere il profilo di intensità, che mostra come il fascio di luce segua il percorso previsto (Fig:3.10a-3.10b).

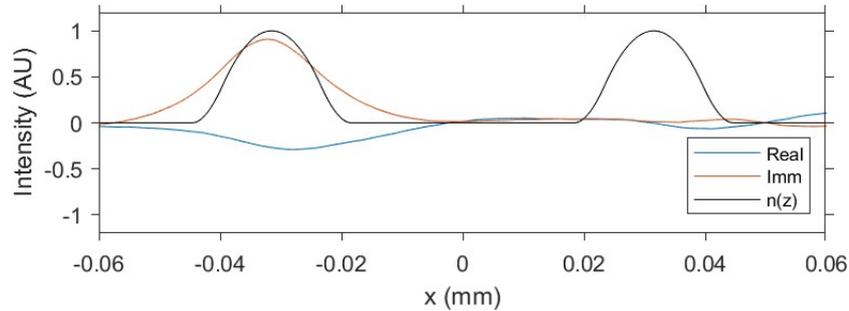


Figura 3.9. Mostra sia della parte reale (curva blu) che di quella immaginaria (curva rossa) del campo, confrontandole con il profilo dell'indice di rifrazione (curva nera), nel caso $\Delta\phi = \pi$. In particolare si tratta della situazione finale dove il fascio è finito totalmente a sinistra.

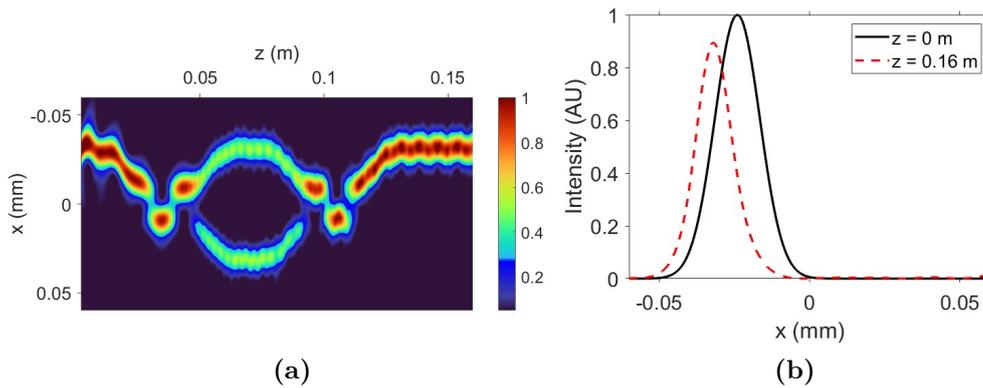


Figura 3.10. La figura (a) mostra il confronto dell'intensità iniziale e finale del fascio, rispettivamente per $z = 0$ e $z = 16$. (b) Grafico 3-D dell'evoluzione dell'intensità del fascio lungo la direzione di propagazione z e la direzione trasversale x . La colorazione rappresenta l'intensità del fascio espressa in unità arbitrarie. In questa immagine si può vedere chiaramente il percorso del fascio gaussiano similmente alla figura 3.4 ed anche qui, come aspettato, l'uscita è quella dell' output in alto (sinistra).

Capitolo 4

Conclusioni

In questa dissertazione sono state analizzate le tecniche necessarie per simulare numericamente la propagazione dei fasci laser in mezzi non omogenei, approfondendo il caso delle guide d'onda.

Dalle equazioni di Maxwell macroscopiche è stata derivata l'equazione di Helmholtz attraverso approssimazioni fisiche che prevedono piccole variazioni dell'indice di rifrazione del mezzo. Successivamente si è ottenuta l'equazione parabolica risolvendo l'equazione di Helmholtz attraverso la Slowly Varying Envelope Approximation. Si è discusso poi il Beam Propagation Method, introducendo la sua versione simmetrizzata per minimizzare gli errori numerici ed è stata simulata la propagazione di un fascio gaussiano in mezzi omogenei nei casi 2+1D e 1+1D, ed i risultati sono stati confrontati con quelli teorici.

Si è poi proseguito passando allo studio di mezzi non omogenei applicando la teoria del BPM a simulazioni relative alla propagazione di fasci gaussiani all'interno di guide ottiche, rappresentate da fibre.

Infine, è stato esaminato il caso dell'interferometro Mach-Zehnder con Beam Splitter in fibra, dimostrando come possa essere utilizzato come modulatore e switch ottico, variando la differenza di fase tra i due bracci mediante la modulazione dell'indice di rifrazione. In particolare sono stati trattati i casi con $\Delta\phi = 0$ e $\Delta\phi = \pi$, esaminando le conseguenze teoriche previste.

Risultano esserci delle modulazioni spaziali del profilo di intensità del fascio che si presume siano introdotte dalla griglia di campionamento. Queste sono state attenuate modificando i parametri della griglia stessa per rendere più stabile il programma, senza andare ad allungare in modo significativo il tempo di esecuzione.

Nell'implementazione del beam splitter notiamo come non risultino esserci dei "residui" significativi nella divisione del fascio, che risulta equamente diviso, costituendo un Beam Splitter valido.

Un modo per ottimizzare il programma dal punto di vista computazionale può consistere nell'implementare un campionamento in z che non sia omogeneo. Infatti si possono effettuare step di propagazione lunghi fintanto che le fibre risultino lontane tra di loro. Quando invece le fibre si avvicinano, e si ha una dinamica del fascio più ricca, può essere utile ricorrere ad un campionamento più fitto, costruendo un BPM che in z ha delle regioni in cui lo step di propagazione dz cambia.

Mentre per ottimizzarlo dal punto di vista fisico si possono usare dei rivestimenti di materiali scelti per diminuire le perdite come nel caso trattato nel seguente articolo [\[21\]](#).

Bibliografia

- [1] M. Spanzani, Beam propagation method applicato alla propagazione della luce in mezzi turbolenti, 2022.
- [2] A. Biswas, M. Srinivasan, K. Andrews, E. Alerstam, A. Velasco, M. Wright, J. Kovalik, B. Douglas, J. Allmaras, V. Van Rhein and others, Deep space optical communications technology demonstration. Free-Space Laser Communications XXXVI, 2024.
- [3] G. Batignani, C. Ferrante, G. Fumero, et al. Femtosecond stimulated Raman spectroscopy. Nat Rev Methods Primers 4 , 2024.
- [4] S. Ebnesajjad, Chapter 4 - Surface and Material Characterization Techniques. Surface Treatment of Materials for Adhesive Bonding (Second Edition), 2014.
- [5] E. Fazio, A. Bile e H. Tari, Optical Soliton Neural Networks. Artificial Intelligence, IntechOpen, 2023.
- [6] G. Marcucci, D. Pierangeli e C. Conti, Theory of Neuromorphic Computing by Waves: Machine Learning by Rogue Waves, Dispersive Shocks, and Solitons. Phys. Rev. Lett. 2020.
- [7] G. R. Fowles, Introduction to modern optics. Courier Corporation, 1989.
- [8] C. Di Stefano, Propagazione in mezzi anisotropi, Calcite. Slideplayer, 2016.
- [9] B. Crosignani, Dispense del corso di ottica. Università dell'Aquila, 1992.
- [10] G. Lifante Pedrola, Beam Propagation Method for Design of Optical Waveguide Devices, 2015.
- [11] G. P. Agrawal, Nonlinear Fiber Optics. Science Direct, 2013.
- [12] E. Del Re , G. Batignani , Introduction to the Beam Propagation Method. Course notes for the Optics and Laboratory. Physics Department of the University of Rome La Sapienza, 2020.
- [13] O. Svelto, D. C. Hanna, et al., Principles of lasers. Springer, 2010.
- [14] C. Calì, Fasci gaussiani. DIEET-UNIPA, 2007.
- [15] V. N. Reinhold, Electrical computer science and engineering series. Dietrich Marcuse Light transmission optics 1982.
- [16] A. Nordio, Le Comunicazioni Ottiche, Fibre Ottiche. Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione, Pisa, 1998-99.

-
- [17] E. Milotti, Introduzione alle fibre ottiche. Corso di Fondamenti Fisici di Tecnologia Moderna 2021-22.
- [18] C. K. Kirkendall and A. Dandridge, Overview of high performance fibre-optic sensing, 2004.
- [19] P. B. Patel, S. T. Hamde, Analysis of the Mach–Zehnder interferometer waveguide structure for refractive index measurement. *J Opt* 46, 2017.
- [20] The Editors of Encyclopaedia, "tunneling". *Encyclopedia Britannica*, 2024.
- [21] Z. Qi, N. Matsuda, K. Itoh, M. Murabayashi, C. R. Lavers, A design for improving the sensitivity of a Mach–Zehnder interferometer to chemical and biological measurands. *Sensors and Actuators B: Chemical*, 2002.

Appendice

Si riportano di seguito i codici MATLAB utilizzati in questo studio:

- [Mezzo omogeneo 2+1D](#)
- [Mezzo omogeneo 1+1D](#)
- [Mezzo non omogeneo Fibra](#)
- [Mezzo non omogeneo Mach-Zehnder](#)

Funzioni utili:

- [heaviside.m](#)
- [fngauss.m](#)
- [fngaussianMode.m](#)
- [FourTrasf.m](#)
- [fwhm.m](#)
- [smooth2a.m](#)