



SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Effetti del confinamento spazio-temporale nella propagazione di impulsi luminosi

Facoltà di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Fisica

Candidato

Luna Tarola

Matricola 2077441

Relatore

Prof. Tullio Scopigno

Correlatore

Prof. Giovanni Batignani

Anno Accademico 2024/2025

Effetti del confinamento spazio-temporale nella propagazione di impulsi luminosi

Tesi di Laurea. Sapienza – Università di Roma

© 2025 **Luna Tarola**. Tutti i diritti riservati

Questa tesi è stata composta con L^AT_EX e la classe Sapthesis.

Email dell'autore: tarola.2077441@studenti.uniroma1.it

*«Vedere un mondo in un granello di sabbia
E un paradiso in un fiore selvatico,
Tenere l'infinito nel palmo della mano
E l'eternità in un'ora.»*

— WILLIAM BLAKE, *Gli auguri dell'innocenza*

Indice

1	Fondamenti teorici: dalle equazioni di Maxwell all'equazione di Helmholtz	1
1.1	Equazioni di Maxwell: dal microscopico al macroscopico	1
1.2	Equazione di Helmholtz	3
2	Effetti del confinamento temporale	5
2.1	Sviluppo al primo ordine: velocità di gruppo	6
2.2	Sviluppo al secondo ordine: dispersione della velocità di gruppo . . .	7
2.3	Soluzione nel caso di impulso gaussiano	8
2.4	Effetti non lineari: effetto Kerr	12
3	Effetti del confinamento spaziale	16
3.1	Equazione parabolica	16
3.2	Approccio spettrale	19
3.2.1	Il teorema di Fourier	19
3.2.2	L'ottica parassiale di Fresnel e di Fraunhofer	20
3.3	Propagazione di un fascio gaussiano	21
3.4	Diffrazione di Fraunhofer da aperture rettangolari	23
4	Propagazione in mezzi a profilo d'indice variabile	26
4.1	Confinamento ottico in guide d'onda	26
4.2	Accoppiamento modale ed effetto tunnel ottico	34
	Appendice – Relazioni utili	42
	Appendice B - Implementazione numerica in MATLAB	43
	Bibliografia	44

Introduzione

Il concetto di dualità spazio-temporale nella localizzazione di impulsi luminosi è stato introdotto nel 1964 da P. Tournois, che per primo notò la corrispondenza matematica tra l'equazione di diffrazione parassiale e l'equazione dispersiva dell'inviluppo. Il contenuto spettrale di un impulso si manifesta nell'interazione con la materia in una struttura spazio-temporale osservabile, in virtù del legame sancito dal teorema di Fourier. La luce, obbedendo a tale struttura matematica, è automaticamente soggetta al Principio di Indeterminazione: la localizzazione nello spazio o nel tempo implica una delocalizzazione nel dominio duale, dunque nel momento k (numero d'onda) o nella frequenza ν . Accanto a tale vincolo fondamentale, si richiama l'analogia formale con l'equazione di Schrödinger, che condivide con le equazioni di propagazione ottica una struttura parabolica, sulla quale si innestano tuttavia effetti ottici non lineari che esulano dalla meccanica quantistica.

Tra gli anni '60 e gli anni '70 le idee di Tournois furono sviluppate, trovando risvolti fenomenologici sperimentali nei lavori pionieristici di S. A. Akhmanov nell'ambito dell'ottica non lineare e dell'ottica ultrarapida. Ulteriori sviluppi portarono ad una trattazione integrata della propagazione, lineare e non, di un impulso ottico - come il *self-focusing* e l'automodulazione di fase - fino ad oggi, in cui lo studio congiunto dei due fenomeni è divenuto centrale in numerosi ambiti applicativi dell'ottica moderna, ad esempio nelle comunicazioni in fibra ottica, nella diagnosi medica e nella spettroscopia ultrarapida.

A tal fine la tesi è strutturata secondo il seguente schema:

Nel **Capitolo 1** si fa brevemente richiamo alle equazioni di Maxwell e alla loro riformulazione in termini di media spazio-temporale nella descrizione di fenomeni complessi di interazione luce-materia. La modellizzazione della risposta macroscopica del materiale darà luogo all'equazione di Helmholtz, punto di partenza del problema generale dell'ottica, da cui si declinano, in funzione del regime spettrale e delle assunzioni effettuate, le diverse descrizioni della propagazione di impulsi ottici.

Nel **Capitolo 2** si affrontano gli effetti del confinamento temporale associati alla propagazione in regime quasi monocromatico, entro cui è possibile agire per via perturbativa. Con l'espansione in serie di Taylor del numero d'onda rispetto alla frequenza al primo e secondo ordine si introducono due nuove grandezze fisiche, rispettivamente la velocità di gruppo e la dispersione della velocità di gruppo. Viene quindi discusso il caso dell'impulso gaussiano, analizzando poi l'effetto della dispersione cromatica nei materiali. Infine, si accenna agli effetti non lineari soffermandosi sull'effetto Kerr.

Nel **Capitolo 3** vengono trattati gli effetti del confinamento spaziale, limitandosi alla propagazione in mezzi isotropi quasi omogenei. In tale contesto si delinea la formulazione locale dell'ottica, che descrive la propagazione in regime parabolico, culminando nell'equazione non lineare di Shrödinger (NLSE). Nel seguito si presenta un approccio alternativo, valido nel caso omogeneo, che, imperniato sul teorema di Fourier, consente di chiarire le ipotesi sottese al modello - in particolare le approssimazioni adottate e la scelta del riferimento - riconducendosi in modo sistematico all'ottica parassiale di Fresnel e, all'interno di quest'ultima, all'ottica di Fraunhofer. A completamento della trattazione teorica, si propongono esempi numerici e applicativi.

Nel **Capitolo 4** viene approfondita la propagazione in mezzi disomogenei a profilo d'indice graduale, analizzando, a titolo esemplificativo, il confinamento ottico in guide a indice parabolico e l'accoppiamento modale per effetto tunnel ottico, supportato da simulazioni numeriche.

A conclusione dell'elaborato, si ricompone il quadro concettuale emerso al fine di mettere a fuoco il parallelismo tra gli effetti del confinamento spaziale e temporale qui anticipato.

Capitolo 1

Fondamenti teorici: dalle equazioni di Maxwell all'equazione di Helmholtz

1.1 Equazioni di Maxwell: dal microscopico al macroscopico

La descrizione locale dei campi è fornita in elettromagnetismo dalle quattro equazioni di Maxwell che, in presenza di cariche e correnti localizzate ρ e $\vec{J}$, sono:

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases}$$

Consideriamo le equazioni di Maxwell dei rotori in una regione in cui $\rho = 0$, $\vec{J} = 0$. Utilizzando la nota relazione vettoriale (.10) ed il Teorema di Schwarz si ottengono le equazioni di d'Alembert:

$$\square \vec{E} = 0 \quad \square \vec{B} = 0,$$

ove l'operatore d'Alembertiano è definito come

$$\square = \left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \quad \text{con} \quad \varepsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}.$$

Indicando con U la generica componente del campo $\vec{E}$ o $\vec{B}$, ed ipotizzando $U = U(z, t)$, le soluzioni sono del tipo

$$U(z, t) = U_0 \cos(kz \pm \omega t + \phi),$$

rappresentante la componente di un'onda armonica che si propaga a velocità c , come si evince sostituendola nell'equazione differenziale. Il segno $\pm$ indica rispettivamente la soluzione contro-propagante e quella propagante. Nello spazio 3D è possibile generalizzare a onde piane:

$$U(\vec{r}, t) = U_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} \pm \omega t + \phi).$$

Nella descrizione di Eulero l'onda armonica si rappresenta come funzione complessa:

$$U(\vec{r}, t) = U_0 e^{i\vec{k} \cdot \vec{r} - i\omega t + i\phi}$$

che, sostituita nelle equazioni di Maxwell, mostra come sono connesse vettorialmente e in ampiezza le varie componenti tra loro:

$$\begin{cases} \vec{k} \cdot \vec{E} = 0 \\ \vec{k} \cdot \vec{B} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} i\vec{k} \wedge \vec{E} = i\omega \vec{B} \\ i\vec{k} \wedge \vec{B} = -i\omega\mu_0\epsilon_0 \vec{E} \end{cases} \Rightarrow \vec{E} = \vec{B} \wedge \vec{v}, \quad \frac{|\vec{E}|}{|\vec{B}|} = v,$$

dove v è la velocità di propagazione dell'onda. Ora spostiamoci all'interno di un materiale e supponiamo di essere a distanza tale dalle sorgenti del campo elettromagnetico che macroscopicamente risulti $\rho = 0$, $\vec{J} = 0$. Essendo l'interazione con la materia in generale complessa, consistente in una serie di processi elementari di riflessione, rifrazione, diffrazione e dispersione, ciascuno avente luogo nella singola struttura di disomogeneità che costituisce il materiale, occorre mettere in atto una procedura di media spaziale e temporale da cui estrarre un modello macroscopico che descriva il mezzo in termini di grandezze *accessibili*. Quest'ultime sono le medie dei campi su opportune regioni spaziali $V = (L)^3$ e intervalli temporali T , più piccoli della scala del campo osservato in modo da non mediarne via l'oscillazione stessa, ma molto più grandi rispetto alla scala atomica. Si avrà quindi

$$\langle \vec{E} \rangle = \frac{1}{VT} \int_V d\vec{r} \int_0^T dt' \vec{E}(\vec{r}, t').$$

È importante osservare che tale procedura non è da intendersi come mera astrazione matematica: se le microstrutture del materiale sono al di sotto della scala ottica della radiazione, la luce stessa ne percepisce le proprietà medie. Questa giustificazione fisica fornisce i limiti di validità delle equazioni di Maxwell macroscopiche:

$$a \ll L \ll \lambda, \quad \tau \ll T \ll \frac{1}{\nu},$$

dove $a \sim 10^{-10}$ m è il diametro atomico e $\tau \sim 10^{-16}$ s è il tempo caratteristico di risposta del materiale. Per la luce visibile, $\lambda \approx 500$ nm, $1/\nu \approx 2$ fs.

Nell'operazione di media si introducono nuove grandezze legate tra loro dalle relazioni costitutive

$$\begin{cases} \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \\ \vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) \end{cases} \quad (1.1)$$

ove si definiscono rispettivamente polarizzazione e magnetizzazione gli oggetti macroscopici $\vec{P}$ e $\vec{M}$. Considereremo qui e nel seguito materiali in cui $\vec{M} = 0$.

Il modello fenomenologico più semplice per $\vec{P}$, che inglobi il principio di causalità e la memoria di un materiale dispersivo, è quello di risposta lineare:

$$\vec{P} = \epsilon_0 \int_{-\infty}^t dt' \chi(\vec{r}, t - t') \vec{E}(\vec{r}, t'), \quad (1.2)$$

ove si è assunta la località nello spazio. La relazione appena introdotta è valida per mezzi isotropi, che saranno il focus della tesi. Nel caso più generale di materiali anisotropi, la funzione scalare $\chi(\vec{r}, t-t')$ è sostituita da una risposta di tipo tensoriale $\overleftrightarrow{\chi}(\vec{r}, t)$. Pertanto non si avrà in generale $\vec{P} \parallel \vec{E}$.

Si riportano a seguire le equazioni di Maxwell macroscopiche nella materia con $\rho = 0$, $\vec{J} = 0$, per ciascuna componente monocromatica $\vec{E} = \vec{E}_\omega(\vec{r})e^{-i\omega t}$, $\vec{H} = \vec{H}_\omega(\vec{r})e^{-i\omega t}$, $\vec{D} = \vec{D}_\omega(\vec{r})e^{-i\omega t}$, in approssimazione lineare e isotropa:

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{D}_\omega = 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{H}_\omega = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \vec{\nabla} \wedge \vec{E}_\omega = i\omega\mu_0\vec{H}_\omega \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{H}_\omega = -i\omega\vec{D}_\omega = -i\omega(\varepsilon_0\vec{E}_\omega + \vec{P}_\omega) \end{cases} \quad (1.3)$$

ove l'isotropia implica $\vec{D}_\omega \parallel \vec{E}_\omega$, mentre l'ipotesi di linearità assicura che i campi macroscopici oscillino con stessa frequenza ω .

1.2 Equazione di Helmholtz

Consideriamo le equazioni di Maxwell (1.3) per le componenti monocromatiche dei campi macroscopici in approssimazione lineare e isotropa. Sotto tali condizioni, la polarizzazione è descritta dall'integrale di convoluzione (1.2). Effettuando la trasformata di Fourier, è possibile valutare la $\vec{P}_\omega(\vec{r})$ nel dominio coniugato:

$$\vec{P}_\omega(\vec{r}) = \varepsilon_0\chi_\omega(\vec{r})\vec{E}_\omega(\vec{r}) \quad \text{con} \quad \chi_\omega(\vec{r}) = \int_0^\infty dt e^{i\omega t}\chi(\vec{r}, t), \quad (1.4)$$

dove $\chi_\omega(\vec{r})$ è un campo scalare in generale complesso, la cui parte immaginaria è responsabile dell'assorbimento. Sostituendo nell'espressione di $\vec{D}_\omega$ si trova

$$\vec{D}_\omega = \varepsilon_0\vec{E}_\omega(1 + \chi_\omega(\vec{r})),$$

da cui definiamo $\varepsilon(\omega, \vec{r}) \equiv \varepsilon_0\varepsilon_r(\omega, \vec{r})$ con $\varepsilon_r(\omega, \vec{r}) \equiv 1 + \chi_\omega(\vec{r})$.

Facendo uso della (1.10) sulla terza equazione di Maxwell, e combinando con la quarta, ricaviamo

$$\nabla^2 \vec{E}_\omega + 2\nabla \left(\vec{E}_\omega \cdot \nabla \ln n(\omega, \vec{r}) \right) + k_0^2 n^2(\omega, \vec{r}) \vec{E}_\omega = 0, \quad (1.5)$$

dove sono stati definiti l'indice di rifrazione $n(\omega, \vec{r}) \equiv \sqrt{\frac{\varepsilon(\omega, \vec{r})}{\varepsilon_0}}$ e $k_0 \equiv \frac{\omega}{c}$. Questa relazione è detta equazione di Helmholtz (HE). Effettuiamo ora un'analisi di scala: il primo ed il terzo termine scalano come E/λ^2 , mentre il secondo termine, supponendo che nell'operazione di derivazione emerga la scala spaziale della disomogeneità l_n , è dell'ordine $(E/\lambda)(\Delta n/n)(1/l_n) + E(\Delta n/n)(1/l_n)^2$, dove $\Delta n/n$ definisce la scala caratteristica di modulazione di n . Abbiamo dunque due parametri perturbativi, tali per cui se $\Delta n/n \ll 1$ o se $l_n \gg \lambda$, allora il secondo termine, responsabile dell'accoppiamento delle diverse polarizzazioni, risulta trascurabile. L'equazione di Helmholtz si semplifica allora in tre equazioni scalari disaccoppiate nelle singole componenti:

$$\nabla^2 \vec{E}_\omega + k_0^2 n^2(\omega, \vec{r}) \vec{E}_\omega = 0 \quad (1.6)$$

dove nel caso limite di mezzo omogeneo $n(\omega, \vec{r}) = n(\omega)$, mentre in caso di dipendenza spaziale debole rispetto a quanto rapidamente varia il campo, si è soliti introdurre una correzione a n^2 al primo ordine in $\delta n(\vec{r})$, come vedremo nel capitolo 3. Per quanto concerne la dipendenza da ω , un campo generico sarà sovrapposizione di più componenti a diverse frequenze, per cui il problema andrà risolto separatamente per ciascuna componente monocromatica, per poi sommarle tramite la trasformata di Fourier. Tuttavia, in regime di quasi monocromaticità, vedremo nel capitolo 2 che sarà possibile utilizzare la (1.6) espandendo l'indice di rifrazione nella frequenza.

Capitolo 2

Effetti del confinamento temporale

Come discusso in 1.2, affinché l'indice di rifrazione $n(\omega, \vec{r})$ risulti ben definito, l'HE deve essere risolta individualmente per ciascuna componente monocromatica del campo considerato. Un'onda monocromatica, caratterizzata da uno spettro in frequenza $\delta(\omega - \omega_0)$ concentrato sulla frequenza portante ω_0 , è completamente delocalizzata nel tempo. Un tale segnale è fisicamente impossibile da generare. Per affrontare casi più realistici si considera quindi un'onda *quasi* monocromatica; al fine di focalizzarci sull'evoluzione del profilo spettrale/temporale del campo, in questo capitolo considereremo un'onda piana con direzione di propagazione lungo z . Il campo elettrico può essere scritto come

$$E(z, t) = F(z, t)e^{-i\omega_0 t} \quad (2.1)$$

dove il termine esponenziale descrive l'oscillazione rapida alla frequenza portante, mentre $F(z, t)$ descrive l'evoluzione temporale dell'involuppo, dipendente dalla variabile di propagazione z (onda piana). Tramite la trasformata di Fourier della (2.1), è possibile passare al campo nel dominio spettrale $\tilde{E}(z, \omega)$:

$$\tilde{E}(z, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt F(z, t)e^{i(\omega - \omega_0)t} = \tilde{F}(z, \Omega),$$

dove $\Omega \equiv \omega - \omega_0 \ll \omega_0$ è il *detuning* dell'involuppo rispetto alla portante, che equivale ad una traslazione dello spettro dell'involuppo di ω_0 . Consideriamo l'HE (1.6) nel caso propagante in avanti per un campo polarizzato linearmente $\vec{E}(z, t) = E_x(z, t)\hat{x}$. Nel dominio delle frequenze:

$$\frac{\partial}{\partial z} \tilde{E}_x = i\beta(\omega) \tilde{E}_x \quad \text{con} \quad \beta(\omega) = k_0 n(\omega), \quad (2.2)$$

ove prendiamo $\beta(\omega)$ reale (in seguito discuteremo come trattare separatamente l'eventuale presenza di un contributo immaginario). Assumiamo per la (2.2) una soluzione di prova quasi monocromatica centrata in ω_0 :

$$\tilde{E}_x(z, \omega) = \tilde{F}(z, \Omega) = \tilde{A}(z, \Omega)e^{i\beta(\omega_0)z},$$

dove $A(z, t)$ è l'involuppo complesso lentamente variabile nel tempo e nello spazio (*Slow Varying Envelope Approximation*, SVEA). Sviluppando $\beta(\omega)$ in serie di Taylor attorno a ω_0 fino al secondo ordine

$$\beta(\omega) \simeq \beta(\omega_0) + \left. \frac{d\beta}{d\omega} \right|_{\omega_0} (\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2\beta}{d\omega^2} \right|_{\omega_0} (\omega - \omega_0)^2, \quad (2.3)$$

dove definiamo

$$\beta_1 \equiv \left. \frac{d\beta}{d\omega} \right|_{\omega_0}, \quad \beta_2 \equiv \left. \frac{d^2\beta}{d\omega^2} \right|_{\omega_0}$$

e sostituendo l'*ansatz* nella (2.2), si ottiene

$$\frac{\partial \tilde{A}}{\partial z} = i \left[\beta_1 (\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} \beta_2 (\omega - \omega_0)^2 \right] \tilde{A}.$$

È adesso possibile reintrodurre la presenza di termini immaginari in β . Ad esempio nel caso in cui $\text{Im}(\beta) = \alpha/2$ indipendente da ω , si ricava l'equazione di propagazione dell'involuppo:

$$\frac{\partial \tilde{A}}{\partial z} = i \left[\beta_1 \Omega + \frac{1}{2} \beta_2 \Omega^2 + i \frac{\alpha}{2} \right] \tilde{A} \quad (2.4)$$

da cui, tornando nel dominio del tempo, si ha

$$\frac{\partial A}{\partial z} = -\beta_1 \frac{\partial A}{\partial t} - \frac{i}{2} \beta_2 \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - \frac{\alpha}{2} A. \quad (2.5)$$

La dipendenza di $n(\omega)$ dalla frequenza accoppia le coordinate spaziali e temporali attraverso la propagazione, rendendo distinguibili le componenti spettrali sia nello spazio che nel tempo. In particolare, la parte reale di $n(\omega)$ induce, come descritto dalla legge di Snell, deviazioni angolari differenti delle componenti a diversa frequenza generando dispersione cromatica; in tempo, come discuteremo in dettaglio nelle prossime sezioni, la diversa velocità di propagazione delle componenti altera la forma temporale dell'impulso.

2.1 Sviluppo al primo ordine: velocità di gruppo

Studiamo l'effetto di β_1 ponendo $\beta_2 = 0$, per cui l'equazione di propagazione (2.5) si riduce a

$$\frac{\partial A}{\partial z} = -\beta_1 \frac{\partial A}{\partial t} - \frac{\alpha}{2} A. \quad (2.6)$$

La costante di attenuazione α introduce un decadimento esponenziale dell'ampiezza, che può essere isolato esprimendo l'involuppo come

$$A(z, t) = \sqrt{I_0} a(z, t) e^{-\frac{\alpha}{2} z} \quad (2.7)$$

che, sostituito nella (2.6), restituisce un'equazione di trasporto per l'involuppo normalizzato e privo di attenuazione $a(z, t)$:

$$\frac{\partial a(z, t)}{\partial z} + \beta_1 \frac{\partial a(z, t)}{\partial t} = 0, \quad (2.8)$$

dove β_1 risulta direttamente legato alla traslazione temporale lungo z dell'involuppo. Nel dominio della frequenza, dove l'equazione è più agevolmente risolvibile, si ha

$$\frac{\partial \tilde{a}(z, \Omega)}{\partial z} - i\Omega\beta_1 \tilde{a}(z, \Omega) = 0, \quad (2.9)$$

dove Ω è la variabile naturale per l'involuppo. La soluzione è data da

$$\tilde{a}(z, \Omega) = \tilde{a}(z=0, \Omega)e^{i\Omega\beta_1 z} = \mathcal{F}_t[a(z, t)]. \quad (2.10)$$

Per costruzione

$$\beta_1 = \left. \frac{d\beta}{d\omega} \right|_{\omega_0} = \left. \frac{d}{d\omega} \left(\frac{\omega}{c} n(\omega) \right) \right|_{\omega_0} = \frac{n(\omega_0)}{c} + \frac{\omega_0}{c} \left. \frac{dn}{d\omega} \right|_{\omega_0} = \frac{1}{v} + \frac{\omega_0}{c} \left. \frac{dn}{d\omega} \right|_{\omega_0} \equiv \frac{n_g(\omega_0)}{c},$$

dove n_g rappresenta l'indice di rifrazione di gruppo. Fisicamente, si identifica la velocità di gruppo con

$$v_g(\omega) \equiv \frac{v}{1 + \frac{\omega}{n} \frac{dn}{d\omega}},$$

dove v è la velocità di fase. Per un impulso costituito da più componenti cromatiche con frequenze comprese entro $d\omega$, v_g differisce da v per il termine $dn/d\omega$ al denominatore, nullo in condizioni di propagazione nel vuoto o in un mezzo in cui $n(\omega) \simeq n$. Nello sviluppo al primo ordine, la dinamica consiste quindi in una traslazione con $v_g(\omega_0)$.

2.2 Sviluppo al secondo ordine: dispersione della velocità di gruppo

Studiamo ora il ruolo di β_2 nello sviluppo al secondo ordine perturbativo dell'HE. Dalla definizione

$$\beta_2 = \left. \frac{d^2\beta}{d\omega^2} \right|_{\omega_0} = \left. \frac{d}{d\omega} \left(\frac{1}{v_g} \right) \right|_{\omega_0}$$

si evince che β_2 quantifica la variazione di v_g con la frequenza ω , descrivendo quindi la dispersione della velocità di gruppo (GVD). Un mezzo non dispersivo è caratterizzato da $\beta_2 = 0$, mentre $\beta_2 \neq 0$ indica che le diverse componenti spettrali viaggiano con diversa velocità di gruppo, con conseguente allargamento temporale dell'involuppo. Il segno di β_2 discerne il regime dispersivo:

- per $\beta_2 > 0 \Rightarrow 1/v_g \nearrow \quad v_g \searrow$: dispersione normale, in cui le componenti a frequenza maggiore viaggiano più lentamente rispetto a quelle a bassa frequenza;
- per $\beta_2 < 0 \Rightarrow 1/v_g \searrow \quad v_g \nearrow$: dispersione anomala, in cui le componenti ad alta frequenza si propagano più velocemente.

Sostituiamo stavolta la soluzione di prova (2.7) nell'equazione di propagazione completa (2.5):

$$\frac{\partial a}{\partial z} + \beta_1 \frac{\partial a}{\partial t} + i\beta_2 \frac{\partial^2 a}{\partial t^2} = 0.$$

Al fine di isolare l'effetto GVD, passiamo al sistema di riferimento solidale con l'impulso effettuando la seguente trasformazione di coordinate:

$$\begin{cases} T = t - \beta_1 z \\ Z = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial z} \frac{\partial}{\partial Z} + \frac{\partial T}{\partial z} \frac{\partial}{\partial T} = \frac{\partial}{\partial Z} - \beta_1 \frac{\partial}{\partial T} \\ \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial Z}{\partial t} \frac{\partial}{\partial Z} + \frac{\partial T}{\partial t} \frac{\partial}{\partial T} = \frac{\partial}{\partial T} \end{cases} \quad (2.11)$$

L'equazione può essere riscritta come

$$\frac{\partial a(Z, T)}{\partial Z} + \frac{i}{2} \beta_2 \frac{\partial^2 a(Z, T)}{\partial T^2} = 0$$

che nel dominio della frequenza si traduce in

$$\frac{\partial \tilde{a}(z, \Omega)}{\partial Z} - \frac{i}{2} \beta_2 \Omega^2 \tilde{a}(z, \Omega) = 0.$$

La soluzione è del tipo

$$\tilde{a}(z, \Omega) = \tilde{a}(z=0, \Omega) e^{i \frac{\beta_2}{2} \Omega^2 z} = \mathcal{F}_T[a(z, T)], \quad (2.12)$$

la cui antitrasformata rispetto a T fornisce la soluzione nel dominio del tempo nel riferimento dell'involuppo.

2.3 Soluzione nel caso di impulso gaussiano

Consideriamo il caso di un involuppo all'ingresso del mezzo con profilo temporale gaussiano

$$a(z=0, t) = e^{-\frac{t^2}{2t_0^2}},$$

dove t_0 è la larghezza temporale dell'involuppo. Applicando la trasformata di Fourier si ottiene il seguente integrale

$$\tilde{a}(z=0, \Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{i\Omega t} a(z=0, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{-\left(\frac{t^2}{2t_0^2} - i\Omega t\right)}$$

che può essere risolto effettuando il completamento del quadrato all'esponente:

$$-\left(\frac{t^2}{2t_0^2} - i\Omega t\right) = -\frac{1}{2t_0^2} (t^2 - 2i\Omega t_0^2 t) = -\frac{1}{2t_0^2} (t - i\Omega t_0^2)^2 - \frac{\Omega^2 t_0^4}{2t_0^2}.$$

Ciò consente di ricondurre formalmente il calcolo all'integrale gaussiano (.9), da cui si ottiene

$$\tilde{a}(0, \Omega) = \sqrt{2\pi t_0^2} e^{-\frac{t_0^2 \Omega^2}{2}}, \quad (2.13)$$

ossia ancora una gaussiana, con varianza spettrale pari a $1/t_0^2$.

Studiamo *in primis* la soluzione dell'HE al primo ordine perturbativo, che nel dominio della frequenza è data da

$$\tilde{a}(z, \Omega) = \sqrt{2\pi t_0^2} e^{-\frac{t_0^2 \Omega^2}{2}} e^{i\Omega \beta_1 z},$$

ottenuta sostituendo la (2.13) nella (2.10). Antitrasformando per ricavare la soluzione nel dominio del tempo:

$$a(z, t) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{2\pi t_0^2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\Omega e^{-\left(\frac{t_0^2 \Omega^2}{2} - i\Omega(t - \beta_1 z)\right)} = e^{-\frac{(t - \beta_1 z)^2}{2t_0^2}}.$$

La propagazione di un impulso gaussiano in un mezzo non dispersivo ($\beta_2 = 0$) può essere dunque descritta come una semplice traslazione rigida nel punto z con velocità $v_g = 1/\beta_1$.

Risolviamo ora l'equazione completa di propagazione dell'involuppo iniziale gaussiano che riscriviamo con il cambio di coordinate in (2.11) come

$$a(z = 0, T) = e^{-\frac{T^2}{2T_0^2}},$$

che nello spazio trasformato è data da

$$\tilde{a}(z = 0, \Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} dT e^{i\Omega T} a(0, T) = \int_{-\infty}^{+\infty} dT e^{-\left(\frac{T^2}{2T_0^2} - i\Omega T\right)} = \sqrt{2\pi} T_0 e^{-\frac{\Omega^2 T_0^2}{2}}.$$

ossia una gaussiana con larghezza spettrale $\Delta\Omega = 1/T_0$. Essendo $\Delta\Omega\Delta T = 1$, segue che l'involuppo iniziale, a fase nulla, è *transform limited*, ossia ha durata minima consentita dal principio di indeterminazione di Fourier. Inserendola nella (2.12), si ottiene la soluzione completa

$$\tilde{a}(z, \Omega) = \sqrt{2\pi} T_0 e^{-\frac{\Omega^2 T_0^2}{2}} e^{i\frac{\beta_2}{2} z \Omega^2}, \quad (2.14)$$

ove la fase spettrale accumulata nella propagazione per effetto della GVD non ha alcun impatto sullo spettro di densità di potenza, essendo questo reale:

$$\tilde{P}(z, \Omega) \propto |\tilde{a}(z, \Omega)|^2 = |\tilde{a}(0, \Omega)|^2.$$

Di conseguenza, la larghezza spettrale dell'impulso rimane costante nella propagazione. Al contrario, nel dominio del tempo la soluzione, ricavabile antitrasformando la (2.14) rispetto a T , è data da

$$a(z, T) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2\pi} T_0 \int_{-\infty}^{+\infty} d\Omega e^{-i\Omega T} e^{-\left(\frac{T_0^2}{2} - i\frac{\beta_2}{2} z\right) \Omega^2} = \frac{T_0}{T_1(z)} e^{-\frac{T^2}{2T_1^2(z)}}, \quad (2.15)$$

dove $T_1(z)$ è una quantità complessa che evolve lungo z secondo

$$T_1(z) \equiv \sqrt{T_0^2 - i\beta_2 z} = T_0 \sqrt{1 - i\frac{\beta_2 z}{T_0^2}}.$$

Agendo sull'esponente, separiamo modulo e fase in modo da analizzare distintamente l'allargamento temporale dell'involuppo e la dipendenza temporale del termine di fase quadratica (*chirping*) indotti dalla GVD:

$$\frac{T^2}{2(T_0^2 - i\beta_2 z)} = \frac{T^2}{2(T_0^2 - i\beta_2 z)} \frac{(T_0^2 + i\beta_2 z)}{(T_0^2 + i\beta_2 z)} = \frac{T^2}{2T_0^2 \left(1 + \frac{\beta_2^2 z^2}{T_0^4}\right)} + i \frac{\beta_2 z T^2}{2T_0^4 \left(1 + \frac{\beta_2^2 z^2}{T_0^4}\right)},$$

dove identifichiamo rispettivamente nella parte reale e immaginaria

- la larghezza temporale $T_{1R} \equiv T_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{L_D}\right)^2}$ con $L_D \equiv \frac{T_0^2}{|\beta_2|}$: il parametro L_D rappresenta la lunghezza di dispersione, ossia la distanza alla quale la durata temporale dell'impulso, non più *transform limited*, si è ampliata di un fattore $\sqrt{2}$ rispetto alla larghezza iniziale;
- la fase $\phi = -\frac{\beta_2 z T^2}{2T_0^2 T_{1R}^2}$: comporta una variazione monotona in T della frequenza istantanea del campo $\omega_{ist} = \frac{\partial}{\partial T} (\omega_0 - \phi)$, ossia un *chirp* pari a $\delta\omega = \omega_{ist} - \omega_0 = -\frac{\partial\phi}{\partial T} = \frac{\beta_2 z T}{(T_0^4 + \beta_2^2 z^2)}$. Questo effetto si manifesta come una riorganizzazione delle componenti spettrali, distribuite uniformemente in $z = 0$, in due regioni distinte dell'involuppo *chirped*: il *leading edge*, corrispondente alla parte iniziale dell'impulso, popolata dalle frequenze più veloci, e il *trailing edge*, ossia la coda dell'impulso occupata dalle frequenze più lente.

A differenza della larghezza, la fase temporale è sensibile al segno di β_2 e quindi al regime di dispersione, che ne determina l'ordinamento delle frequenze nelle due regioni dell'impulso.

L'involuppo (2.15) si riscrive in definitiva come

$$a(z, T) = \frac{T_0}{T_1(z)} e^{-\frac{T^2}{2T_{1R}^2}} e^{i\phi}.$$

Si effettua una simulazione di propagazione di un fascio gaussiano, *transform limited*, di lunghezza d'onda $\lambda_0 = 564$ nm (corrispondente a $\nu_0 = 5.31 \cdot 10^{14}$ Hz) e larghezza spettrale (FWHM) $\Delta\nu_0 = 2.32$ Hz, attraverso 2 mm di *fused silica*, con $n(\lambda_0) = 1.459$, $n_g = 1.482$, $\beta_1 = 4943$ fs/mm, $\beta_2 = 61$ fs²/mm, da cui $L_D = 0.77$ mm. Come illustrato in figura 2.1, per $\beta_2 > 0$, ossia in dispersione normale, la *leading edge* risulta dominata dal rosso.

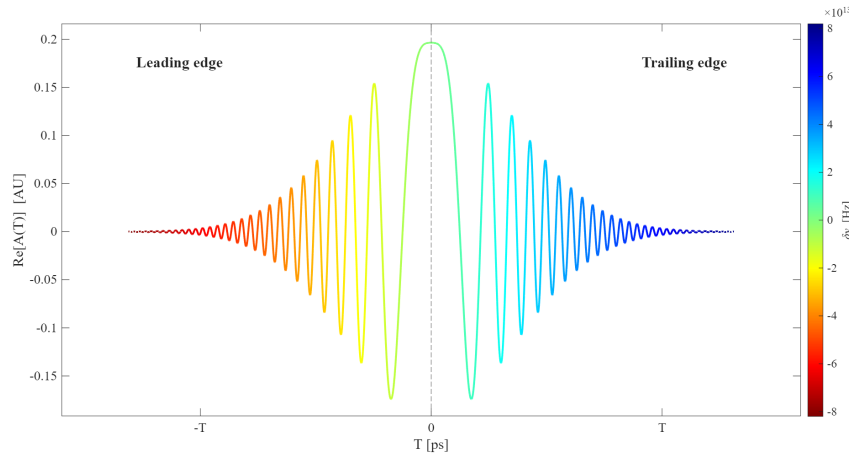
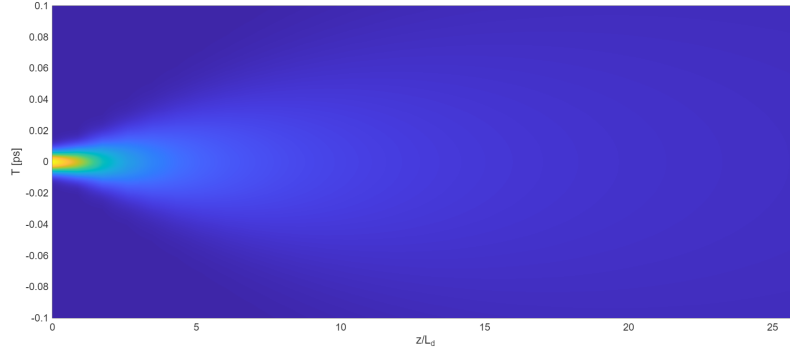
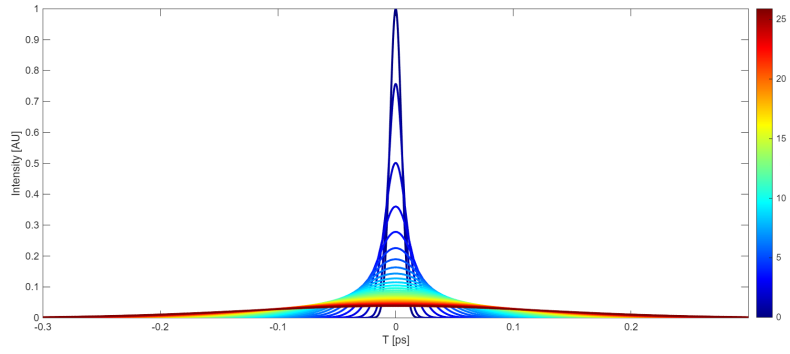


Figura 2.1. Parte reale $A(T)$ in $z = 0.02$ mm. Il colore codifica il *detuning* $\delta\nu$ delle componenti spettrali d'origine (GVD). In dispersione normale ($\beta_2 > 0$) il *leading edge* ($T < 0$) è *red-shifted* ($\delta\nu < 0$) e il *trailing edge* ($T > 0$) *blue-shifted* ($\delta\nu > 0$).

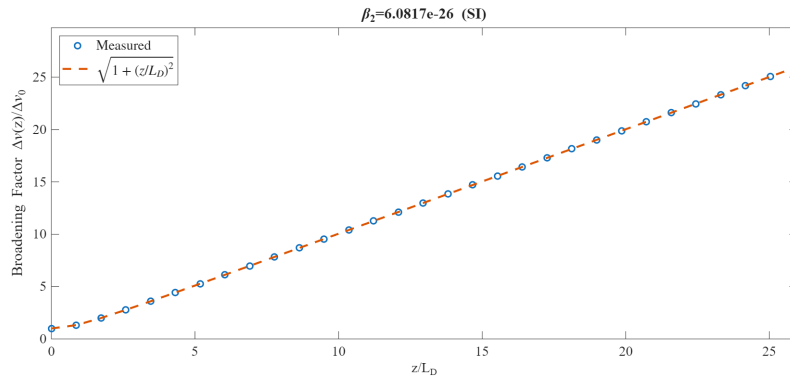
Si riportano in figura 2.2 i grafici risultanti dalla simulazione numerica nel caso $\alpha = 0$. Essendo $\beta_2 > 0$, la fase temporale ϕ è una parabola con concavità rivolta verso il basso. L'intensità temporale mantiene il profilo gaussiano e si allarga linearmente in z fino a raggiungere $\Delta\nu(z = 0.002 \text{ m}) \simeq 20\Delta\nu_0$, mentre lo spettro rimane invariato.



(a) Mappa T - z/L_D dell'intensità.



(b) Allargamento temporale per GVD: profili $|A(z, T)|^2$ a diversi z , con colore $\propto z/L_D$.



(c) Fattore di allargamento dispersivo calcolato numericamente a confronto con la previsione analitica.

Figura 2.2. Evoluzione dispersiva di un impulso gaussiano *transform-limited* attraverso uno spessore di 2 mm di *fused silica*, in assenza di attenuazione ($\alpha = 0$).

2.4 Effetti non lineari: effetto Kerr

Un modello più completo della (1.4) per la polarizzazione indotta, che includa eventuali non linearità del mezzo, richiede lo sviluppo in potenze crescenti del campo elettrico $\vec{E}$. Trascurando gli effetti non lineari dovuti ai termini oltre il terzo ordine, e considerando la risposta istantanea, si ha

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \left(\chi^{(1)} \vec{E} + \chi^{(2)} \vec{E}^2 + \chi^{(3)} \vec{E}^3 \right).$$

In un materiale isotropo centro-simmetrico, il termine non lineare al secondo ordine è nullo, pertanto gli effetti non lineari sono governati dal termine di terzo ordine:

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \left(\chi^{(1)} \vec{E} + \chi^{(3)} I \vec{E} \right).$$

L'indice di rifrazione in materiali di questo tipo è descritto dalla relazione:

$$n = n_0(\omega) + n_2 I = n_0(\omega) + \Delta n_{nl}(I),$$

dove l'indice non lineare, dipendente dall'intensità ottica, è definito come

$$\Delta n_{nl}(I) \equiv n_2 I \quad \text{con} \quad n_2 \sim 10^{-22} \text{m}^2/\text{W}.$$

Includendo il contributo non lineare, l'espressione di $\beta(\omega)$ si estende a

$$\beta_{eff}(\omega, |A|) = \frac{\omega}{c} (n_0 + n_2 I),$$

dove si identifica la parte non lineare, dipendente da I , nella seguente espressione:

$$\beta_{nl} = \frac{\omega_0}{c} n_2 I = \gamma |A|^2 \quad \text{con} \quad \gamma \equiv \frac{\omega_0}{c} n_2.$$

Sviluppando la parte lineare rispetto a ω come in (2.3), e includendo il contributo non lineare, l'equazione di propagazione (2.5) si generalizza in

$$\frac{\partial \tilde{A}}{\partial z} = i \left[\beta_1(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} \beta_2(\omega - \omega_0)^2 + i \frac{\alpha}{2} \right] \tilde{A} + i \gamma |\tilde{A}|^2 \tilde{A}. \quad (2.16)$$

Nel dominio del tempo, assumendo $\beta_2 = 0$ e passando al sistema di riferimento dell'involuppo tramite la trasformazione (2.11), l'equazione assume la forma

$$\frac{\partial A}{\partial z} - i \gamma |A|^2 A + \frac{\alpha}{2} A = 0.$$

Sostituendo nell'equazione una soluzione di prova che inglobi normalizzazione e perdite e che separi modulo e fase, del tipo

$$A(z, T) = \sqrt{I_0} a(z, T) e^{-\frac{\alpha}{2} z} = \sqrt{I_0} U(z, T) e^{i\phi(z, T)} e^{-\frac{\alpha}{2} z},$$

si ottiene

$$\frac{\partial U}{\partial z} + i U \frac{\partial \phi}{\partial z} - i \gamma I_0 |U(z, T)|^2 U e^{-\alpha z} = 0$$

da cui, eguagliando parte reale e immaginaria, risulta

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial z} = 0 & \Rightarrow U(z, T) = U(z = 0, T) \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} = I_0 \gamma |U(z, T)|^2 e^{-\alpha z} \end{cases}$$

Essendo $|U(z, T)| = |U(T)|$, integrando la seconda equazione rispetto a z con $\phi(z = 0) = 0$ si ottiene

$$\phi(z, T) = I_0 \gamma |U(T)|^2 \frac{(1 - e^{-\alpha z})}{\alpha},$$

dove definiamo rispettivamente la lunghezza non lineare e la lunghezza efficace come

$$L_{nl} \equiv \frac{1}{\gamma I_0} \quad , \quad L_{eff} \equiv \frac{(1 - e^{-\alpha z})}{\alpha}.$$

Segue l'espressione della fase non lineare:

$$\phi_{nl}(z, T) = |U(0, T)|^2 \frac{L_{eff}}{L_{nl}}$$

che, in assenza di perdite ($\alpha = 0$), quando $L_{eff} \sim z$, si riduce a

$$\phi_{nl}(z, T) = |U(0, T)|^2 \frac{z}{L_{nl}}.$$

La quantità L_{nl} rappresenta quindi la lunghezza caratteristica che quantifica l'importanza dell'effetto Kerr nel mezzo considerato.

L'involuppo

$$a(z, T) = U(0, T) e^{i\phi_{nl}(z, T)}$$

mantiene invariata la propria forma, risultando tuttavia modulato in frequenza, con sfasamento massimo in corrispondenza del massimo di $U(z, T) = U(0, T)$.

Lo studio della propagazione nel dominio della frequenza può essere condotto solo sperimentalmente o numericamente mediante lo *Split-Step Fourier Method* (SSFM) [1]. Tale metodo consiste nella fattorizzazione dell'operatore di propagazione in due contributi approssimativamente indipendenti nella propagazione da z a $z + dz$: il contributo lineare, che tiene conto delle eventuali perdite nel mezzo, implementato, nel riferimento dell'involuppo, dall'operatore differenziale

$$\hat{D} = -\frac{i}{2} \beta_2 \frac{\partial^2}{\partial T^2} - \frac{\alpha}{2}$$

ed il contributo non lineare, implementato dall'operatore

$$\hat{N} = i\gamma |A|^2. \quad (2.17)$$

L'equazione di propagazione si riscriverà come

$$\partial_z A = (\hat{D} + \hat{N}) A. \quad (2.18)$$

Segue che, noto lo spettro spaziale in z , la soluzione al passo $z + dz$ sarà data da

$$A(z + dz, T) = e^{(\hat{D} + \hat{N})dz} A(z, T), \quad (2.19)$$

in cui l'operatore esponenziato, impiegando la formula di Baker-Campbell-Hausdorff (.11) con $\hat{X} = \mathcal{D}dz$ e $\hat{Y} = \hat{\mathcal{N}}dz$, si spezza nel prodotto di esponenziali

$$e^{(\hat{\mathcal{D}}+\hat{\mathcal{N}})dz} = e^{\hat{\mathcal{D}}dz} e^{\hat{\mathcal{N}}dz} + o(dz^2), \quad (2.20)$$

ove si trascurano, per dz piccolo, le correzioni di ordine $o(dz^2)$ che coinvolgono l'anticommutatore $[\hat{\mathcal{D}}, \hat{\mathcal{N}}]$, in generale non nullo. La propagazione dell'impulso lungo $\hat{z}$ risulta dunque risolvibile applicando il contributo puramente dispersivo con $\hat{\mathcal{D}}$ nel dominio delle frequenze usando la relazione

$$e^{\hat{\mathcal{D}}dz} A(z, T) = \mathcal{F}_T^{-1} e^{\mathcal{D}(\Omega)dz} \mathcal{F}_T A(z, T),$$

dove $\mathcal{F}_T$ effettua la trasformata di Fourier e $\mathcal{D}(\Omega)$ è semplicemente un numero complesso nel dominio delle frequenze, ottenuto sostituendo l'operatore $\partial/\partial T$ con $-i\Omega$; successivamente si applica $\hat{\mathcal{N}}$ nel dominio del tempo, dove agisce in modo moltiplicativo. Questa è la strategia alla base dello SSFM. Esiste però una versione numericamente più efficiente, nota come *Split-Step* simmetrizzato (S-SSFM) che, utilizzando la relazione (.12), ottenuta iterando due volte la relazione (2.20), si risolve in un'evoluzione più simmetrica che ne agevola la convergenza¹:

$$e^{(\mathcal{D}+\mathcal{N})dz} = e^{\frac{dz}{2}\mathcal{D}} e^{dz\mathcal{N}(\frac{dz}{2})} e^{\frac{dz}{2}\mathcal{D}} + o(dz^3). \quad (2.21)$$

Si noti che la relazione (.12) è ricavata per operatori costanti, mentre l'operatore $\mathcal{N}$ dipende in generale da z tramite $|A(z, T)|^2$, per cui il punto del passo in cui valutarlo è una scelta puramente numerica. Nel caso suddetto si applica la *midpoint rule*, valutandolo a mezzo passo, mentre nell'approssimazione a gradino si assume $\mathcal{N}(z + dz/2) \simeq \mathcal{N}(z)$. Un'ulteriore strategia consiste nell'applicare la regola del trapezio approssimando l'integrale in z con

$$\int_z^{z+dz} \mathcal{N}(z') dz' \approx \frac{dz}{2} [\mathcal{N}(z) + \mathcal{N}(z + dz)].$$

L'algoritmo risolutivo si articola dunque nel propagare l'involuppo da z a $z + dz/2$ nel mezzo lineare con

$$\tilde{A}(z, \Omega) \left(z + \frac{dz}{2} \right) = e^{\mathcal{D}(\Omega)\frac{dz}{2}} \tilde{A}(z, \Omega), \quad (2.22)$$

per poi antitrasformare, ottenendo un campo evoluto di mezzo passo ma provvisorio, essendo soluzione di

$$\partial_z \tilde{A}(z, \Omega) = \mathcal{D} \tilde{A}(z, \Omega) \quad (2.23)$$

e non dell'equazione completa come la (2.18). Si applica quindi il passo completo per la parte di non linearità con

$$A(z + dz, T) = A(z, T) e^{i\gamma |A(\frac{z}{2})|^2 dz} \quad (2.24)$$

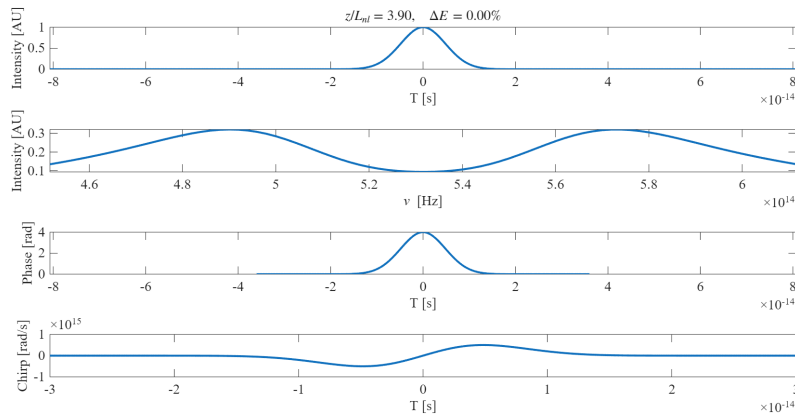
¹Applicando iterativamente la relazione di Baker-Campbell-Hausdorff (.11), si dimostra facilmente come la cancellazione dei termini di commutatore di ordine dz^2 selezioni solo termini di ordine $o(dz^3)$.

e si trasforma il risultato per compiere l'ultimo mezzo step nel mezzo puramente dispersivo, per poi procedere iterativamente fino a raggiungere la distanza prestabilita.

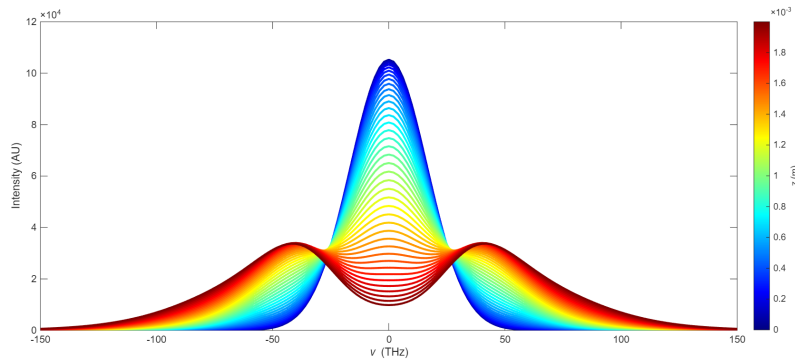
Consideriamo dunque l'impulso gaussiano dell'esempio precedente, nel riferimento dell'involuppo e in assenza di dispersione ($\beta_2 = 0$) e di perdite ($\alpha = 0$), ma in presenza di effetto Kerr con $L_{nl} = 0.5$ mm. Ponendo $I_0 = 1$, segue $\gamma = 2000 \text{ m}^{-1}$. Come illustrato in figura 2.3, lo spettro si allarga e si deforma durante la propagazione (*Self Phase Modulation*, SPM). Tale effetto è prodotto dalla modulazione di fase temporale $\phi_{nl} \propto I(t)$, a cui corrisponde una modulazione temporale $\delta\omega$ della frequenza istantanea:

$$\omega_{ist} = \omega_0 - \frac{\partial\phi_{nl}}{\partial T} = \omega_0 - \frac{L_{eff}}{L_{nl}} \frac{\partial|U(0, T)|^2}{\partial T} = \omega_0 + \frac{2T}{T_0^2} \frac{L_{eff}}{L_{nl}} |U(0, T)|^2.$$

Il *chirping* $\delta\omega(T) = \omega_{ist} - \omega_0$ è una funzione dispari rispetto a $T = 0$, dominata dal termine lineare in T nella zona centrale, dove si ha massimo scostamento in frequenza (*blue shift* per $T > 0$, *red shift* per $T < 0$), e dalla decrescita gaussiana ai bordi.



(a) Distribuzione temporale dell'intensità, spettro in frequenza, fase istantanea e *chirp* in $z/L_{nl} = 3.90$



(b) Allargamento e distorsione spettrale per effetto Kerr: profili $|A(T, z)|^2$ a diversi z , con colore $\propto z/L_{nl}$.

Figura 2.3. Evoluzione per effetto Kerr di un impulso gaussiano *transform-limited* attraverso uno spessore di 2 mm di *fused silica*, in assenza di attenuazione ($\alpha = 0$).

Capitolo 3

Effetti del confinamento spaziale

Lo scopo di questo capitolo è discutere gli effetti del confinamento spaziale della luce durante la propagazione, studiando la diffrazione di un fascio gaussiano, la propagazione attraverso un ostacolo o l'evoluzione all'interno di una guida d'onda. A tal fine, saranno considerati fasci monocromatici e verrà adottato un approccio numerico che permette di simulare in modo efficiente la propagazione dei fasci ottici in regime parabolico.

3.1 Equazione parabolica

L'ipotesi alla base dell'ottica in regime parabolico è l'HE (1.6), valida anche nel caso di mezzo *quasi* omogeneo fintantoché la variazione relativa del profilo spaziale dell'indice di rifrazione sia lenta abbastanza da essere trattabile perturbativamente trascurando l'accoppiamento tra diverse polarizzazioni. Dato il campo scalare $n(\omega, \vec{r})$, è conveniente esprimerne la dipendenza spaziale in termini di correzione a un indice di rifrazione principale $n_1(\omega)$ come segue:

$$n(\omega, \vec{r}) = n_1(\omega) + \delta n(\omega, \vec{r})$$

da cui, per $|\delta n| \ll n_1$,

$$n^2 \simeq n_1^2 + 2n_1\delta n.$$

Consideriamo come soluzione di prova alla (1.6) l'onda monocromatica propagante in avanti data da

$$\vec{E}_\omega(\vec{r}) = \vec{A}_\omega(\vec{r}_\perp, z)e^{ik(\omega)z} \quad \text{con} \quad k(\omega) = \frac{\omega}{c}n_1,$$

che equivale ad effettuare un cambio di variabile per porsi in un sistema di riferimento rotante alla frequenza spaziale dominante con asse $\hat{z}$ lungo l'asse di propagazione del segnale e $\vec{r}_\perp = (x, y)$. Per ciascuna componente monocromatica si ha

$$\nabla^2 \vec{E}_\omega = e^{ikz} \left(\nabla_\perp^2 + 2ik \frac{\partial}{\partial z} - k^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \vec{A}_\omega(\vec{r}_\perp, z).$$

Soffermiamoci su tale espressione per un'analisi di scala. Supponendo di poter descrivere la variazione in ampiezza del campo $\vec{A}_\omega$ nelle tre direzioni x, y, z su scale

spaziali caratteristiche l_x, l_y, l_z , si stima l'ordine dei vari termini: il primo scala come $(1/l_x)^2, (1/l_y)^2$, il secondo come $(1/\lambda)(1/l_z)$, il terzo come $(1/\lambda)^2$, mentre l'ultimo scala come $(1/l_z)^2$, pertanto nell'ipotesi $l_z \gg l_x, l_y, \lambda$ risulta trascurabile. Si noti che, essendo stata già precedentemente soddisfatta la condizione di non accoppiamento $\lambda \ll l_x, l_y$, l'ipotesi attuale è $l_z \gg l_x, l_y$ talvolta riportata nella forma

$$\left| \frac{\partial^2 A_\omega}{\partial z^2} \right| \ll \left| \frac{1}{\lambda} \frac{\partial A_\omega}{\partial z} \right|, \quad (3.1)$$

ossia la *Slow Varying Envelope Approximation* (SVEA) nell'accezione spaziale, nota come approssimazione parassiale. Sfruttando la SVEA nella HE e mettendo in evidenza la derivata prima rispetto alla variabile evolutiva z , si ottiene l'equazione parabolica (PE) o di Fock-Leontovich:

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{i}{2k} \nabla_\perp^2 \right) \vec{A}_\omega(\vec{r}_\perp, z) = ik \frac{\delta n}{n_1} \vec{A}_\omega(\vec{r}_\perp, z), \quad (3.2)$$

ove $\nabla_\perp^2$ è sorgente di diffrazione per un campo localizzato spazialmente. Nel caso di mezzo omogeneo

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{i}{2k} \nabla_\perp^2 \right) \vec{A}_\omega(\vec{r}_\perp, z) = 0 \quad (3.3)$$

una soluzione è del tipo

$$\vec{A}_\omega(\vec{r}_\perp, z) = \vec{A}_{\omega 0} e^{-i(\alpha^2 + \beta^2) \frac{z}{2k} + i\alpha x + i\beta y} \quad (3.4)$$

e, in virtù della linearità, qualsiasi altra combinazione lineare di questi involuppi

$$\vec{A}_\omega(\vec{r}_\perp, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} d\beta C(\alpha, \beta) e^{-i(\alpha^2 + \beta^2) \frac{z}{2k} + i\alpha x + i\beta y} \quad (3.5)$$

è anch'essa soluzione. Ponendo $\alpha = k_x$, $\beta = k_y$ ed identificando con $C(\alpha, \beta)$ lo spettro spaziale trasverso iniziale $\vec{\mathcal{A}}_{\vec{k}_\perp}(\omega, z=0)$, segue

$$\vec{A}_\omega(\vec{r}_\perp, z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} d\vec{k}_\perp \vec{\mathcal{A}}_{\vec{k}_\perp}(\omega, z=0) e^{-i \frac{k_\perp^2}{2k} z + i \vec{k}_\perp \cdot \vec{r}_\perp}, \quad (3.6)$$

ossia la diffrazione di Fresnel, risultato che discuteremo meglio in 3.2.

In presenza di disomogeneità, ma nell'ipotesi semplificativa $\delta n(x, y, z) \simeq \delta n(z)$ - non verificata per una fibra ottica - un involuppo indipendente da $\vec{r}_\perp$ e dunque non soggetta a diffrazione, della forma

$$\vec{A}_\omega(z) = \vec{A}_\omega(z=0) e^{i \frac{\omega}{c} \int_0^z dz' \delta n(z')} \quad (3.7)$$

è soluzione. Si osservi come tale soluzione, essendo la propagazione in avanti un'assunzione della PE (3.2), rompa la simmetria rispetto al piano $z=0$ di cui gode l'HE. Risulta pertanto ammissibile come soluzione solo qualora il gradiente dell'indice di

rifrazione non sia tanto forte da riflettere parte dell'onda [5].

Ritroviamo nell'equazione parabolica per ciascuna componente la medesima struttura formale dell'equazione di Shrödinger, che riscriviamo nella forma

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{i\hbar}{2m} \nabla^2 \right) \psi(\vec{r}, t) = -\frac{iV(\vec{r})}{\hbar} \psi(\vec{r}, t)$$

in modo da tracciare tale corrispondenza termine per termine:

$$\begin{aligned} t &\leftrightarrow z \\ \psi(\vec{r}, t) &\leftrightarrow \vec{A}_\omega(\vec{r}_\perp, z) \\ \frac{\hbar}{2m} &\leftrightarrow \frac{1}{2k} \\ -\frac{V(\vec{r})}{\hbar} &\leftrightarrow k \frac{\delta n(\omega, \vec{r})}{n_1} \end{aligned} \tag{3.8}$$

Nel caso in cui avessimo costruito la PE a partire dall'*ansatz* di un campo contro-propagante, avremmo avuto un cambio di segno davanti a ∂_z e dunque $-t \leftrightarrow z$. Tali sostituzioni hanno carattere puramente formale in quanto l'equazione di Shrödinger ottica (SE), a differenza di quella quantistica 1+3D, è un'equazione spaziale 2+1D, avendo eliminato la dipendenza temporale tramite l'ipotesi di monocromaticità nell'HE. Ciò è ribadito dal fatto che la formulazione più attuale della PE, nota come *Non Linear Shrödinger Equation* (NLSE) - dove $\delta n(\vec{r}) = \delta n(|\vec{A}_\omega|)$ e le soluzioni includono onde non lineari come i solitoni e le *shock waves* - non obbedisca all'assioma di linearità della meccanica quantistica. Benché la diversità di contesto, tale somiglianza fa sì che molti problemi ottici siano risolvibili mutuando la trattazione della meccanica quantistica. Un esempio emblematico è l'accoppiamento modale direzionale, modellabile come pozzo doppio che dà luogo all'effetto tunnel ottico discusso nel capitolo 4. Lungi dall'essere una somiglianza accidentale, essa rivela l'ottica ondulatoria parassiale e la meccanica quantistica quali manifestazioni diverse della stessa classe di equazioni a derivata parziale.

La risoluzione della PE è comunemente effettuata mediante un approccio numerico noto come *Beam Propagation Method* (BPM), che nel contesto della risoluzione dell'equazione di Schrödinger o della propagazione di impulsi in guide d'onda, è generalmente indicato come *Split-Step Fourier Method* (SSFM) [5]. Lo schema è difatti del tutto analogo a quello illustrato in sezione 2.4, per cui basterà trasportarlo nel dominio spaziale. A tale scopo, identifichiamo nella PE (3.2) l'operatore di diffrazione

$$\hat{\mathcal{D}} = \frac{i}{2k} \nabla_\perp^2 \tag{3.9}$$

e l'operatore di inomogeneità

$$\hat{\mathcal{N}} = \frac{ik}{n_1} \delta n(x, y, z) \tag{3.10}$$

che include eventuali non linearità del mezzo. La PE si riscriverà come

$$\partial_z \vec{A}_\omega = (\hat{\mathcal{D}} + \hat{\mathcal{N}}) \vec{A}_\omega. \tag{3.11}$$

Segue che, noto lo spettro spaziale in z , la soluzione al passo $z + dz$ sarà data da

$$\vec{A}_\omega(\vec{r}_\perp, z + dz) = (e^{\frac{dz}{2}\hat{D}} e^{dz\hat{N}(\frac{dz}{2})} e^{\frac{dz}{2}\hat{D}} + o(dz^3))\vec{A}_\omega(\vec{r}_\perp, z), \quad (3.12)$$

La propagazione dell'impulso lungo $\hat{z}$ risulta dunque risolubile applicando nel mezzo omogeneo $\hat{D}$ nel dominio delle frequenze spaziali trasverse, dove $\nabla_\perp^2$ si traduce in un fattore $(-k_\perp^2)$, e nel mezzo disomogeneo non diffrattivo $\hat{N}$ nello spazio trasverso, dove l'operatore, descritto in (3.10), agisce indipendentemente su ciascun punto $\vec{r}_\perp$ come funzione moltiplicativa.

Si propaga dunque l'involuppo da z a $z + dz/2$ nel mezzo omogeneo con

$$\vec{\mathcal{A}}_{\vec{k}_\perp}\left(\omega, z + \frac{dz}{2}\right) = \vec{\mathcal{A}}_{\vec{k}_\perp}(\omega, z) e^{-i\frac{k_\perp^2}{2k} \frac{dz}{2}}, \quad (3.13)$$

per poi antitrasformare ed applicare quindi il passo completo per la parte di disomogeneità con

$$\vec{A}_\omega(\vec{r}_\perp, z + dz) = \vec{A}_\omega(\vec{r}_\perp, z) e^{i\frac{k}{n_1}\delta n(\vec{r}_\perp, \frac{z}{2})dz}. \quad (3.14)$$

Infine si trasforma il risultato per compiere l'ultimo mezzo step nel mezzo omogeneo. Si itera dunque tale schema fino alla distanza prestabilita.

3.2 Approccio spettrale

3.2.1 Il teorema di Fourier

Affrontiamo ora il problema centrale della diffrazione adottando un approccio integrale basato sull'analisi spettrale [8]. Dato il campo monocromatico

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_\omega(\vec{r}) e^{-i\omega t}, \quad (3.15)$$

consideriamo, anziché un involuppo generico, la singola componente a onda piana

$$\vec{E}_\omega(\vec{r}) = \vec{\mathcal{E}}_{\vec{k}}(\omega) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \quad (3.16)$$

come soluzione specifica all'HE nell'ipotesi di omogeneità $n(\omega, \vec{r}) = n(\omega)$. Sostituendo nell'HE, si ricava la relazione di dispersione

$$-(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) + k_0^2 n^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad |\vec{k}|^2 = k_0^2 n^2 \quad (3.17)$$

come condizione di validità della soluzione ipotizzata. Definendo il sistema di riferimento tale che l'asse $\hat{z}$ coincida con l'asse di propagazione il campo (3.16) si riscrive come

$$\vec{E}_\omega(\vec{r}) = \vec{\mathcal{E}}_{\vec{k}}(\omega) e^{i\vec{k}_\perp \cdot \vec{r}_\perp + i k_z z}. \quad (3.18)$$

La soluzione generica può esser costruita sfruttando il fatto che ogni campo è descrivibile come una sovrapposizione di onde piane propaganti in direzioni diverse, assoggettandole al vincolo espresso dalla (3.17), che fissa il modulo di $\vec{k}$ riducendo l'integrale tridimensionale a una trasformata di Fourier bidimensionale nello spazio trasverso. In formule:

$$\vec{E}_\omega(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{\vec{k}_\perp} d\vec{k}_\perp \vec{\mathcal{E}}_{\vec{k}_\perp}(\omega) e^{i\vec{k}_\perp \cdot \vec{r}_\perp + i\sqrt{k^2 - k_\perp^2} z} \quad (3.19)$$

ove, come per la PE, abbiamo selezionato la soluzione propagante in avanti con $k_z = +\sqrt{k^2 - k_\perp^2}$. Non è invece dato alcun vincolo sul segno del radicando da cui segue che

- se $k_x^2 + k_y^2 < k_0^2 n^2$, allora $k_z \in \mathbb{R}$: si tratta di onde propaganti, con trasporto di energia lungo $\hat{z}$;
- se $k_x^2 + k_y^2 > k_0^2 n^2$, allora $k_z \in i\mathbb{R}$: si tratta di onde evanescenti.

3.2.2 L'ottica parassiale di Fresnel e di Fraunhofer

Considerando un'onda che si propaga lungo l'asse z , lo spettro spaziale sul piano $z = 0$ è dato dalla trasformata del campo in ingresso:

$$\vec{\mathcal{E}}_{\vec{k}_\perp}(\omega, z = 0) = \iint_{-\infty}^{+\infty} d\vec{r}_\perp \vec{E}_\omega(\vec{r}_\perp, z = 0) e^{-i\vec{k}_\perp \cdot \vec{r}_\perp}. \quad (3.20)$$

Supponiamo sia verificata l'ipotesi parassiale $k_\perp^2/k^2 \ll 1$, della quale è possibile avvalersi per rendere l'integrale (3.19), non analitico, risolvibile in forma chiusa. Sotto tale ipotesi la radice nel propagatore può esser sviluppata in serie di Taylor (.8):

$$k_z z \simeq kz - \frac{1}{2} \frac{k_\perp^2}{k} z \quad \text{per} \quad k_\perp^2/k^2 \ll 1, \quad (3.21)$$

che equivale a considerare solo angoli di propagazione prossimi alla direzione dell'asse $\hat{z}$, come sarà chiaro nell'esempio del fascio gaussiano in 3.3. Si noti tuttavia che, essendo argomento di una funzione trigonometrica periodica, affinché sia lecito lo sviluppo, dev'essere soddisfatta la seguente condizione:

$$\left| k_z - k + \frac{1}{2} \frac{k_\perp^2}{k} \right| z \ll 2\pi \quad \Rightarrow \quad z \ll z_{Fre} \equiv \frac{8k^3}{k_\perp^4}, \quad (3.22)$$

ove z_{Fre} è detta zeta di Fresnel [12]. Sotto tale ipotesi, sostituendo lo sviluppo all'esponente e la (3.20) nella (3.19), si ottiene

$$\vec{E}_\omega(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} d\vec{r}'_\perp \vec{E}_\omega(\vec{r}'_\perp) \iint_{|\vec{k}_\perp| \ll k} d\vec{k}_\perp e^{i\vec{k}_\perp \cdot (\vec{r}_\perp - \vec{r}'_\perp) + ikz - \frac{ik_\perp^2}{2k} z},$$

dove si considera solo il campo propagante ($|\vec{k}_\perp| \ll k$). Procedendo con il completamento del quadrato all'esponente ed estendendo gli estremi di integrazione a $(-\infty, +\infty)$ in virtù dell'ipotesi di parassialità, si ottiene un integrale di Fresnel, formalmente riconducibile ad un integrale gaussiano, la cui formula risolutiva in (.9) fornisce per il campo (3.15) il seguente risultato:

$$\vec{E}(\vec{r}_\perp, z, t) = -i \frac{e^{ikz - i\omega t}}{\lambda z} \iint_{-\infty}^{\infty} d\vec{r}'_\perp \vec{E}_\omega(\vec{r}'_\perp) e^{i \frac{k}{2z} |\vec{r}_\perp - \vec{r}'_\perp|^2}, \quad (3.23)$$

noto come formula della diffrazione parassiale dell'ottica di Fresnel.

All'interno della teoria parassiale di Fresnel, vi è una teoria ancora più semplice

valida nel campo lontano, dove i fenomeni di diffrazione assumono una forma ancora più semplificata. Definiamo $\vec{r}'_{\perp} \equiv (\xi, \eta)$ le coordinate sul piano $z = 0$ dove valgono le condizioni al contorno e $\vec{r}_{\perp} \equiv (x, y)$ quelle sul piano a distanza z dove siamo interessati a conoscere la forma del campo. L'esponente del propagatore parassiale in (3.23) si riscrive come

$$i \frac{k}{2z} |\vec{r}_{\perp} - \vec{r}'_{\perp}|^2 = i \frac{k}{2z} (x^2 + y^2 + \xi^2 + \eta^2 - 2x\xi - 2y\eta), \quad (3.24)$$

ove individuiamo i parametri perturbativi ξ/z , η/z . Nell'ipotesi di Fraunhofer

$$\frac{k}{2z} (\xi^2 + \eta^2)_{max} \ll 2\pi \quad \Rightarrow \quad z \gg z_{Fra} \equiv \frac{(\xi^2 + \eta^2)_{max}}{2\lambda}, \quad (3.25)$$

la (3.24) viene dominata da x^2 , y^2 , mentre risultano trascurabili i termini quadratici in ξ , η . I termini lineari in x , y rimanenti generano la trasformata di Fourier 2D del campo in ingresso:

$$\vec{E}(\vec{r}_{\perp}, z, t) = -i \frac{e^{ikz - i\omega t}}{\lambda z} e^{i \frac{k}{2z} (x^2 + y^2)} \iint_{-\infty}^{+\infty} d\xi d\eta \vec{E}_{\omega}(\xi, \eta) e^{-ip\xi - iq\eta} \quad (3.26)$$

con $p \equiv \frac{xk}{z}$, $q \equiv \frac{yk}{z}$

ove il primo termine fuori dall'integrale rappresenta l'onda portante che, nella propagazione lungo $\hat{z}$, accumula uno sfasamento parabolico descritto dal secondo termine. Nella forma non è coinvolta la variabile z , da cui consegue che il campo evoluto è autosimile, mentre compare nella definizione delle unità di misura p , q che si riducono al crescere di z , per cui la loro rappresentazione aumenta ed il fascio si allarga. L'ipotesi di Fraunhofer sulla finitezza del campo si traduce in ipotesi sul modello circa la limitatezza della struttura diffrattiva o della regione da cui essa emette luce. Si specifica che l'ipotesi di Fraunhofer non è in contrasto con la (3.23) essendo $z_{Fra} \gg z_{Fre}$.

3.3 Propagazione di un fascio gaussiano

Nell'ambito della propagazione parassiale di campi coerenti spazialmente confinati, un tipico caso di studio è la modalità trasversa fondamentale di un laser TEM₀₀ (*Transverse Electromagnetic Mode*) [7], descritta da una distribuzione di intensità gaussiana priva di nodi trasversi. Si tratta della configurazione stazionaria che si instaura nella cavità risonante di un laser, delimitata da due specchi, in genere sferici, che racchiudono il mezzo attivo. Fissiamo l'asse $\hat{z}$ lungo l'asse di propagazione del fascio laser, centrato rispetto al massimo di intensità. Sul piano della cintola, posto convenzionalmente a $z = 0$ dove la fase è piatta ed il raggio (*waist*) $w(z = 0) \equiv w_0$ del fascio è minimo, la distribuzione spaziale del campo trasverso è

$$\vec{E}(\vec{r}_{\perp}, z = 0) = \vec{E}_0 e^{-\frac{r_{\perp}^2}{w_0^2}}, \quad (3.27)$$

massimamente localizzata¹ e simmetrica sotto inversione $z \rightarrow -z$. Il *waist* è dunque definito come la distanza radiale dal centro del fascio sul piano $z = 0$ alla quale l'intensità

$$I(r_\perp) = I_0 e^{-\frac{2r_\perp^2}{w_0^2}}$$

si riduce di un fattore $1/e^2$ rispetto al massimo. Nel caso del laser l'ipotesi di parassialità trova interpretazione geometrica diretta in una condizione sull'angolo tra le componenti del fascio laser e la direzione di propagazione. Detto α l'angolo di divergenza del fascio, per $k_\perp^2/k^2 \ll 1$ si ha

$$\tan \alpha = \frac{|\vec{k}_\perp|}{|\vec{k}_z|} \simeq \frac{|\vec{k}_\perp|}{|\vec{k}|} \ll 1 \quad \Rightarrow \quad \alpha \ll 1 \text{ rad.}$$

Trascurando la larghezza del fascio avente tipicamente $w_0 \simeq 1$ mm, tale ipotesi si traduce nello spazio fisico, a distanza $z \sim \text{m}$, in

$$\tan \alpha \simeq \frac{w(z)}{z} \sim 10^{-3} \quad \Rightarrow \quad \alpha \sim \text{mrad} \quad (3.28)$$

per cui siamo in regime di parassialità.

Lo spettro spaziale sul piano della cintola è calcolabile analiticamente mediante completamento del quadrato per ricondursi formalmente a un integrale gaussiano:

$$\vec{\mathcal{E}}_{\vec{k}_\perp}(\omega, z=0) = \iint_{-\infty}^{+\infty} d\vec{r}_\perp \vec{E}_0 e^{-\frac{r_\perp^2}{w_0^2}} e^{-i\vec{k}_\perp \cdot \vec{r}_\perp} = \vec{E}_0 e^{-\frac{k_\perp^2 w_0^2}{4}} \pi w_0^2,$$

da cui segue che $k_\perp \sim 1/w_0$. L'ipotesi di parassialità $k_\perp \ll 2\pi/\lambda$ nel caso suddetto si traduce quindi nella condizione $w_0 \gg \lambda$.

In regime parassiale, risolvendo l'integrale di Fresnel tramite completamento del quadrato e separando modulo e fase (servendosi della relazione .15), si ottiene

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{ikz - i\omega t} \frac{w_0}{\sqrt{w_0^2 + \frac{4z^2}{k^2}}} \exp \left[-i \arctan \left(\frac{2z}{kw_0^2} \right) - \frac{r_\perp^2}{w_0^2 \left(1 + \frac{4z^2}{k^2 w_0^4} \right)} + i \frac{2z}{k} \frac{r_\perp^2}{w_0^4 \left(1 + \frac{4z^2}{k^2 w_0^4} \right)} \right] \quad (3.29)$$

dove la quantità

$$z_R \equiv \frac{kw_0^2}{2} = \frac{\pi w_0^2}{\lambda} \quad (n_0 = 1) \quad (3.30)$$

è definita come lunghezza di diffrazione o parametro confocale o lunghezza di Rayleigh [8] e segna il passaggio dal regime di Fresnel a quello di Fraunhofer: per $z \ll z_R$ il fascio non diffrange, mentre per $z \gg z_R$ assume una forma a cono. Tale distanza determina l'angolo di divergenza del fascio $\theta_b = w_0/z_R = \lambda/(\pi w_0)$, riconducendo alla condizione $w_0 \gg \lambda$ alla (3.28).

Identifichiamo con

$$w(z) = w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_R} \right)^2}$$

la larghezza del fascio, tale per cui a distanza z_R si ha $w(z_R) = w_0 \sqrt{2}$.

¹Il fatto di avere fase piatta e fotone localizzato potrebbe sembrare una violazione del principio di indeterminazione $\Delta \vec{r}_\perp \Delta \vec{k}_\perp \geq 1$. In realtà, sebbene il fronte d'onda sia localmente piano, il campo non è un'onda piana, bensì è dotato di una distribuzione angolare in $\vec{k}_\perp$.

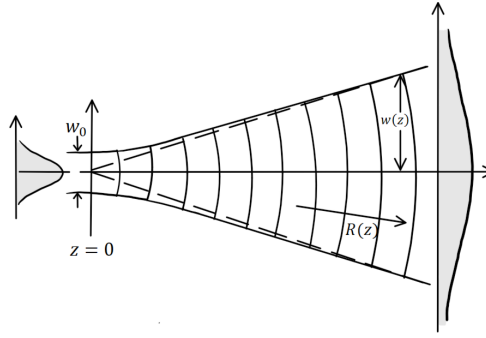


Figura 3.1. Profilo e superfici equifase di un fascio gaussiano in propagazione libera.

Servendoci di tali definizioni, analizziamo ciascun termine del risultato (3.29) [12]:

- $e^{ikz-i\omega t}$: rappresenta la portante;
- $w_0/w(z)$: è un fattore di normalizzazione dell'ampiezza che descrive la *diluzione* geometrica dell'energia del fascio;
- $\exp[-i \arctan(z/z_R)]$: nell'argomento dell'esponenziale, $\zeta(z) \equiv \arctan(z/z_R)$ è la fase di Gouy, l'unico termine non simmetrico rispetto a $z \rightarrow -z$, come memoria del segno di $k_z = \pm \sqrt{k^2 - k_\perp^2}$;
- $\exp[-r_\perp^2/w^2(z)]$: ha una forma gaussiana ed è responsabile dell'allargamento del fascio quando $(z/z_R)^2 \gg 1$;
- $\exp[iz/z_R \cdot r_\perp^2/w^2(z)] \equiv \exp[ikr_\perp^2/(2R(z))]$: è un fattore di fase quadratica associato alla curvatura del fronte d'onda, di raggio $R \equiv z[1+(z_R/z)^2]$, infinito in $z = 0$ e tendente a z per $z \gg z_R$. Come conseguenza dell'evoluzione lineare in z della fase $\phi(r_\perp, z) \equiv z/z_R \cdot r_\perp^2/w^2(z)$, per $z < 0$ il fascio converge, mentre per $z > 0$ diverge.

In assenza di assorbimento, la potenza ottica deve conservarsi. Nel caso 1+2D:

$$P(z) = |\vec{E}_0(z)|^2 \iint_{-\infty}^{+\infty} d\vec{r}_\perp e^{-\frac{2r_\perp^2}{w^2(z)}} = \frac{1}{2} |\vec{E}_0(z)|^2 \pi w^2(z) = \text{cost.} \Rightarrow I(z) \propto \frac{1}{w^2(z)} \propto \frac{1}{z^2}, \quad (3.31)$$

in accordo con l'andamento del fattore di ampiezza geometrica ottenuto. È immediato verificare che nel caso 1+1D risulta invece $I(z) \propto 1/z$.

3.4 Diffrazione di Fraunhofer da aperture rettangolari

Come mostrato in 3.2.2, nel regime di Fraunhofer (*far field*) l'espressione del campo diffratto si riduce alla trasformata di Fourier bidimensionale del campo confinato in ingresso. Studiamo ora il caso in cui un fronte d'onda piano incidente sia limitato da un'apertura di dimensioni finite. L'analisi della diffrazione prodotta da aperture di geometria semplice - come quelle rettangolari (*slit*), circolari (*pinhole*) o esagonali - riveste un ruolo centrale nella progettazione e caratterizzazione dei sistemi ottici.

Sia (ξ, η) il sistema di coordinate trasverse sul piano di ingresso ($z = 0$) del campo ottico e (x, y) quello sullo schermo posto a distanza $z \gg z_{Fra}$. Consideriamo in $z = 0$ una maschera nera in metallo che consente il passaggio della luce esclusivamente all'interno di una forma ben definita.

Il campo monocromatico in ingresso, filtrato dalla maschera, può essere espresso come:

$$\vec{E}(\vec{r}_\perp, z = 0, t) = \tau(\xi, \eta) \vec{E}_0 e^{-i\omega t},$$

ove la funzione di trasferimento $\tau(\xi, \eta)$ è un campo scalare, complesso nel caso in cui l'oggetto introduca anche uno sfasamento del campo in ingresso, e rappresentante l'interazione con la maschera. Nella presente trattazione si trascurano gli effetti locali di eccitazione elettronica all'interno di eventuali metasuperfici, così come i fenomeni di propagazione interna al materiale.

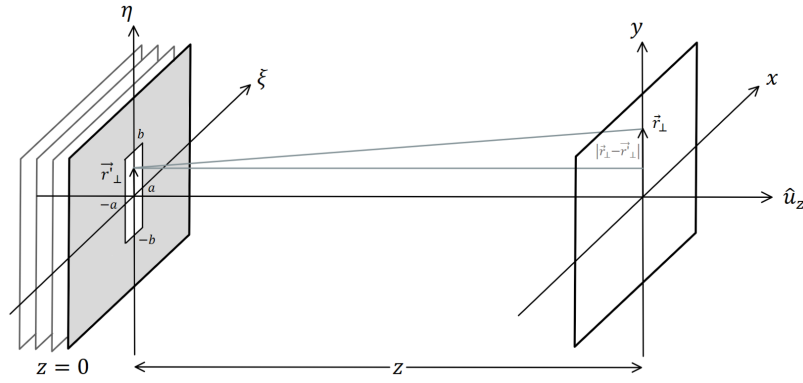


Figura 3.2. Geometria delle diffrazione di Fraunhofer da apertura rettangolare.

Nel caso suddetto di apertura rettangolare di lati $2a$ e $2b$, schematizzata in figura 3.2, la funzione di trasferimento assume la forma:

$$\tau(\xi, \eta) = \text{rect}\left(\frac{\xi}{2a}\right) \text{rect}\left(\frac{\eta}{2b}\right)$$

dove, dalla definizione della $\text{rect}()$ riportata in (.13), segue che l'integrale (3.26) sarà limitato tra $|\xi| \leq a$, $|\eta| \leq b$. Svolgendo l'integrale ed utilizzando la definizione della $\text{sinc}()$ in (.14), si ottiene

$$\vec{E}(\vec{r}_\perp, z, t) = -\vec{E}_0 \frac{ie^{ikz-i\omega t}}{\lambda z} e^{\frac{ik}{2z}(x^2+y^2)} 4ab \text{sinc}\left(\frac{2ax}{\lambda z}\right) \text{sinc}\left(\frac{2by}{\lambda z}\right). \quad (3.32)$$

Al crescere di z la forma del campo non cambia, ossia il campo gode di *self-similarity*, ma l'unità di misura si riduce, cosicché il fascio si espande durante la propagazione lungo z . Il pattern di diffrazione descritto dalla $\text{sinc}()$ presenta una periodicità regolare e ampiezza decrescente come il reciproco dell'argomento della $\text{sinc}()$. La posizione del primo zero fornisce una stima della distanza z alla quale la figura di diffrazione risulterà visibile. Nel caso di una slit, caratterizzata da $b \gg a$ tale da visualizzare solo la figura di diffrazione lungo x , essendo il primo zero sulle y dato da

$$\frac{2by^*}{z\lambda} = 1 \quad \Rightarrow \quad y^* = \frac{z\lambda}{2b},$$

affinché risulti effettivamente $y^* \simeq 0$, dovrà essere soddisfatta la condizione

$$b \gg \frac{z\lambda}{y^*}.$$

Per avere una stima dell'ordine di grandezza, si consideri $z \sim \text{m}$, $\lambda \sim \mu\text{m}$, $y^* \sim \text{mm}$, da cui segue $b \sim \text{mm}$. In tal caso la $\text{sinc}()$ in y nella (3.32) risulta approssimabile a 1 e la larghezza lungo y è confrontabile con la dimensione iniziale del fascio. L'andamento dell'intensità del fascio - l'osservabile misurata negli esperimenti di ottica - è dato quindi da

$$I(x) = I_0 \text{sinc}^2\left(\frac{2ax}{\lambda z}\right). \quad (3.33)$$

Si riporta in figura 3.3 il profilo di intensità lungo x ottenuto simulando la diffrazione di un'onda piana dovuta a una slit 1D di larghezza $2a$, per $a = 100 \mu\text{m}$ e per due diversi valori di z ([Appendice B](#)).

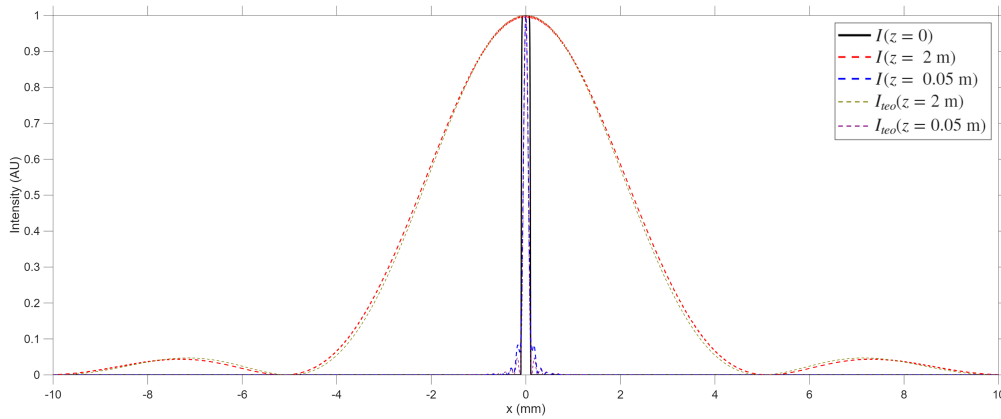


Figura 3.3. Confronto tra modello teorico e risultato numerico (BPM) del pattern di diffrazione a distanza $z = 2 \text{ m}$ e $z = 0.04 \text{ m}$ da slit 1D di larghezza $2a = 200 \mu\text{m}$, investita da un'onda piana con $\lambda = 0.5 \mu\text{m}$.

Come atteso, per $z = 2 \text{ m} \gg z_{Fra} = 0.04 \text{ m}$ si ha completo accordo tra il modello teorico ed il risultato numerico, mentre per $z = 0.05 \text{ m}$ la (3.33) restituisce un pattern di diffrazione con zeri molto ravvicinati, discostandosi dalla curva di intensità ottenuta numericamente, nella quale la modulazione prevista analiticamente si presenta smussata, con minimi poco pronunciati, poiché non ha ancora raggiunto la struttura completamente sviluppata tipica del regime lontano.

Nella pratica sperimentale non si ha a che fare con onde piane ideali, bensì con forme d'onda spazialmente limitate, come il fascio gaussiano generato da un laser. Sebbene in questo caso l'analisi del pattern di diffrazione risulti più complessa dal punto di vista analitico, la figura mantiene una struttura qualitativamente molto simile a quella discussa. In tali situazioni emerge chiaramente il vantaggio dell'approccio BPM, che permette di affrontare numericamente casi non risolvibili analiticamente. Sull'asse y , dove la $\text{sinc}()$ è circa costante, vedremo invece la diffrazione gaussiana del fascio laser.

Capitolo 4

Propagazione in mezzi a profilo d'indice variabile

4.1 Confinamento ottico in guide d'onda

Riprendiamo l'equazione parabolica (3.2), la cui analogia formale con l'equazione di Shrödinger, discussa in 3.1, offre significativi risvolti applicativi, in particolare nell'analisi e nella progettazione di guide d'onda nell'ambito dell'ottica integrata. Una guida ottica è una struttura articolata in una regione centrale (*core*) con una differenza di indice di rifrazione rispetto al mezzo circostante (*cladding*), organizzata in una distribuzione spaziale tale da confinare e guidare la radiazione elettromagnetica lungo una direzione prefissata. Il profilo spaziale dell'indice di rifrazione definisce, come vedremo, le condizioni di propagazione, selezionando i modi guidati e le costanti di propagazione associate [11, 1].

Per semplicità, consideriamo una guida ottica 1+1D e fissiamo un sistema di riferimento $x - z$, con origine $x = 0$ nel centro del *core*, e con l'asse z coincidente con la direzione di propagazione. Definiamo l'indice di rifrazione¹ del *core*

$$n(x) = n_0 + \delta n(x),$$

ove n_0 caratterizza il *cladding* e $\delta n(x)/n_0 \ll 1$ tale che il termine di accoppiamento delle polarizzazioni nella HE risulti trascurabile e $n^2(x) \simeq n_0 + 2n_0\delta n(x)$. Consideriamo una guida a profilo d'indice graduale $\delta n(x)$ (*Graded Index*, GRIN) [2] di tipo parabolico: $\delta n(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$. Diversamente dalle guide con indice a gradino (*step-index*) basate sul fenomeno di riflessione interna - che, nell'ambito dell'ottica di Fourier, sono conseguenze macroscopiche delle soluzioni evanescenti alla PE - il confinamento nella guida GRIN, è reso possibile da un processo di rifrazione continua che piega il fascio luminoso, soggetto in ogni punto del percorso, su scala microscopica, alla legge di Snell. Possiamo individuare i termini α , β , γ che rendano il profilo $n(x)$ tale da impedire al fascio gaussiano di larghezza w_0 di diffrangere nella guida GRIN, ossia richiediamo che

$$E(x, z, t) = E_\omega(x, z)e^{-i\omega t} = A_\omega(x, z)e^{ikz - i\omega t}$$

¹Si lavora nel seguito con fasci monocromatici, per cui si sottende la dipendenza di n da ω .

con

$$k = \frac{\omega}{c} n_0 \quad \text{e} \quad A_\omega(x, z) = A_\omega(x, z=0) = A_0 e^{-\frac{(x-x_0)^2}{w_0^2}}, \quad (4.1)$$

sia un modo stazionario (fondamentale) della guida. Sostituendo l'*ansatz* nella PE (3.2), si ottiene

$$-\frac{i}{2k} \left(-\frac{2}{w_0^2} + \frac{4x_0^2}{w_0^4} - \frac{8x_0}{w_0^4}x + \frac{4}{w_0^4}x^2 \right) = i \frac{k}{n_0} (\alpha x^2 + \beta x + \gamma).$$

Eguagliando i termini aventi stesso ordine in x , si ottengono tre equazioni da cui, definendo

$$R \equiv \frac{w_0}{\sqrt{2}}, \quad \delta n_0 \equiv \frac{n_0}{k^2 w_0^2} = \frac{\lambda^2}{n_0 (2\pi w_0)^2}, \quad (4.2)$$

segue:

$$\begin{cases} \alpha = -\frac{n_0}{k^2 R^2 w_0^2} \\ \beta = \frac{2n_0 x_0}{k^2 R^2 w_0^2} \\ \gamma = \frac{n_0}{k^2 w_0^2} \left(1 - \frac{x_0^2}{R^2} \right) \end{cases} \Rightarrow \delta n(x) = \delta n_0 \left(1 - \frac{(x-x_0)^2}{R^2} \right)$$

che nel caso $x_0 = 0$ si riduce a

$$\delta n(x) = \delta n_0 \left(1 - \frac{x^2}{R^2} \right), \quad (4.3)$$

ove R è la distanza lungo x in corrispondenza di cui l'intensità del fascio gaussiano sul piano $z = 0$ si riduce di un fattore $1/e$ rispetto al suo valore massimo in $x = 0$. Sostituendo la (4.3) nella PE per un generico $A_\omega(x, z)$ si ottiene

$$\frac{\partial}{\partial z} A_\omega(x, z) = \frac{i}{2k} \frac{\partial^2}{\partial x^2} A_\omega(x, z) - ik \frac{\delta n_0}{n_0} \frac{x^2}{R^2} A_\omega(x, z) + ik \frac{\delta n_0}{n_0} A_\omega(x, z)$$

che riscriviamo, a meno di una fase globale ², come

$$\frac{\partial}{\partial z} \tilde{A}_\omega(x, z) = \frac{i}{2k} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \tilde{A}_\omega(x, z) - i \frac{1}{2} k \Omega^2 x^2 \tilde{A}_\omega(x, z) \quad \text{con} \quad \Omega \equiv \frac{1}{R} \sqrt{2 \frac{\delta n_0}{n_0}} \quad (4.4)$$

in modo da evidenziare l'analogia formale con l'equazione di Schrödinger 1+1D dell'oscillatore armonico

$$\frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) = \frac{i\hbar}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x, t) - \frac{i}{\hbar} \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \psi(x, t).$$

Emergono quindi le seguenti corrispondenze:

$$k\Omega^2 \leftrightarrow \frac{m}{\hbar} \omega^2, \quad \frac{1}{k} \leftrightarrow \frac{\hbar}{m} \quad \Rightarrow \quad \omega \leftrightarrow \Omega = \frac{2}{w_0} \sqrt{\frac{\delta n_0}{n_0}} = \frac{2}{k w_0^2} = \frac{1}{z_R},$$

²Si inserisce una soluzione della forma $\tilde{A}(x, z) = e^{ik \frac{\delta n_0}{n_0} z} A(x, z)$ così da eliminare l'offset quando si deriva rispetto a z .

dove $z_R = n_0 \lambda / \pi w_0^2$ è la lunghezza di Rayleigh del fascio in assenza di confinamento, in un mezzo con indice di rifrazione uniforme n_0 (3.30).

Dalla risoluzione del problema dell'oscillatore armonico quantistico 1D, segue che solo determinati modi di oscillazione trasversa sono ammessi nella guida. In particolare, se E_N è l'autovalore associato a $\psi(x, t) = \psi_0(x) e^{-iE_N t/\hbar}$, gli autovalori corrispondenti ai modi stazionari $\tilde{A}(x, z) = \tilde{A}_0(x) e^{i\beta_N z}$ della guida ottica, a meno di un termine di offset costante $\beta_0 \propto k\delta n_0/n_0$, sono

$$\beta_N = -\Omega \left(N + \frac{1}{2} \right) = -\frac{2\pi}{L_p} \left(N + \frac{1}{2} \right) \quad \text{con} \quad N = 1, 2, 3, \dots$$

dove abbiamo definito

$$L_p \equiv \frac{2\pi}{\Omega} = 2\pi R \sqrt{\frac{n_0}{2\delta n_0}}. \quad (4.5)$$

La costante di propagazione della guida lungo z sarà quindi data da

$$k_{guide} = k - \frac{n_0 \lambda}{\pi w_0^2},$$

per cui ciascun modo stazionario accumula, durante la propagazione, una fase aggiuntiva data, per unità di lunghezza della guida, da

$$\frac{d\phi(z)}{dz} = \frac{n_0 \lambda}{\pi w_0^2} = \frac{1}{z_R} = \left. \frac{d\zeta}{dz} \right|_{z=0},$$

per cui, sebbene il confinamento impedisca al fascio di sviluppare i termini di ampiezza e curvatura tipici dell'evoluzione gaussiana libera descritta in 3.29, esso preserva la pendenza della fase di Gouy $\zeta(z)$, calcolata nel fuoco del fascio libero. Questa costituisce uno *shift* uniforme della rotazione di fase, prefigurandosi come l'analogo ottico dell'energia di punto zero dell'oscillatore armonico [12].

I modi Hermite-Gaussiani della guida, in analogia alle autofunzioni dell'oscillatore armonico 1D, sono

$$\psi_N(x) = \frac{1}{\sqrt{2^N N!}} \left(\frac{m\omega}{\pi \hbar} \right)^{\frac{1}{4}} H_N \left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x \right) e^{-\frac{m\omega}{2\hbar} x^2} \leftrightarrow A_N(x) = \frac{1}{\sqrt{2^N N!}} \left(\frac{k\Omega}{\pi} \right)^{\frac{1}{4}} H_N(\sqrt{k\Omega} x) e^{-\frac{k\Omega}{2} x^2}$$

ove $H_N(x/w_0)$ sono i polinomi di Hermite e $\sqrt{2/(k\Omega)} = w_0$ è la larghezza trasversa del modo fondamentale (gaussiano), mantenuta nella propagazione lungo z [2].

Tuttavia, il fascio gaussiano in ingresso non corrisponde in generale ad un autostato guidato del sistema, sia per la diversa dimensione dello spot che per la curvatura del fronte d'onda, per cui evolverà come sovrapposizione dei modi stazionari della guida:

$$A_\omega(x, z) = \sum_N c_N(\omega) e^{i\beta_N z} A_\omega^{(N)}(x, z),$$

dove ciascun autostato si propaga con velocità di fase leggermente diversa, accumulando uno sfasamento aggiuntivo rispetto a $-n_0 \lambda z / \pi w_0^2$, associato al modo fondamentale, e dando luogo a un fenomeno di battimento lungo la direzione assiale [12].

Per studiare l'evoluzione della larghezza del fascio $w(z)$, si considera quindi, come soluzione gaussiana non stazionaria della PE, il pacchetto gaussiano

$$A_\omega(x, z) = \sqrt{\frac{w_0}{w(z)}} e^{-\frac{x^2}{w^2(z)}} e^{i\phi(z)x^2}$$

che, sostituito nella (4.4), fornisce, a meno di una fase globale, un'equazione differenziale³ per $w(z)$, nota come equazione di Emarkov [6]:

$$\frac{d^2 w}{dz^2} + \Omega^2 w = \frac{4}{k^2 w^3},$$

le cui soluzioni⁴, per $w(z=0) = w_0$, sono funzioni periodiche in z del tipo:

$$w(z) = w_0 \left[\cos^2[\Omega z] + \frac{1}{(\Omega z_R)^2} \sin^2[\Omega z] \right]^{\frac{1}{2}},$$

rappresentanti il *respiro* del *waist* durante la propagazione. La porzione di fascio soggetta all'indice di rifrazione parabolico $\delta n(x)$ *rimbalza* come in una buca di potenziale. La frequenza spaziale Ω con cui avviene l'oscillazione trasversa determina il *self-imaging period* definito in (4.5), ossia la distanza lungo z dopo di cui il fascio luminoso, soggetto al potenziale ottico armonico, completa un ciclo di focalizzazione e defocalizzazione, riproducendo il profilo spaziale iniziale. Si osservi che mentre nello spazio libero il fascio si allarga indefinitamente secondo la (3.29), nel mezzo GRIN esso subisce auto-focalizzazione periodica (*self-imaging*), ricollimandosi ogni $L_p = 2\pi/\Omega$ ($L_p/2$ in intensità) [2], come illustrato in figura 4.1 dal risultato di una simulazione numerica (Appendice B).

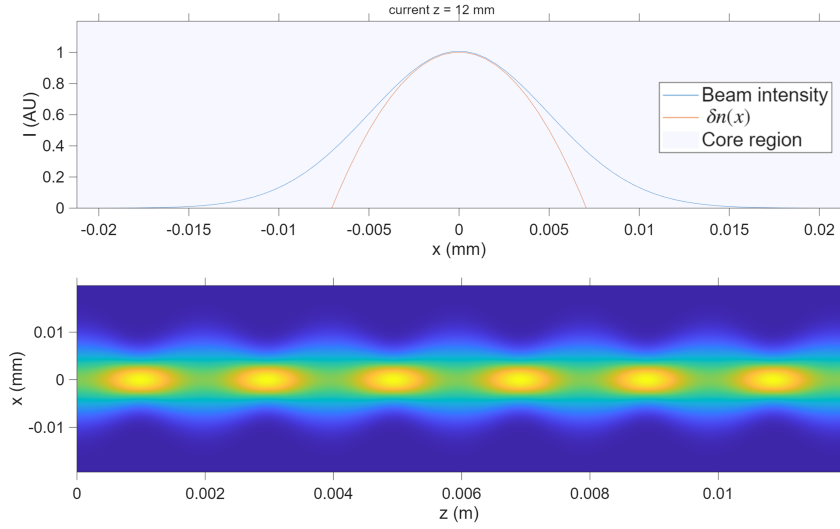
Nella trattazione finora effettuata abbiamo considerato il caso ideale di guida infinitamente estesa. Tuttavia, imponendo che $\delta n(x) \geq 0$, come richiesto nei dielettrici standard, la (4.3) fornisce il vincolo

$$|x - x_0| \leq \sqrt{R^2 - x_0^2}$$

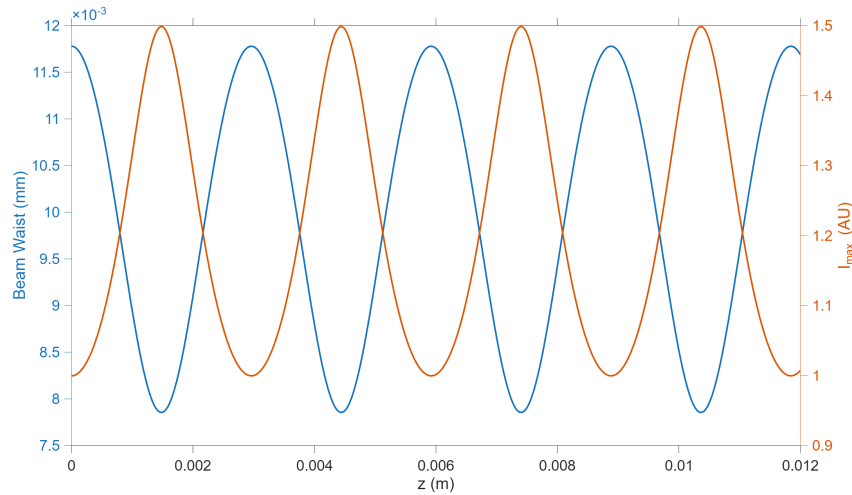
che definisce un limite superiore per la larghezza trasversa della guida. Ponendo $x_0 = 0$, risulta in particolare $R_{core} \leq R < w_0$, per cui la parte più esterna del campo ottico si estenderà oltre il *core*, dando luogo, in corrispondenza dell'interfaccia, ad un campo evanescente, responsabile del fenomeno di riflessione totale interna. Si tratterà dunque di risolvere il problema formalmente analogo a quello di una buca di potenziale finita con andamento quadratico in x .

³Eguagliando i termini di ordine x^2 e x^0 si ottengono due equazioni differenziali di primo ordine per $\phi(z)$ e $w(z)$, da cui, eguagliando parte reale e parte immaginaria, si ricava l'ODE per $w(z)$.

⁴Effettuando un cambio di variabile $u(z) = w^2(z)$ ci si riconduce all'equazione di Riccati, risolubile analiticamente.



(a) **In alto**, profilo trasverso dell'intensità del fascio (curva blu) e profilo d'indice della guida (curva arancione) in $z = 12$ mm. **In basso**, mappa di $I(x, z)$ durante la propagazione nel piano $x - z$.

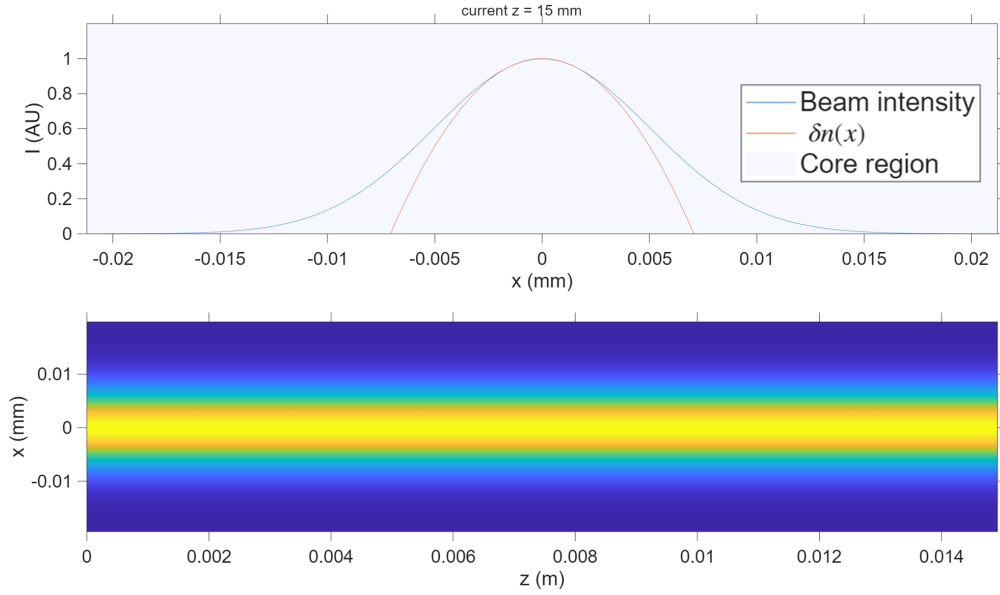


(b) Fasi di focalizzazione e defocalizzazione nell'evoluzione del *waist* $w(z)$ del fascio gaussiano (curva blu) e dell'intensità massima (curva arancione) lungo la direzione di propagazione z .

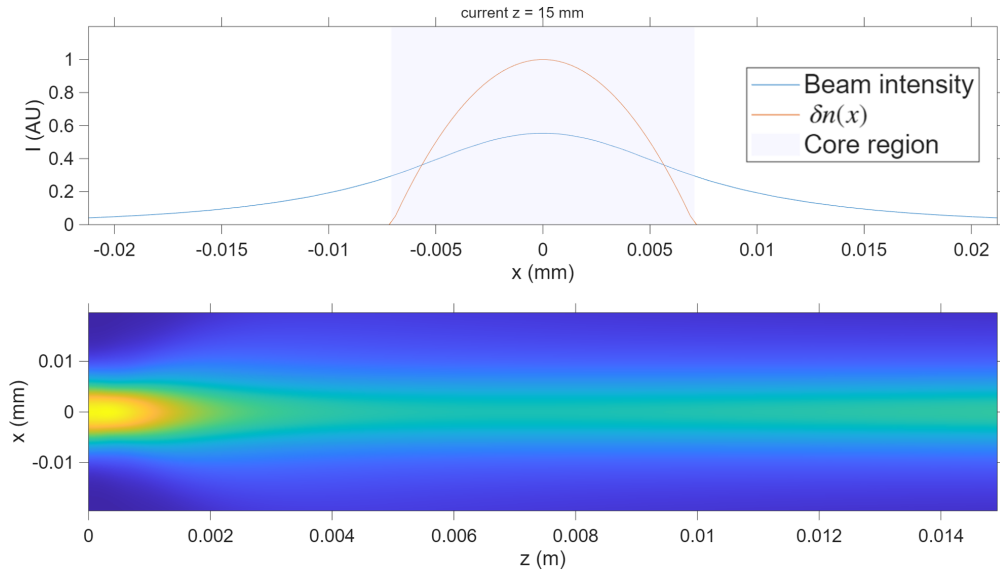
Figura 4.1. Fenomeno del *self-imaging* nell'evoluzione di un fascio gaussiano con $\lambda = 500$ nm, $x_0 = 0$, $w_0 = 7$ μ m, nella propagazione lungo z in guida GRIN infinitamente estesa con $\delta n_0 = 9.5 \cdot 10^{-5}$, $n_0 = 1.5$, $R \simeq 7.1$ μ m, $L_p \simeq 3$ mm.

A titolo esemplificativo, le figure 4.2 e 4.3 offrono un confronto tra l'evoluzione di un fascio gaussiano, corrispondente al modo fondamentale di una guida GRIN ideale, nel caso fittizio di propagazione lungo la guida infinita in cui è stato concepito, e l'evoluzione nel caso realistico di confinamento in un *core* di estensione finita. Nella situazione ideale, il fascio risulta perfettamente confinato, caratterizzato da oscillazioni trascurabili di $I_{\max}(z) \simeq I_{\max,0}$ e $w(z) \simeq w_0$. Al contrario, la finitezza del *core* fa sì che l'energia si redistribuisca tra i vari modi (non più gaussiani), con-

centrandosi in gran parte nei modi più bassi, più stabili e coerenti, mentre i modi più alti, debolmente confinati, disperdono energia fuori dal *core*. Intorno a $z \simeq 0.01$ m, a seguito di una fase di disadattamento iniziale del fascio in ingresso, le oscillazioni si regolarizzano convergendo ai valori caratteristici del modo fondamentale della guida.

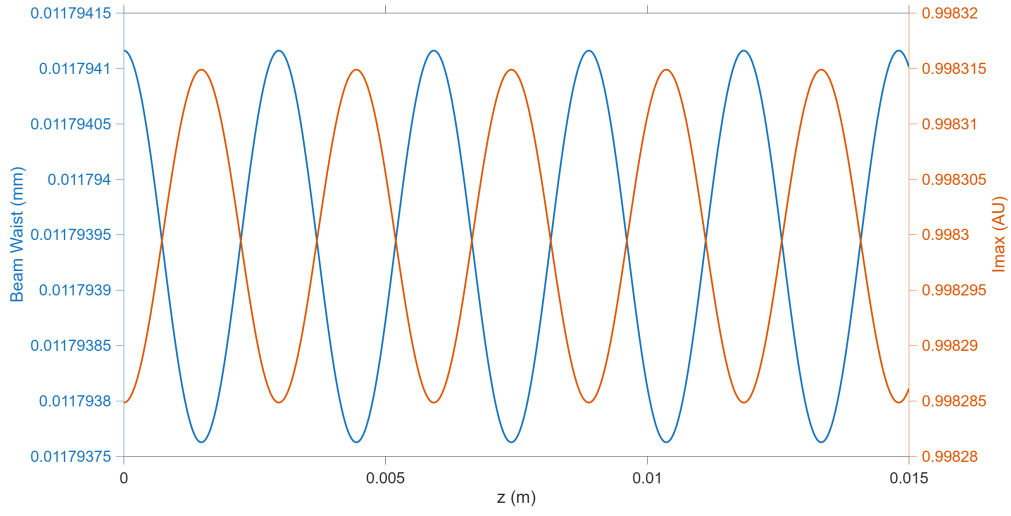


(a) *Core* infinitamente esteso



(b) $R_{core} = R$

Figura 4.2. Evoluzione di un fascio gaussiano con $\lambda = 500$ nm, $x_0 = 0$, $w_0 = 10$ μ m, nella propagazione lungo z in guida GRIN con $\delta n_0 = 9.5 \cdot 10^{-5}$, $R = w_0/\sqrt{2} \simeq 7.1$ μ m, circondata da un mezzo con $n_0 = 1.5$. **In alto**, profilo trasverso dell'intensità del fascio (curva blu) e profilo d'indice della guida (curva arancione) in $z = 15$ mm. **In basso**, mappa di $I(x, z)$ durante la propagazione nel piano $x - z$.



(a) Core infinitamente esteso

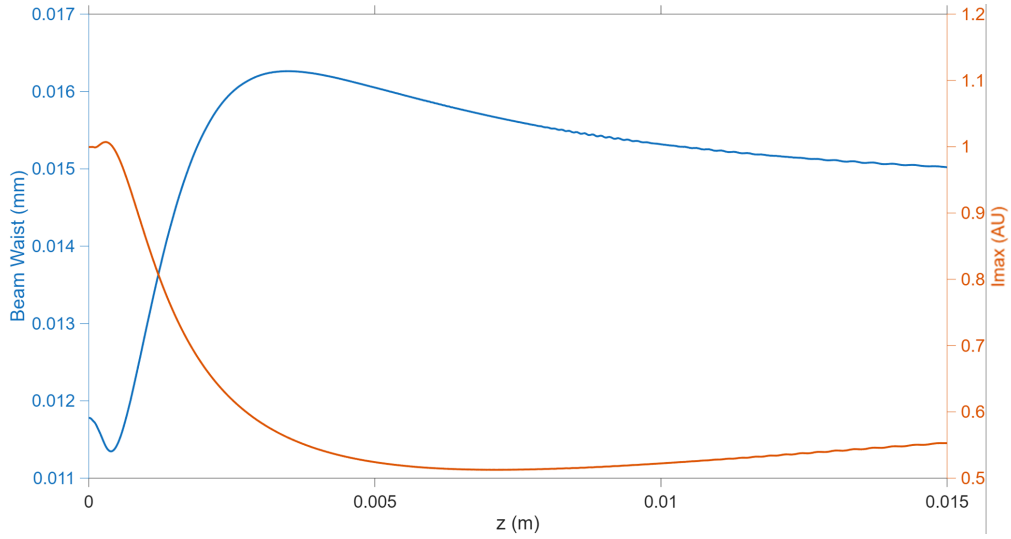
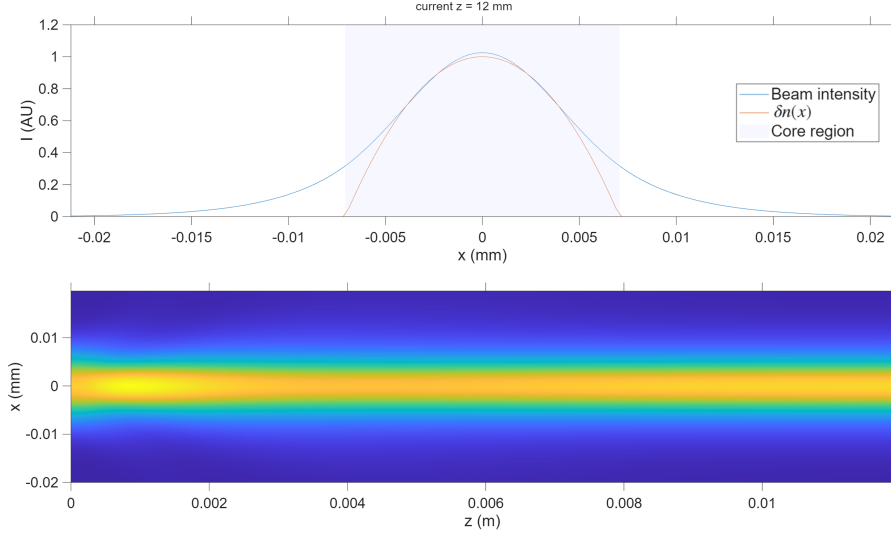
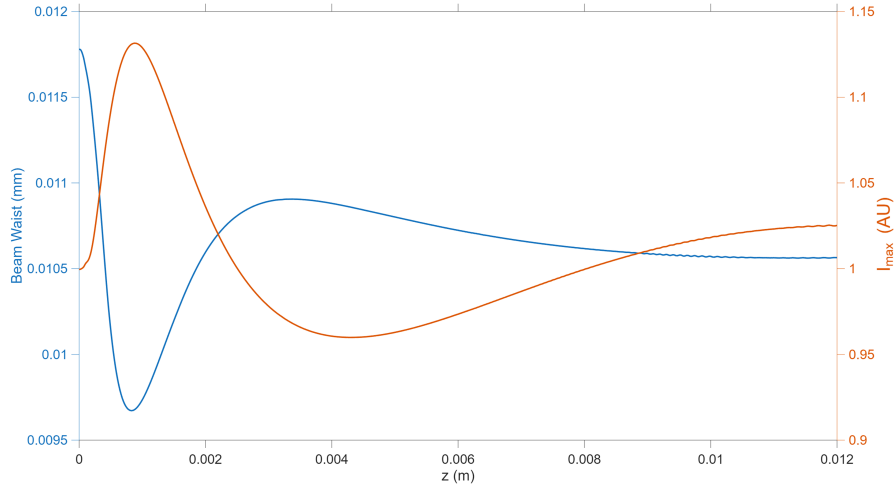
(b) $R_{\text{core}} = R$

Figura 4.3. Evoluzione del *waist* $w(z)$ (curva blu) e dell'intensità massima (curva arancione) di un fascio gaussiano con $\lambda = 500$ nm, $x_0 = 0$, $w_0 = 10$ μm , nella propagazione lungo z in guida GRIN con $\delta n_0 = 9.5 \cdot 10^{-5}$, $R = w_0/\sqrt{2} \simeq 7.1$ μm , circondata da un mezzo con $n_0 = 1.5$.

La finitezza del *core* ha conseguenze anche sul *self-imaging*, producendo un respiro quasi periodico di un generico fascio gaussiano, come illustrato in figura 4.4. Il fascio evolve come sovrapposizione di più modi trasversi che interferiscono tra loro, dando luogo a oscillazioni lente e irregolari di $I_{max}(z)$ e $w(z)$.



(a) In alto, profilo trasverso dell'intensità del fascio (curva blu) e profilo d'indice della guida (curva arancione) in $z = 12$ mm. In basso, mappa di $I(x, z)$ durante la propagazione nel piano $x - z$.



(b) Fasi di adattamento e di stabilizzazione modale nell'evoluzione del *waist* $w(z)$ del fascio gaussiano (curva blu) e dell'intensità massima (curva arancione) lungo la direzione di propagazione z .

Figura 4.4. Evoluzione di un fascio gaussiano con $\lambda = 500$ nm, $x_0 = 0$, $w_0 = 7$ μ m, nella propagazione lungo z in guida GRIN con $\delta n_0 = 9.5 \cdot 10^{-5}$, $R \simeq 7.1$ μ m, $R_{core} = R$, circondata da un mezzo con $n_0 = 1.5$.

4.2 Accoppiamento modale ed effetto tunnel ottico

In questa sezione vogliamo illustrare il funzionamento di uno dei dispositivi comunemente utilizzati in Fotonica integrata, ovvero l'accoppiatore modale direzionale, sfruttato per trasferire potenza tra due o più guide d'onda attraverso l'accoppiamento evanescente. Facendo avvicinare lentamente⁵ due guide d'onda, il sistema si trasforma adiabaticamente in una hamiltoniana a due buche. Nella zona di accoppiamento, le code evanescenti di un modo confinato in una guida possono subire effetto tunnel, ovvero penetrare nello spazio tra le due guide vicine, trasferendo energia all'altra guida. Affinché l'accoppiamento tra modi sia possibile, occorre che essi siano in *sincronismo di fase*, ossia che le costanti di propagazione associate a ciascuna guida isolata siano le stesse, condizione naturalmente verificata se le due guide sono identiche [10].

Consideriamo i modi localizzati di due guide identiche $A_1(x, z)$, $A_2(x, z)$. A differenza dei modi stazionari di una guida isolata, i modi relativi alle due guide, a causa del reciproco *displacement*, non saranno mutuamente ortogonali; pertanto, l'accoppiamento modale direzionale può essere descritto solo in termini dei modi associati alla struttura composta.

Supponiamo di eccitare solo la prima guida in $z = 0$. Il campo iniziale, dato dal modo di una singola guida, evolverà quindi come sovrapposizione dei modi pari A_+ e dispari A_- del sistema composto - che supponiamo noti - ciascuno dei quali possiede una costante di propagazione leggermente diversa, rispettivamente β_+ e β_- . Se $A_{\pm}$ sono in fase in $z = 0$, a distanza

$$z = L_c = \frac{\pi}{|\Delta\beta_{\pm}|}, \quad \text{con} \quad \Delta\beta_{\pm} = \beta_+ - \beta_-$$

essi risulteranno in opposizione di fase. Se dunque il campo iniziale era descrivibile come somma dei modi $A_{\pm}$, il campo in $z = L_c$ sarà dato dalla differenza tra i due modi e, in virtù della parità delle due soluzioni, la potenza ottica verrà trasferita interamente all'altra guida, come illustrato in figura 4.5. La distanza L_c è pertanto detta lunghezza di accoppiamento evanescente.

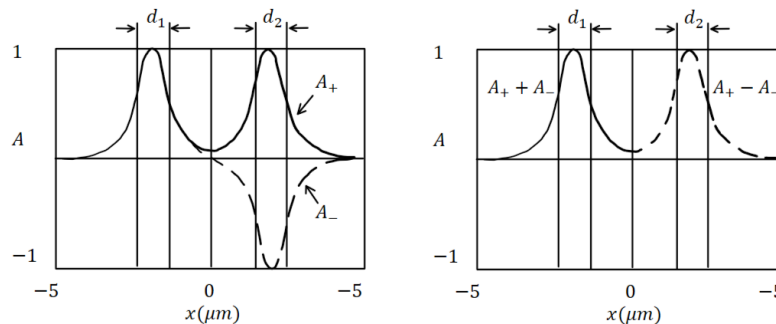


Figura 4.5. A sinistra: modi simmetrici e antisimmetrici dell'accoppiatore direzionale. A destra: campi di somma e di differenza.

⁵Per 'lentamente' si intende con una variazione spaziale tale che il sistema rimanga nello stesso autostato per tutta la durata del processo, sebbene la natura dello stesso possa cambiare nell'evoluzione [13].

Assumiamo che A_i formino un set completo di modi della struttura composta, ossia che $\langle A_i, A_j \rangle = \delta_{ij}$, dove il prodotto interno tra i due campi si svolge integrando sulla sezione trasversa delle due guide. Decomponendo i campi delle due guide in $z = 0$ nei modi del sistema composto si ha:

$$\begin{cases} A_1 = \alpha_1 A_+ + \alpha_2 A_- \\ A_2 = \alpha_3 A_+ + \alpha_4 A_- \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} A_+ = \frac{\alpha_4 A_1 - \alpha_2 A_2}{\alpha_1 \alpha_4 - \alpha_2 \alpha_3} \\ A_- = \frac{-\alpha_3 A_1 + \alpha_1 A_2}{\alpha_1 \alpha_4 - \alpha_2 \alpha_3} \end{cases}$$

con α_1, α_2 tali che $\langle A_1, A_1 \rangle = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 = 1$, $\langle A_2, A_2 \rangle = \alpha_3^2 + \alpha_4^2 = 1$, mentre l'*overlap* tra i due campi $\langle A_1, A_2 \rangle = \alpha_1 \alpha_3 + \alpha_2 \alpha_4$ sarà in generale non nullo. Durante la propagazione lungo z , in ciascun punto dell'accoppiatore, il sistema è descritto dalla seguente sovrapposizione:

$$c_1(z)A_1 + c_2(z)A_2 = \alpha_+ A_+ e^{i\beta_+ z} + \alpha_- A_- e^{i\beta_- z},$$

da cui, sostituendo A_1 e A_2 con le (4.2) e confrontando i coefficienti dei modi $A_\pm$, segue:

$$\begin{aligned} \alpha_1 c_1(z) + \alpha_3 c_2(z) &= \alpha_+ e^{i\beta_+ z} \\ \alpha_2 c_1(z) + \alpha_4 c_2(z) &= \alpha_- e^{i\beta_- z} \end{aligned}$$

Derivando le due equazioni rispetto a z ed eliminando α_+, α_- , si ottiene:

$$\begin{aligned} \alpha_1 \frac{dc_1}{dz} + \alpha_3 \frac{dc_2}{dz} &= i\beta_+ (\alpha_1 c_1 + \alpha_3 c_2) \\ \alpha_2 \frac{dc_1}{dz} + \alpha_4 \frac{dc_2}{dz} &= i\beta_- (\alpha_2 c_1 + \alpha_4 c_2) \end{aligned}$$

riscrivibili in forma matriciale come

$$\frac{d}{dz} \begin{pmatrix} c_1(z) \\ c_2(z) \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} \beta_1 & k_{12} \\ k_{21} & \beta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1(z) \\ c_2(z) \end{pmatrix}. \quad (4.6)$$

con

$$\begin{aligned} \beta_1 &\equiv \frac{\alpha_1 \alpha_4 \beta_+ - \alpha_2 \alpha_3 \beta_-}{\alpha_1 \alpha_4 - \alpha_2 \alpha_3}, & \beta_2 &\equiv \frac{\alpha_1 \alpha_4 \beta_- - \alpha_2 \alpha_3 \beta_+}{\alpha_1 \alpha_4 - \alpha_2 \alpha_3}, \\ k_{12} &\equiv \frac{\alpha_3 \alpha_4 \Delta\beta_\pm}{\alpha_1 \alpha_4 - \alpha_2 \alpha_3}, & k_{21} &= -\frac{\alpha_1 \alpha_2 \Delta\beta_\pm}{\alpha_1 \alpha_4 - \alpha_2 \alpha_3}, \end{aligned}$$

dove β_1, β_2 sono le costanti di propagazione dei campi non accoppiati A_1, A_2 , mentre i termini fuori diagonale k_{12}, k_{21} sono i coefficienti di accoppiamento, proporzionali alla differenza tra le costanti di propagazione dei modi considerati e determinati, a livello fisico, dalle proprietà delle singole guide. Seguono due equazioni differenziali accoppiate:

$$\begin{cases} \frac{d}{dz} c_1(z) = i\beta_1 c_1(z) + ik_{12} c_2(z) \\ \frac{d}{dz} c_2(z) = i\beta_2 c_2(z) + ik_{21} c_1(z) \end{cases}$$

La differenza tra i due autovalori $\Delta\beta_\pm = \beta_+ - \beta_-$ misura la distanza modale. Quando le guide sono distanti, i loro modi sono quasi indipendenti, per cui $k_{12} \simeq 0$ e $\beta_+ \simeq \beta_-$, di conseguenza lo splitting modale è nullo. Viceversa, l'accoppiamento

è più forte al crescere di $\Delta\beta$. Si noti che, nel caso in cui le due guide vengano gradualmente avvicinate lungo z , l'accoppiamento $k_{12}(z)$ e lo sfasamento $\Delta\beta_{12} \equiv \beta_1 - \beta_2$ tra le costanti di propagazione delle due guide isolate sono funzioni di z . In tal caso, $\Delta\beta_{\pm}(z)$ fornisce un parametro di adiabaticità tramite cui il criterio adiabatico [13] si formalizza nella condizione

$$\left| \frac{1}{\Delta\beta_{\pm}(z)} \frac{d\theta(z)}{dz} \right| \ll 1, \quad \text{con} \quad \tan(2\theta(z)) = \frac{2k_{12}(z)}{\Delta\beta_{12}(z)}$$

dove $2\theta(z)$ è l'angolo di rotazione necessario per diagonalizzare la matrice dell'hamiltoniano ottico e regola dunque la rapidità con cui avvengono le transizioni tra modi. Per un accoppiatore simmetrico, ossia con $\beta_1 = \beta_2 \equiv \beta$, $k_{12} = k_{21} \equiv k$ - che equivale a richiedere $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1/\sqrt{2}$, $\alpha_4 = -1/\sqrt{2}$ - si verifica facilmente che gli autovalori della matrice 4.6 sono - come atteso per coerenza - $\lambda_{\pm} = \beta \pm k = \beta_{\pm}$, i cui autostati associati $A_{\pm}$ formano la base naturale in cui le due equazioni si disaccoppiano [10].

In tale base, il sistema si riscrive come

$$\frac{d}{dz} \begin{pmatrix} \alpha_+(z) \\ \alpha_-(z) \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} \beta_+ & 0 \\ 0 & \beta_- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_+(z) \\ \alpha_-(z) \end{pmatrix},$$

le cui soluzioni sono

$$\alpha_{\pm}(z) = \alpha_{\pm}(0) e^{i\beta_{\pm}z}. \quad (4.7)$$

Tornando alla base originaria e imponendo le condizioni iniziali $c_1(0) = 1$, $c_2(0) = 0$, si ottiene

$$\begin{cases} c_1(z) = e^{i\beta_+z} \cos(\beta_+z) \\ c_2(z) = -ie^{i\beta_+z} \sin(\beta_+z) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |c_1(z)|^2 = \frac{1}{2} (1 + \cos(2\beta_+z)) \\ |c_2(z)|^2 = \frac{1}{2} (1 - \cos(2\beta_+z)) \end{cases}$$

ove si è fatto ricorso nell'ultimo passaggio alle formule di bisezione.

Si propone nel seguito uno studio numerico dell'accoppiamento modale tra due guide d'onda GRIN paraboliche in 2D. Definiamo z l'asse di propagazione e x la dimensione trasversa e indichiamo con $\pm d(z)$ le posizioni dei centri delle due guide rispetto all'asse di simmetria $x = 0$ e con $L_z = L_{t,in} + L_{int} + L_{t,out} = 2L_t + L_{int}$ la lunghezza del tratto percorso lungo z , data dalla somma della *taper lenght* in ingresso e, simmetricamente, in uscita e della *interaction lenght* dove $d = d_{min}$. Per garantire un avvicinamento e un successivo allontanamento dolce e simmetrico, costruiamo un profilo cosinusoidale per la spaziatura inter-guida:

$$d(z) = A + B \cos\left(\frac{2\pi z}{L_t}\right),$$

da cui, imponendo le condizioni al contorno $d(0) = d_{max}$, $d(L_t) = d_{min}$ in ingresso e $d(0) = d_{min}$ - $d(L_t) = d_{max}$ in uscita effettuando uno *shift* della variabile z secondo la trasformazione $z' = z - (L_t + L_{int})$, si ottiene:

$$A = \frac{(d_{max} + d_{min})}{2}, \quad B = \pm \frac{(d_{max} - d_{min})}{2} \quad \text{in avvicinamento/allontanamento}$$

Fissati la lunghezza d'onda λ e il *waist* w_0 del fascio gaussiano in ingresso nella prima guida, si considera inizialmente una configurazione con le due guide a distanza reciproca costante, e soggette alle condizioni di confinamento modale discusse in 4.1, al fine di individuare il valore del parametro d_{max} tale da garantire l'indipendenza tra le due guide fuori dalla regione di accoppiamento.

Successivamente, si adotta un profilo cosinusoidale $d(z)$ caratterizzato da

$$L_t = n \cdot L_c \quad , \quad L_{int} = m \cdot L_c$$

con d_{min} , L_c , m e n inizialmente assegnati in maniera arbitraria. Il parametro n viene regolato in modo che la curvatura della guida non comprometta il confinamento del fascio, evitando riflessioni di disadattamento indesiderate. Si determina quindi il punto di innesco dell'accoppiamento $\tilde{d}$, in corrispondenza della coordinata longitudinale $\tilde{z}$, alla quale ha inizio il trasferimento di potenza, definito in base ad una soglia prefissata, arbitrariamente piccola, per la potenza P_2 nella seconda guida. Posta $d_{min} = \tilde{d}$, si procede con la calibrazione della lunghezza di accoppiamento L_c , iterando l'esecuzione del codice fino alla convergenza al valore che minimizza le perdite di potenza, in parte imputabili a errori numerici accumulati nella propagazione. Infine, la lunghezza del tratto intermedio L_{int} viene variata in funzione della frazione di potenza da trasferire alla seconda guida o del numero di oscillazioni desiderato, procedendo per ottimizzazione iterativa.

Si esegue la simulazione per $L_{int} = L_c - 2(L_t - \tilde{z})$ dove la quantità sottratta tiene conto del contributo di trasferimento di potenza che si verifica nel segmento terminale del tratto di avvicinamento e in quello iniziale del tratto di allontanamento delle due guide d'onda. Si riporta in figura 4.6 il profilo della variazione locale dell'indice di rifrazione $\delta n(x, z)$ delle due guide rispetto all'indice di fondo n_0 .

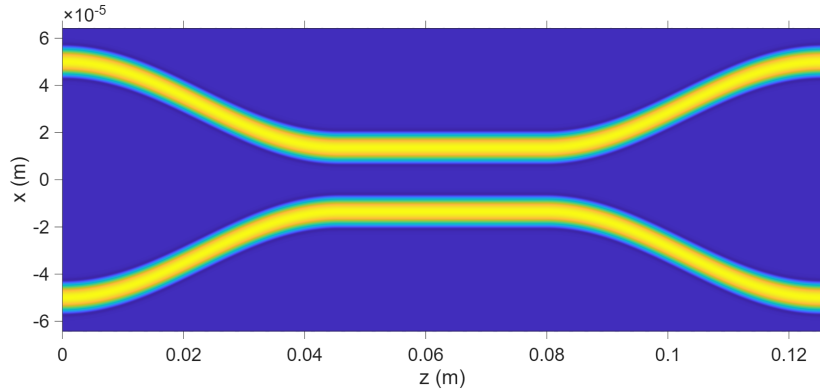
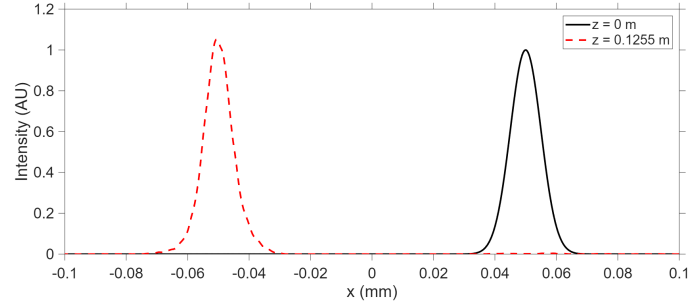
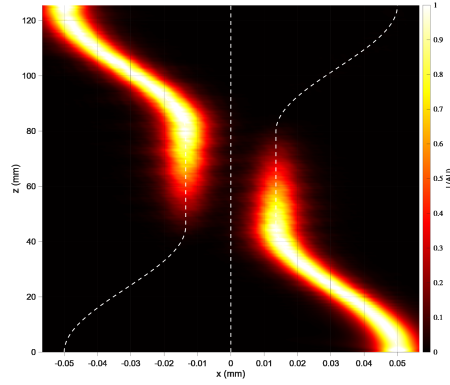


Figura 4.6. Mappa di $\delta n(x, z)$ per due guide ottiche GRIN paraboliche con $R_{guide} = 7.07 \mu\text{m}$, $\delta n_0 = 9.5 \cdot 10^{-5}$, $n_0 = 1.5$, $\delta n_0/n_0 = 6.3 \cdot 10^{-5}$, la cui separazione trasversale varia in modo cosinusoidale da $d_{max} = 50 \mu\text{m}$ a $d_{min} = 13.5 \mu\text{m}$ e viceversa. I valori maggiori di δn sono indicati in giallo, mentre quelli minimi in blu.

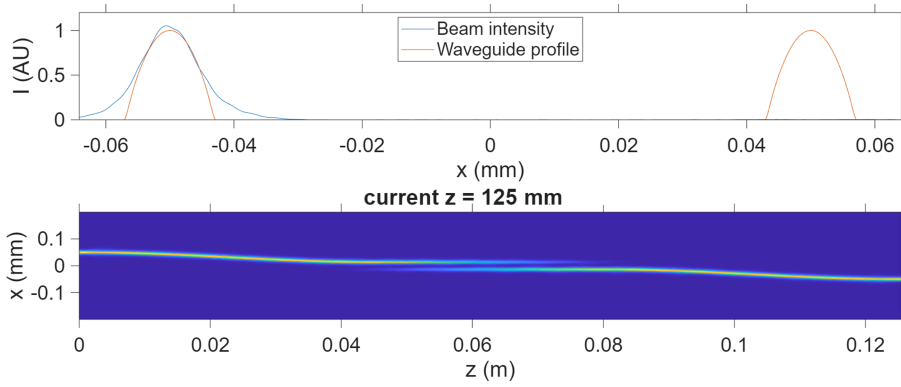
Come mostrato in figura 4.7, l'eccitazione, inizialmente confinata nella guida di destra, viene trasferita, nella regione di accoppiamento, alla guida di sinistra.



(a) Profili trasversali di intensità del fascio in ingresso e in uscita, con evidenza dello spostamento del fascio dovuto all'accoppiamento modale.



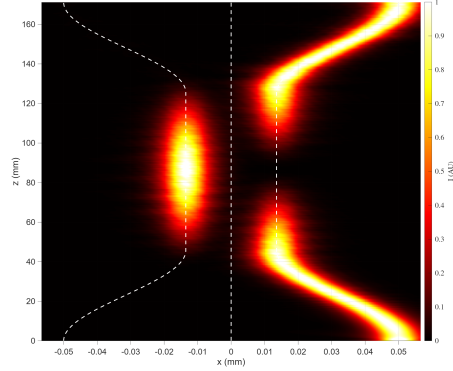
(b) *Heatmap* dell'evoluzione della distribuzione spaziale di intensità del fascio lungo l'asse di propagazione z .



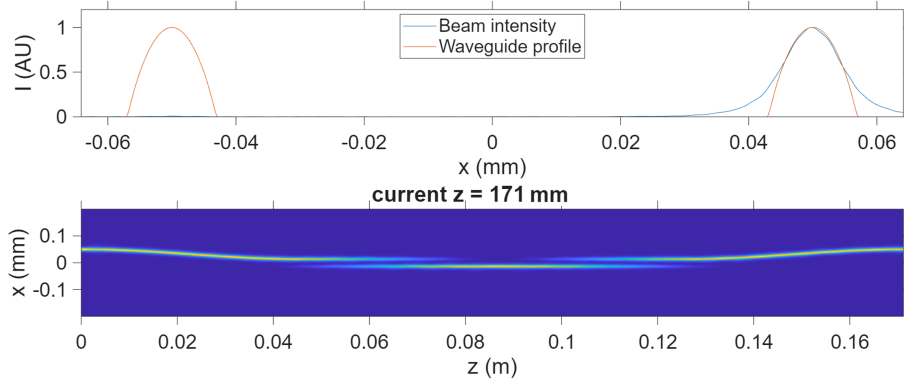
(c) **In alto**, distribuzione di intensità e profilo dell'indice di rifrazione trasverso in corrispondenza di $z = 125$ mm. **In basso**, mappa di $I(x, z)$ durante la propagazione nel piano $x - z$.

Figura 4.7. Simulazione numerica di accoppiamento modale tra due guide d'onda GRIN paraboliche di raggio $R_{guide} = 7.07 \mu\text{m}$, $d_{min} = \tilde{d} = 13.5 \mu\text{m}$, $d_{max} = 50 \mu\text{m}$, $L_t = L_c = 341$ mm, $L_{int} = L_c - 2(\tilde{d} - L_t) = 341$ mm, attraversate da un fascio gaussiano con $\lambda = 500$ nm, $w_0 = 10 \mu\text{m}$.

Di seguito si presentano i risultati della simulazione effettuata per $L_{int} = 2L_c - 2(L_t - \tilde{z})$. Come atteso, si rileva un'oscillazione completa della potenza tra le due guide d'onda, al termine della quale il modo guidato risulta nuovamente confinato nella guida di partenza.



(a) *Heatmap* dell'evoluzione della distribuzione spaziale di intensità del fascio lungo l'asse di propagazione z .



(b) **In alto**, distribuzione di intensità e profilo dell'indice di rifrazione trasverso in corrispondenza di $z = 171$ mm. **In basso**, mappa di $I(x, z)$ durante la propagazione nel piano $x - z$.

Figura 4.8. Simulazione numerica di accoppiamento modale tra due guide d'onda GRIN paraboliche di raggio $R_{guide} = 7.07 \mu\text{m}$, $d_{min} = \tilde{d} = 13.5 \mu\text{m}$, $d_{max} = 50 \mu\text{m}$, $L_t = L_c = 341$ mm, $L_{int} = 2L_c - 2(\tilde{d} - L_t) = 171$ mm, attraversate da un fascio gaussiano con $\lambda = 500$ nm, $w_0 = 10 \mu\text{m}$.

L'accoppiamento evanescente tra guide d'onda costituisce un'alternativa alle tradizionali reti ottiche basate su sequenze di *beam splitter* utilizzate negli esperimenti di *Boson Sampling*, una tecnica computazionale quantistica che sfrutta l'interferenza di fotoni indistinguibili all'interno di reti ottiche lineari per generare distribuzioni di uscita non riproducibili da computer classici in tempi ragionevoli [9]. In tali architetture, la trasformazione unitaria sui modi, che determina la distribuzione di interferenza multi-bosonica, è governata dall'Hamiltoniano ottico del sistema, tramite i coefficienti di accoppiamento (termini fuori diagonale in (4.6)) e le costanti di propagazione (termini diagonali di (4.6)) lungo la direzione di propagazione, a loro volta fissati dalla distanza e dalla geometria delle guide.

Conclusioni

Dallo studio effettuato è emerso come, a partire dalle equazioni di Maxwell e dalla loro riduzione all'equazione di Helmholtz in mezzi lineari isotropi - effettuando sul mezzo l'ipotesi di quasi omogeneità e sul campo l'ipotesi di inviluppo a variazione lenta (SVEA) che si declina nel regime di quasi monocromaticità nel dominio temporale e di parassialità nel dominio spaziale - il confinamento spazio-temporale degli impulsi luminosi obbedisca alla medesima struttura matematica dell'equazione di Schrödinger, le cui soluzioni vengono scandagliate nei rispettivi domini coniugati dalla trasformazione di Fourier, gettando così le basi per una lettura comparativa delle due descrizioni.

Nel dominio temporale, l'espansione al secondo ordine di $\beta(\omega)$ attorno alla portante evidenzia i due parametri che governano la propagazione dell'inviluppo: la velocità di gruppo β_1 , che determina la traslazione rigida dell'impulso, e la dispersione della velocità di gruppo β_2 , responsabile dell'allargamento temporale e dell'insorgere del *chirp*, su una scala naturale fissata dalla lunghezza di dispersione. La presenza di non linearità Kerr induce una dipendenza della fase dall'intensità (SPM), con conseguente allargamento dello spettro controllato dalla lunghezza non lineare.

Nel dominio spaziale, l'ipotesi di inviluppo dipendente dalle coordinate spaziali trasverse alla direzione di propagazione e l'espansione dell'indice di rifrazione al primo ordine in δn fa sì che, in regime parassiale, l'HE si riduca all'equazione parabolica, dove il *laplaciano* gioca il ruolo di sorgente di diffrazione. Una delle soluzioni a tale equazione rappresenta la diffrazione di Fresnel che, nell'ipotesi ulteriore di campo lontano (regime di Fraunhofer), si riduce alla trasformata di Fourier 2D del campo in ingresso. Nel caso notevole di impulso gaussiano, il passaggio dal regime di Fresnel a quello di Fraunhofer è fissato dalla lunghezza di Rayleigh.

Nella trattazione proposta emerge il parallelismo strutturale tra confinamento spaziale e temporale. Il termine dispersivo $-i(\beta_2/2)\partial_T^2$ nell'equazione dell'inviluppo temporale corrisponde al termine diffrattivo $i/(2k)\nabla_\perp^2$ nell'equazione parabolica; le lunghezze caratteristiche, la lunghezza di dispersione e la lunghezza di Rayleigh, marcano, nei rispettivi domini, la transizione tra regime di traslazione quasi-rigida e regime di allargamento. L'analogia si estende anche alle peculiarità dell'evoluzione del fascio gaussiano: nel tempo, a partire dalla condizione *transform-limited*, l'inviluppo temporale si allarga, accumulando *chirp* e uno sfasamento crescente lungo z per effetto della GVD; nello spazio, dalla cintola del fascio - dove il *waist* è minimo e il fronte d'onda piano - la condizione di confinamento introduce nella propagazione l'allargamento spaziale del fascio, insieme alla curvatura del fronte

d'onda e a uno slittamento di fase lungo z (Gouy). Dal punto di vista numerico, l'evoluzione dell'impulso lungo la direzione di propagazione è, in entrambi i casi, implementata con la stessa logica (SSFM/BPM) mediante due operatori agenti nel dominio temporale/spaziale dell'involuppo, che incorporano separatamente il contributo lineare relativo all'effetto di dispersione/diffrazione e quello locale dovuto a non linearità/disomogeneità dell'indice.

A coronamento dell'analisi svolta, si è studiato il confinamento spaziale di un impulso elettromagnetico in guide d'onda GRIN con profilo d'indice parabolico, che caratterizza dispositivi integrati quali l'accoppiatore modale direzionale. Tramite accoppiamento evanescente, è possibile trasferire potenza tra guide adiacenti con lunghezza di accoppiamento controllata dal profilo d'indice e dalle distanze inter-guida. In questo quadro, l'analogia formale con l'equazione di Shrödinger consente di trasferire nozioni e strategie risolutive nella descrizione dell'effetto tunnel ottico, rivelando come la struttura matematica a cui obbedisce la luce, confinata nello spazio o nel tempo, funga da bussola per la progettazione di architetture fotoniche, fino ad applicazioni di frontiera quali il *Boson Sampling*.

Appendice A – Relazioni utili

Nella trattazione si adotta la convenzione di fase: $e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$.

Per coerenza con la convenzione di fase adottata, le trasformate di Fourier sono definite come segue:

- Trasformata temporale:

$$\tilde{E}(\vec{r}, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{i\omega t} E(\vec{r}, t) \quad E(\vec{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega e^{-i\omega t} \tilde{E}(\vec{r}, \omega)$$

- Trasformata spaziale:

$$\hat{E}(\vec{k}, t) = \int_{\mathbf{R}^3} d\vec{r} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} E(\vec{r}, t) \quad E(\vec{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbf{R}^3} d\vec{k} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \hat{E}(\vec{k}, t)$$

A seguire si riportano alcune relazioni utili impiegate nel corso dell'elaborato:

$$\sqrt{1-x} = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3 - \dots \quad \text{per } |x| < 1 \quad (.8)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ax^2} = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad (.9)$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \vec{v} = -\nabla^2 \vec{v} + \nabla(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) \quad (.10)$$

$$e^{\hat{Z}} = e^{\hat{X}} e^{\hat{Y}}, \quad \hat{Z} = \hat{X} + \hat{Y} + \frac{1}{2} [\hat{X}, \hat{Y}] + \frac{1}{12} [\hat{X}, [\hat{X}, \hat{Y}]] - \frac{1}{12} [\hat{Y}, [\hat{X}, \hat{Y}]] + \dots \quad (.11)$$

$$e^{\frac{\hat{X}}{2}} e^{\hat{Y}} e^{\frac{\hat{X}}{2}} = e^{\hat{Z}'}, \quad \hat{Z}' = \frac{\hat{X}}{2} + \hat{Y} + \frac{\hat{X}}{2} + o(dz^3) \quad (.12)$$

$$\text{rect}(t) = \begin{cases} 1 & |t| \leq \frac{1}{2} \\ 0 & |t| > \frac{1}{2} \end{cases} \quad (.13)$$

$$\text{sinc}(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t} \quad (.14)$$

$$\frac{1}{1+is} = \frac{1-is}{1+s^2} = \frac{1}{\sqrt{1+s^2}} e^{-i \arctan s} \quad (.15)$$

Appendice B - Implementazione numerica in MATLAB

Le simulazioni numeriche presentate nello studio computazionale della propagazione di un impulso in un materiale sono implementate nell'ambiente di calcolo MATLAB (versione R2025a), sfruttando le librerie integrate per la trasformata di Fourier discreta (FFT), la gestione delle matrici e la rappresentazione grafica.

Le equazioni di propagazione sono state risolte numericamente mediante il metodo *Symmetric Split-Step Fourier* (S-SSFM), descritto in 2.4.

Tutti i codici MATLAB utilizzati nelle simulazioni numeriche, comprensivi di script aggiuntivi⁶ e approfondimenti non inclusi nel corpo della tesi (qui brevemente commentati), sono disponibili ai seguenti indirizzi:

- **Propagazione di un impulso gaussiano in un mezzo dispersivo ed effetto dell'assorbimento selettivo con profilo lorentziano.**

La riga di assorbimento scava un *notch* nello spettro in frequenza, centrato in $(\nu_r - \nu_0)$, riducendo l'energia iniziale di ΔE . L'attenuazione selettiva in frequenza induce una distorsione della forma temporale dell'impulso, risultando in un profilo temporale di intensità non più gaussiano.

- **Evoluzione per effetto Kerr di un impulso gaussiano.**
- **Diffrazione di un'onda piana da *slit* 1+1D.**
- **Diffrazione di un'onda piana da apertura esagonale in 1+2D.**
Il pattern di diffrazione presenta a distanze intermedie (Fresnel) una forma esagonale che replica la simmetria rotazionale, discreta, dell'apertura, mentre in lontananza (Fraunhofer) la distribuzione tende ad assumere una forma più radiale, pur mantenendo tracce della geometria originaria.
- **Propagazione di un fascio gaussiano in guida d'onda GRIN a indice di profilo parabolico in 1+1D.**
- **Accoppiamento modale tra due guide d'onda GRIN a indice parabolico in 1+1D**

⁶Funzioni utili:

- | | |
|-------------------------------|-------------------------------------|
| • FourTrasf.m | • fn_gauss.m |
| • fn_fwhm.m | • fn_gaussianMode.m |

Bibliografia

- [1] G. P. Agrawal, *Nonlinear Fiber Optics*, 6th edition, Academic Press, 2013, San Diego.
- [2] G. P. Agrawal, *Optical wave propagation in graded-index waveguides*, Asian Journal of Physics, Vol. 31, 2022, Anita Publications, Delhi–Williamsville.
- [3] G. P. Agrawal, *Self-imaging in multimode graded-index fibers and its impact on nonlinear phenomena*, *Optical Fiber Technology*, vol. 50, 2019, Elsevier, Amsterdam
- [4] G. P. Agrawal, *Space–Time Duality in Optics: Its Origin and Applications*, *Photonics*, 12(6), 611, 2025, Basel, Switzerland.
- [5] E. Del Re, G. Batignani, *Introduction to the Beam Propagation Method. Course Notes for Optics and Laboratory*, Department of Physics, University of Rome “La Sapienza”, 2020.
- [6] M. Cruz, S. Chávez-Cerda, *Laguarre-Gaussian wave propagation in parabolic media*, 2020, Cornell University, Città del Messico
- [7] G.R. Fowles, *Introduction to Modern Optics*, 2th edition, Dover publications, 1989, New York
- [8] E. Hecht, *Optics*, 5th edition, Pearson Education Limited, 2017, Harlow.
- [9] F. Hoch, S. Piacentini, T. Giordani, Z.-N. Tian, M. Iuliano, C. Esposito, A. Camillini, G. Carvacho, F. Ceccarelli, N. Spagnolo, A. Crespi, F. Sciarrino, R. Osellame, *Reconfigurable continuously-coupled 3D photonic circuit for Boson Sampling experiments*, npj Quantum Information, vol. 8, 2022, Nature Publishing Group, London.
- [10] D. Marcuse, *Theory of Dielectric Optical Waveguides*, Academic Press, 1974, New York.
- [11] C. Mencuccini e V. Silvestrini, *Fisica - Elettromagnetismo e ottica*, 2^a edizione, C.E.A., 2017, Milano
- [12] A. E. Siegman, *Lasers*, Revised Edition, University Science Books, Sausalito (CA), 1986.

-
- [13] A. K. Taras, A. Tuniz, M. A. Bajwa, V. Ng, J. M. Dawes, C. G. Poulton, and C. M. de Sterke, *Shortcuts to adiabaticity in waveguide couplers - theory and implementation*, Advances in Physics: X, Taylor & Francis, London.