

Dissertazione di Laurea Triennale SSAS
**Approccio numerico alla propagazione della luce:
Beam Propagation Method**

Relatore: Prof. Batignani Giovanni Studente: Todesco Pietro

Aprile 2023

Indice

1	Trattazione teorica del Beam Propagation Method	3
1.1	L'equazione di Helmholtz	3
1.2	Equazione parabolica	5
1.3	Soluzione equazione parabolica omogenea e disomogenea	7
1.3.1	Caso omogeneo	7
1.3.2	Caso disomogeneo	7
1.4	Il metodo "Split Step Fourier"	8
2	Esempi numerici di Beam Propagation Method	10
2.1	Interferenza tra un'onda piana ed un fascio Gaussiano	10
2.2	Propagazione di luce tramite una lente convessa	18
3	Conclusione	26
4	Appendice	27
5	Bibliografia	28

Introduzione

Nella seguente dissertazione verrà trattata la propagazione di fasci di luce nel vuoto e nella materia tramite un approccio computazionale. Il metodo numerico utilizzato è il Beam Propagation Method (BPM), una tecnica introdotta negli anni '70 al fine di prevedere la propagazione della luce in presenza di numerosi effetti, quali le disomogeneità spaziali dei mezzi attraversati, diffrazione e nonlinearietà. Grazie alla sua versatilità, il BPM può essere utilizzato più in generale anche per simulare setup sperimentali, utilizzati in spettroscopia ed ottica (lineare e non). L'essenza del BPM è risolvere tramite un algoritmo numerico l'equazione parabolica. Quest'ultima altro non è che un'approssimazione dell'equazione delle onde (o equazione di Helmholtz) in cui viene considerato un campo elettrico con un inviluppo lentamente variabile rispetto all'asse di propagazione. Nella prima parte della dissertazione (Capitolo 1) verrà quindi esposto il procedimento per ottenere l'equazione di Helmholtz a partire dalle equazioni di Maxwell nella materia e sotto quali limiti fisici sia possibile approssimarla per ottenere l'equazione parabolica. Verranno quindi discusse e confrontate le soluzioni analitiche e numeriche dell'equazione parabolica ed infine verrà trattato l'algoritmo numerico di risoluzione "Split Step Fourier".

Nella seconda parte della dissertazione (Capitolo 2) verranno discussi due esempi fisici di propagazione della radiazione laser grazie all'utilizzo del BPM ed alla sua implementazione in una serie di script realizzati in Matlab. Il primo esempio trattato consiste nella propagazione di fasci Gaussiani in una regione dello spazio prima tridimensionale e poi bidimensionale; oltre a verificare l'analogia tra previsioni teoriche e numeriche, si è sfruttato il BPM per simulare l'interferenza tra onde piane e fasci Gaussiani, al fine di misurare e studiare la fase di Gouy. Il secondo esempio ha l'obiettivo di studiare la focalizzazione di un fascio Gaussiano in presenza di una lente convessa studiandone gli effetti di aberrazione focale, al variare delle condizioni di focalizzazione.

1 Trattazione teorica del Beam Propagation Method

L'analisi affrontata in questa dissertazione si focalizza su fasci di luce monocromatici, ovvero radiazione composta da un'unica lunghezza d'onda λ . Di seguito verrà analizzato come dalle equazioni di Maxwell nella materia si ottenga l'equazione di Helmholtz, la cui soluzione in approssimazione parassiale può essere trovata numericamente grazie all'utilizzo del Beam Propagation Method, sia per propagazione in un mezzo omogeneo che in un materiale disomogeneo.

1.1 L'equazione di Helmholtz

L'elettrodinamica studia l'evoluzione nel tempo e nello spazio del campo elettromagnetico ipotizzando lo spazio ed il tempo come variabili continue. Infatti nella soluzione delle equazioni di Maxwell per campi macroscopici si considera come campo elettrico $\vec{E}(\vec{r}, t)$ la media spaziale in un volume $V = L^3$, dove L è molto minore della lunghezza d'onda del campo elettrico microscopico o locale, e la media temporale in un intervallo di tempo T molto minore rispetto al periodo di oscillazione del campo elettrico microscopico. Quindi il campo elettrico macroscopico è dato da:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{VT} \int_V d\vec{r}' \int_0^T dt' \vec{E}_{micro}(\vec{r}', dt')$$

La forma generale delle equazioni di Maxwell nella materia per il campo elettromagnetico macroscopico è definita dalle quattro relazioni sottostanti:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \quad (1)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (2)$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (3)$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (4)$$

Dove ρ e \vec{J} sono le sorgenti esterne dei campi, rispettivamente cariche e correnti esterne, e quindi non generate dall'interazione tra il campo elettromagnetico e la materia. Inoltre si sono utilizzati, per trattare la propagazione del campo nella materia, i campi "ausiliari" \vec{D} e \vec{H} definiti come:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (5)$$

$$\vec{H} = \frac{\vec{B} - \mu_0 \vec{M}}{\mu_0} \quad (6)$$

Nella dissertazione non viene affrontata la propagazione di luce in materiali magnetici e quindi $\vec{M} = 0$. In materiali dielettrici il vettore di polarizzazione \vec{P} consiste nel campo generato dal sistema in seguito all'interazione con il campo elettrico incidente. La risposta viene ipotizzata essere lineare (weak field approximation) [2], ovvero con

solo la suscettività elettrica al primo ordine $\chi^{(1)}$ non nulla. Sotto questa condizione, la polarizzazione può essere espressa in modo generale tramite il seguente integrale di convoluzione:

$$\vec{P}(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \int_0^\infty \chi^{(1)}(\vec{r}, t') \vec{E}(\vec{r}, t - t') dt' \quad (7)$$

Dove viene presa in considerazione la causalità della risposta del materiale integrando su tutti i valori del campo elettrico interagente in un intervallo di tempo $-\infty, t$ dove t è il tempo in cui viene calcolato il vettore di polarizzazione. Si ricorda la proprietà della trasformata di Fourier tale che nel dominio coniugato di Fourier la convoluzione tra due funzioni altro non è che il prodotto tra le funzioni trasformate: $\mathcal{FT}[f(t)*g(t)] = \hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega)$ dove $f(t)*g(t) = \int f(t-t')g(t')dt'$ e $\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^\infty dt f(t)e^{-i\omega t}$. Applicando la precedente proprietà all'equazione (7) risulta immediata la relazione:

$$\vec{P}_\omega = \epsilon_0 \chi_\omega \vec{E}_\omega \quad (8)$$

Dove per compattezza si è sfruttata la notazione: f_ω corrisponde a $\hat{f}(\omega)$. Nella definizione del campo "ausiliario" \vec{D} , sostituendo l'espressione di \vec{P} nel dominio delle frequenze, risulta:

$$\vec{D}_\omega = \epsilon_0(1 + \chi_\omega) \vec{E}_\omega = \epsilon(\vec{r}, \omega) \vec{E}_\omega \quad (9)$$

In cui si è definita la funzione dielettrica $\epsilon(\vec{r}, \omega) = \epsilon_0(1 + \chi_\omega)$. La seconda proprietà importante della trasformata di Fourier ai fini della risoluzione delle equazioni di Maxwell nella materia è quella relativa alla trasformata della derivata n -esima di una funzione: $\mathcal{FT}[f^{(n)}(t)] = (i\omega)^n \hat{f}(\omega)$.

Grazie all'utilizzo delle precedenti proprietà della trasformata di Fourier, le equazioni di Maxwell nelle variabili temporali e spaziali non sono più equazioni differenziali alle derivate parziali, ma equazioni algebriche nel dominio coniugato.

Nel caso di luce monocromatica il campo elettrico sarà in generale del tipo: $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{F}(\vec{r})e^{i\omega t}$, dove $\vec{F}(\vec{r})$ contiene la dipendenza spaziale del campo. La trasformata di Fourier del campo monocromatico altro non è che la parte spaziale del campo elettrico per la funzione δ di Dirac che fissa la frequenza di oscillazione ω ; in formule: $\hat{E}(\vec{r}, \omega) = \vec{E}_\omega(\vec{r}) = \vec{F}(\vec{r})\delta(\omega' - \omega)$ e quindi il campo elettrico monocromatico sarà in generale della forma: $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_\omega(\vec{r})e^{i\omega t}$

Nel dominio coniugato, facendo uso delle proprietà della trasformata di Fourier, le equazioni di Maxwell (3) e (4), posti ρ e \vec{J} uguali a zero, diventano rispettivamente:

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E}_\omega = -i\omega\mu_0 \vec{H}_\omega \quad (10)$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{H}_\omega = i\omega \vec{D}_\omega = i\omega \epsilon(\vec{r}, \omega) \vec{E}_\omega \quad (11)$$

Per ricavare l'equazione di Helmholtz possiamo valutare il rotore dell'equazione (10), sfruttando poi l'espressione vettoriale tale che

$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}_\omega) = -\nabla^2 \vec{E}_\omega + \nabla(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_\omega)$. Al fine di valutare il gradiente del campo elettrico, possiamo riscrivere la prima equazione di Maxwell come $\vec{\nabla} \cdot \vec{D}_\omega = \vec{\nabla} \cdot (\epsilon(\vec{r}, \omega) \vec{E}_\omega) = 0$, da cui:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_\omega = -\frac{\vec{E}_\omega \cdot \nabla \epsilon(\vec{r}, \omega)}{\epsilon(\vec{r}, \omega)} \quad (12)$$

Quindi inserendo le precedenti espressioni nelle equazioni (10) e (11) si ottiene:

$$-\nabla^2 \vec{E}_\omega + \nabla(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_\omega) = i\omega\mu_0 \vec{\nabla} \wedge \vec{H}_\omega = -i\omega\mu_0 i\omega\epsilon(\vec{r}, \omega) \vec{E}_\omega \quad (13)$$

Combinando quanto ottenuto con l'espressione (12) e ricordando che $1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0} = c$ si ottiene:

$$\nabla^2 \vec{E}_\omega + \nabla \left[\frac{\vec{E}_\omega \cdot \nabla \epsilon(\vec{r}, \omega)}{\epsilon(\vec{r}, \omega)} \right] + \frac{\epsilon(\vec{r}, \omega)}{\epsilon_0} \frac{\omega^2}{c^2} \vec{E}_\omega = 0 \quad (14)$$

Definendo infine l'indice di rifrazione $n(\vec{r}, \omega) = \sqrt{\epsilon(\vec{r}, \omega)/\epsilon_0}$ e $k_0 = \omega/c$ è possibile ottenere l'equazione nella forma più compatta:

$$\nabla^2 \vec{E}_\omega + \frac{\vec{E}_\omega}{n^2(\vec{r}, \omega)} \nabla n^2(\vec{r}, \omega) + k_0^2 n^2(\vec{r}, \omega) \vec{E}_\omega = 0 \quad (15)$$

Nella dissertazione non verrà risolta l'equazione di Helmholtz nel caso di materiali anisotropi. In tal caso l'indice di rifrazione non si tratterebbe matematicamente come una funzione scalare, ma come un tensore.

Per ottenere l'equazione di Helmholtz nel caso monocromatico si ipotizza che la variazione dell'indice di rifrazione avvenga in una lunghezza caratteristica l_n molto maggiore rispetto alla lunghezza d'onda λ del campo elettrico. Infatti, in termini di scaling e ordini di grandezza caratteristici nell'equazione (15), il primo termine scala come $E[1/\lambda^2]$; il secondo sarà dato dalla somma di due termini che scalano rispettivamente come $E[\Delta n/n][1/\lambda][1/l_n]$ e $E[\Delta n/n][1/l_n]^2$, dove δn è la variazione media dell'indice di rifrazione nella lunghezza caratteristica l_n ; infine il terzo termine scala a sua volta come $E[1/\lambda^2]$. L'equazione di Helmholtz si ottiene ipotizzando $l_n \gg \lambda$ e/o $\Delta n/n \ll 1$ a partire dall'equazione (15):

$$\nabla^2 \vec{E}_\omega + k_0^2 n^2(\vec{r}, \omega) \vec{E}_\omega = 0 \quad (16)$$

Nella dissertazione non verrà risolta l'equazione di Helmholtz nel caso di materiali anisotropi. In tal caso l'indice di rifrazione non si tratterebbe matematicamente come una funzione scalare, ma come un tensore.

La soluzione dell'equazione di Helmholtz, date le condizioni al bordo, permette di conoscere la propagazione nello spazio e nel tempo del campo elettrico per diverse dipendenze spaziali iniziali e quindi differenti fasci di luce.

1.2 Equazione parabolica

Per diminuire il tempo di calcolo computazionale, per trovare la soluzione numerica dell'equazione di Helmholtz si adotta l'approssimazione SVEA, "Slowly Vary Envelope Approximation" [1]. Tale approssimazione consiste nell'ipotizzare la propagazione del fascio di luce lungo una determinata coordinata spaziale, ad esempio z : si cercano quindi soluzioni in cui il campo viene considerato "quasi come" un'onda piana che si propaga con vettore d'onda k_z lungo la direzione z , perpendicolare al piano (x, y) in cui giace

il vettore campo elettrico. Quindi, nell'approssimazione SVEA, $k_x, k_y \ll k_z$. Questa approssimazione descrive bene la propagazione di fasci laser che si propagano lungo una determinata direzione nel vuoto o in guide ottiche, fornendo così un potente strumento di calcolo per simulare diversi sistemi fisici, dagli esperimenti spettroscopici alle telecomunicazioni.

L'ipotesi sulla variazione dell'indice di rifrazione effettuata per ottenere l'equazione (16) a partire dall'equazione (15), ovvero che $\Delta n/n \ll 1$ si può riscrivere come $n(\vec{r}, \omega) \approx n_1(\omega) + \delta n(\vec{r}, \omega)$, cioè come somma tra un termine dipendente dalla sola frequenza e un termine piccolo rispetto al primo che varia anche spazialmente. Quindi nell'equazione di Helmholtz il termine $n^2(\vec{r}, \omega)$, trascurando i termini al secondo ordine in δn , è pari a $n_1^2 + 2\delta n(\vec{r}, \omega)$.

Sempre nel caso monocromatico, in cui si ricorda che il campo elettrico è dato da $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_\omega(\vec{r})e^{i\omega t}$, utilizzando la SVEA, si potrà scrivere:

$$\vec{E}_\omega(\vec{r}) = \vec{A}_\omega(\vec{r}_\perp, z)e^{-ik(\omega)z} \quad (17)$$

Dove $k(\omega) = (\omega/c)n_1$ e $\vec{r}_\perp = (x, y)$. La componente spaziale del campo elettrico, nella SVEA, sarà quindi il prodotto tra un'onda piana che si propaga lungo z in un mezzo omogeneo con indice di rifrazione n_1 , ovvero una fase oscillante con lunghezza d'onda λ , ed una funzione $\vec{A}_\omega(\vec{r}_\perp, z)$ non costante nel piano (x, y) e che varia lentamente in z . Il vantaggio numerico dell'approssimazione SVEA consiste proprio nel fatto che, come si vedrà in seguito, si cercheranno soluzioni per $\vec{A}_\omega(\vec{r}_\perp, z)$ e non per $\vec{E}_\omega(\vec{r})$, dato che quest'ultimo oscilla, ad esempio considerando fasci di luce visibile, nell'arco dei decimi di micrometri, richiederebbe un campionamento molto più fitto rispetto a $\vec{A}_\omega(\vec{r}_\perp, z)$ lungo z ed un tempo computazionale molto maggiore rispetto a $\vec{A}_\omega(\vec{r}_\perp, z)$.

Utilizzando l'equazione (17), il primo termine dell'equazione di Helmholtz può essere riscritto come:

$$\nabla^2 \vec{E}_\omega = e^{-ikz} (\nabla_\perp^2 - 2ik\partial_z - k^2 + \partial_z^2) \vec{A}_\omega(\vec{r}_\perp, z) \quad (18)$$

Ragionando sempre in termini di scala e ordini di grandezza caratteristici, il primo termine dell'espressione precedente scala come $A[1/l_x][1/l_y]$, dove l_x e l_y sono le lunghezze caratteristiche in cui varia \vec{A}_ω nel piano (x, y) . Il secondo termine scala come $A[1/\lambda][1/l_z]$, dove l_z è la lunghezza caratteristica in cui varia \vec{A}_ω lungo l'asse z . Il terzo termine scala come $A[1/\lambda^2]$, mentre il quarto ed ultimo termine scala come $A[1/l_z^2]$. Per quanto detto in precedenza, l'approssimazione SVEA consiste nell'ipotizzare $l_z \gg l_x, l_y$ e quindi permette di trascurare il quarto termine dell'espressione (18). L'equazione di Helmholtz, nell'approssimazione SVEA, diventerà l'equazione parabolica (PE o equazione di Fock-Leontovich):

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{i}{2k} \nabla_\perp^2 \right) \vec{A}_\omega(\vec{r}_\perp, z) = -\frac{ik}{n_1} \delta n(\vec{r}) \vec{A}_\omega(\vec{r}_\perp, z) \quad (19)$$

Il primo termine del membro di sinistra dell'equazione parabolica è il termine lentamente variabile in z , il secondo è il termine di diffrazione, mentre il membro nella parte destra è il termine di disomogeneità del mezzo di propagazione. Il termine di diffrazione è così

denominato in quanto il fenomeno della diffrazione si verifica quando il fascio ha delle componenti del vettore d'onda non parallele alla direzione di propagazione z (ovvero quando il campo è confinato in una regione spaziale finita) e quindi l'onda non è piana; in caso di onda piana infatti il termine ∇_{\perp}^2 darebbe contributo nullo in quanto $\vec{A}_{\omega}(\vec{r}_{\perp}, z)$ sarebbe una funzione costante.

1.3 Soluzione equazione parabolica omogenea e disomogenea

1.3.1 Caso omogeneo

Nel caso omogeneo l'equazione parabolica è ottenuta ponendo $\delta n = 0$:

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{i}{2k} \nabla_{\perp}^2 \right) \vec{A}_{\omega}(\vec{r}_{\perp}, z) = 0 \quad (20)$$

L'equazione può essere risolta facilmente nel dominio coniugato dei vettori d'onda k_x e k_y , ovvero passando da $\vec{A}(\vec{r}_{\perp}, z)$ a $\hat{A}(\vec{k}_{\perp}, z)$ tramite una trasformata di Fourier. Infatti ricordando la proprietà di derivazione nel dominio di Fourier riportate nel paragrafo (1.1), l'equazione parabolica omogenea diventa:

$$\frac{\partial}{\partial z} \hat{A}_{\omega}(\vec{k}_{\perp}, z) = \frac{i}{2k} k_{\perp}^2 \hat{A}_{\omega}(\vec{k}_{\perp}, z) = \frac{i}{2k} (k_x^2 + k_y^2) \hat{A}_{\omega}(\vec{k}_{\perp}, z) \quad (21)$$

Quindi risolvendo la precedente equazione, fissando le condizioni al bordo a $z = 0$, si ottiene:

$$\hat{A}(k_x, k_y, z) = \hat{A}(k_x, k_y, 0) e^{\frac{i}{2k} (k_x^2 + k_y^2) z} \quad (22)$$

La soluzione generale dell'equazione parabolica nel caso omogeneo si ricava antitrasformando la relazione precedente nel dominio dello spazio reale:

$$\vec{A}_{\omega}(\vec{r}_{\perp}, z) = \int_{-\infty}^{\infty} dk_x \int_{-\infty}^{\infty} dk_y \hat{A}(k_x, k_y, 0) e^{-i(k_x + k_y)\vec{r}_{\perp} + \frac{i}{2k} (k_x^2 + k_y^2) z} \quad (23)$$

Dove $\hat{A}(k_x, k_y, 0)$ è lo spettro spaziale a $z = 0$.

1.3.2 Caso disomogeneo

Per un materiale disomogeneo, in cui l'indice di rifrazione dipende dalla coordinata spaziale, si può risolvere l'equazione esplicitamente solo nel caso in cui la variazione δn dipende solo dalla coordinata di propagazione del fascio di luce z , ovvero assumendo $\delta n(x, y, z) \approx \delta n(z)$. In questo caso la soluzione dell'equazione può essere trovata direttamente nello spazio reale, senza far uso della trasformata di Fourier. La soluzione è data da:

$$\vec{A}_{\omega}(\vec{r}_{\perp}, z) = \vec{A}_{\omega}(\vec{r}_{\perp}, 0) e^{-i\frac{\omega}{c} \int_0^z dz' \delta n(z') dz'} \quad (24)$$

come è possibile dimostrare sostituendo la seguente espressione nell'equazione parabolica (19).

1.4 Il metodo “Split Step Fourier”

Come già detto in precedenza l'approssimazione SVEA e l'equazione parabolica richiedono un minor tempo di calcolo per trovare la soluzione numericamente rispetto all'equazione di Helmholtz, in quanto è presente solo una derivata prima rispetto a z . I termini di diffrazione e di disomogeneità dell'equazione parabolica possono essere scritti in termini operatoriali secondo le seguenti definizioni [3]:

$$\mathcal{D} = -\frac{i}{2k} \nabla_{\perp}^2 \quad (25)$$

$$\mathcal{N} = -\frac{ik}{n_1} \delta n(x, y, z) \quad (26)$$

Quindi, dopo aver definito gli operatori diffrazione e disomogeneità, l'equazione di Helmholtz può essere riscritta come:

$$\partial_z \vec{A}(x, y, z) = (\mathcal{D} + \mathcal{N}) \vec{A}(x, y, z) \quad (27)$$

Numericamente l'equazione differenziale si risolve trovando la soluzione ad ogni passo discreto dz di propagazione. Quindi nel caso dell'equazione parabolica la soluzione di uno step propagante è data da:

$$\vec{A}(x, y, z + dz) = e^{(\mathcal{D} + \mathcal{N})dz} \vec{A}(x, y, z) \quad (28)$$

In generale l'azione degli operatori \mathcal{D} e \mathcal{N} non è disaccoppiata, in quanto $[\mathcal{D}, \mathcal{N}] \neq 0$ e quindi $e^{(\mathcal{D} + \mathcal{N})dz} \neq e^{\mathcal{D}dz} e^{\mathcal{N}dz}$. Infatti l'operatore differenziale \mathcal{D} non commuta con $\delta n(x, y, z)$, funzione anche di x ed y . Si ha soluzione esplicita dell'equazione parabolica, come discusso nel paragrafo (1.3.2), solo se $\delta n(x, y, z) = \delta n(z)$ ed in questo caso si avrebbe $[\mathcal{D}, \mathcal{N}] = 0$. L'approssimazione che si adotta per risolvere il problema numericamente è di considerare solo il primo termine della seguente espansione (uguaglianza di Baker–Hausdorff):

$$e^{\mathcal{A}} e^{\mathcal{B}} = e^{\mathcal{A} + \mathcal{B} + (1/2)[\mathcal{A}, \mathcal{B}] + (1/12)[\mathcal{A}, [\mathcal{A}, \mathcal{B}]] - (1/12)[\mathcal{B}, [\mathcal{A}, \mathcal{B}]] + \dots} \quad (29)$$

Dove si è definito $\mathcal{A} = \mathcal{D}dz$ e $\mathcal{B} = \mathcal{N}dz$, assumendo quindi $e^{(\mathcal{D} + \mathcal{N})dz} \approx e^{\mathcal{D}dz} e^{\mathcal{N}dz}$. In questa approssimazione vengono trascurati i termini dell'esponenziale $[\mathcal{A}, \mathcal{B}]$ di ordine $O(dz^2)$, $[\mathcal{A}, [\mathcal{A}, \mathcal{B}]]$ di ordine $O(dz^3)$, $[\mathcal{B}, [\mathcal{A}, \mathcal{B}]]$ sempre di ordine $O(dz^3)$ e tutti i termini di ordine superiore al terzo. L'approssimazione è dunque migliore nel caso in cui viene scelto un passo di propagazione numerica dz molto piccolo.

Dunque la soluzione dell'equazione parabolica diventa, nell'algoritmo di split step Fourier:

$$\vec{A}(x, y, z + dz) = e^{\mathcal{D}dz} e^{\mathcal{N}dz} \vec{A}(x, y, z) \quad (30)$$

Anche nella soluzione numerica il passo omogeneo, ovvero dovuto solo al termine di diffrazione, viene risolto come nel caso analitico nel dominio coniugato di Fourier. La soluzione dell'equazione parabolica trasformata sarà quindi data da:

$$\hat{A}(k_x, k_y, z + dz) = e^{\hat{\mathcal{D}}dz} \hat{A}(k_x, k_y, z) = \hat{A}(k_x, k_y, z) e^{\frac{i}{2k}(k_x^2 + k_y^2)dz} \quad (31)$$

La soluzione finale si otterrà quindi antitrasformando $\hat{A}(k_x, k_y, z + dz)$ nello spazio reale utilizzando algoritmi di “Fast Fourier Transform”. Il passo disomogeneo avrà esattamente la stessa forma che nel caso analitico, ma le variazioni dell’indice di rifrazione δn che saranno campionate numericamente su una griglia finita di punti $x - y$:

$$\vec{A}_\omega(x, y, z + dz) = e^{\mathcal{N}dz} \vec{A}(x, y, z) = \vec{A}_\omega(x, y, z) e^{-i\frac{\omega}{c} \int_z^{z+dz} dz' \delta n(x, y, z')} \quad (32)$$

Utilizzando uno step di propagazione dz molto minore rispetto alla lunghezza caratteristica di variazione dell’indice di rifrazione, l’integrale dell’espressione precedente può essere calcolato come: $\int_z^{z+dz} dz' \delta n(x, y, z') dz' \approx n(x, y, z) dz$.

Per avere un errore numerico di ordine dominante $O(dz^3)$, invece che $O(dz^2)$, come nel semplice split step method, è possibile ricorrere alla versione simmetrizzata dell’algoritmo split-step. La soluzione dell’equazione parabolica in questo caso sarà data da:

$$\vec{A}(x, y, z + dz) = e^{\mathcal{D}\frac{dz}{2}} e^{\mathcal{N}dz} e^{\mathcal{D}\frac{dz}{2}} \vec{A}(x, y, z) \quad (33)$$

Al fine di verificare la migliore convergenza in termini di errore computazionale dello split-step simmetrizzato, possiamo ragionare in modo analogo a quanto fatto per la versione non simmetrizzata: utilizzando le precedenti definizioni, ovvero che $\mathcal{A} = \mathcal{D}dz$ e $\mathcal{B} = \mathcal{N}dz$, l’esponenziale presente nell’equazione (33), combinato con la relazione (29) si può scrivere come:

$$e^{\frac{\mathcal{A}}{2}} e^{\mathcal{B}} e^{\frac{\mathcal{A}}{2}} = e^{\frac{\mathcal{A}}{2}} e^{\mathcal{C}}$$

Dove \mathcal{C} è definito come:

$$\mathcal{C} = \mathcal{B} + \frac{\mathcal{A}}{2} + \frac{1}{4}[\mathcal{B}, \mathcal{A}] + O(dz^3)$$

Applicando nuovamente la relazione (29), si ottiene:

$$e^{\frac{\mathcal{A}}{2}} e^{\mathcal{C}} = e^{\mathcal{D}}$$

Dove \mathcal{D} è pari a:

$$\mathcal{D} = \frac{\mathcal{A}}{2} + \mathcal{B} + \frac{\mathcal{A}}{2} + \frac{1}{4}[\mathcal{B}, \mathcal{A}] + \frac{1}{4}[\mathcal{A}, \mathcal{B}] + \frac{1}{8}[\mathcal{A}, \mathcal{A}] + O(dz^3) = \frac{\mathcal{A}}{2} + \mathcal{B} + \frac{\mathcal{A}}{2} + O(dz^3)$$

Dove l’ultimo passaggio è stato effettuato utilizzando le proprietà dei commutatori.

2 Esempi numerici di Beam Propagation Method

All'interno di questo capitolo presenteremo ed analizzeremo alcuni esempi notevoli di risoluzione numerica della propagazione dei fasci di luce sfruttando gli strumenti introdotti nel capitolo precedente. In tutti gli esempi fisici trattati si è fatto uso di codici scritti nel linguaggio di programmazione Matlab i cui link sono riportati in appendice.

2.1 Interferenza tra un'onda piana ed un fascio Gaussiano

Il primo esempio consiste nello studio dell'interferenza tra un'onda piana ed un fascio Gaussiano nel vuoto, con lo scopo di studiare la fase di Gouy [4] del fascio Gaussiano. Inizialmente verrà trattata la condizione in cui il campo è localizzato nel piano (x, y) e si propaga lungo l'asse z . Questa condizione verrà dominata anche in seguito come "fascio 2D". Successivamente verrà trattato il caso modello in cui il campo elettrico dell'onda piana e del fascio Gaussiano sono confinati in un piano bidimensionale, ovvero un piano in cui la luce si propaga lungo l'asse z , ed è localizzata lungo l'asse x . Questa condizione verrà denominata come "fascio 1D".

Nel momento in cui si studia la propagazione di luce, l'osservabile fisica misurabile non è il campo elettrico, ma l'intensità mediata su un periodo di oscillazione, la cui relazione, per onde monocromatiche, è data da:

$$I_\omega = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} |\vec{E}_\omega(\vec{r})|^2 \quad (34)$$

L'interferenza tra due onde è dovuta proprio alla definizione di intensità [4]: infatti se il campo elettrico è costituito dalla somma di due (o più) campi elettrici $\vec{E}_\omega^1(\vec{r})$ e $\vec{E}_\omega^2(\vec{r})$ si ha:

$$I_\omega = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} |\vec{E}_\omega^1(\vec{r}) + \vec{E}_\omega^2(\vec{r})|^2 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \left(|\vec{E}_\omega^1(\vec{r})|^2 + |\vec{E}_\omega^2(\vec{r})|^2 + 2\text{Re} \vec{E}_\omega^1(\vec{r}) \vec{E}_\omega^{2*}(\vec{r}) \right) \quad (35)$$

Il termine di interferenza è l'ultimo dell'espressione precedente e dipende dalla differenza tra le fasi di $\vec{E}_\omega^1(\vec{r})$ e $\vec{E}_\omega^2(\vec{r})$. Nel caso di approssimazione SVEA si vede che nel caso di onde monocromatiche l'intensità è data dalla relazione seguente, ricordando che la relazione tra $\vec{A}_\omega(\vec{r})$ e $\vec{E}_\omega(\vec{r})$ è espressa nell'equazione (17):

$$I_\omega = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \left[|\vec{A}_\omega^1(\vec{r})|^2 + |\vec{A}_\omega^2(\vec{r})|^2 + 2\text{Re} \left(\vec{A}_\omega^1(\vec{r}) \vec{A}_\omega^{2*}(\vec{r}) \right) \right] \quad (36)$$

In quanto si sta studiando la condizione di propagazione nel vuoto, la soluzione dell'equazione parabolica per l'onda piana "2D" si trova facilmente a partire dall'equazione (20):

$$\vec{A}_\omega(\vec{r}_\perp, z) = \vec{A}_{\omega 0} \quad (37)$$

Dove \vec{A}_0 è un vettore costante nel piano (x, y) .

Nel caso di fascio Gaussiano "2D", si ha una soluzione analitica dell'equazione parabolica

[5] data da:

$$\vec{A}_\omega(\vec{r}_\perp, z) = \vec{A}_{\omega 0} \frac{w_0}{w(z)} \exp\left(-\frac{r_\perp^2}{w(z)^2}\right) \exp\left(-i \left[\frac{k(\omega)r_\perp^2}{2R(z)} - \arctan\left(\frac{z}{z_R}\right) \right]\right) \quad (38)$$

Dove si sono definite le seguenti quantità: w_0 è la larghezza della Gaussiana, $w(z)$ è espresso da $w(z) = w_0 \sqrt{1 + (z/z_R)^2}$, z_R è la lunghezza di Rayleigh dove $z_R = \pi w_0^2/\lambda$, con λ lunghezza d'onda del fascio monocromatico. Per quanto riguarda la fase acquisita durante la propagazione in z , si è definito il raggio di curvatura del fascio $R(z) = z[1 + (z/z_R)^2]$ e la fase di Gouy è pari a $\arctan(z/z_R)$ [6].

Si opera ora, come prima simulazione numerica, la propagazione di un fascio Gaussiano

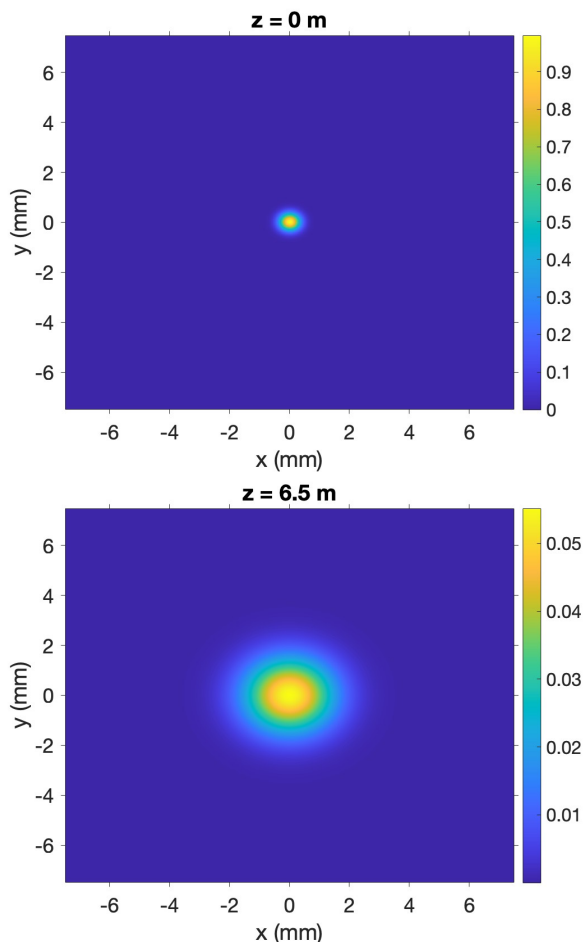


Figura 1: Propagazione di fascio Gaussiano 2D a $z = 0 m$ e a $z = 6.5 m$. La scala di colori corrisponde al valore dell'intensità del fascio.

“2D” nel vuoto, inizialmente in assenza e successivamente in presenza di onda piana. Si scelgono come parametri fisici della simulazione la lunghezza d'onda $\lambda = 0.5 \mu m$, la larghezza iniziale $w_0 = 0.5 mm$ e un'intensità massima iniziale I_0 adimensionale unitaria.

Con questi parametri fisici la lunghezza di Rayleigh è $z_R = 1.57m$. Nella simulazione la forma del fascio a $z = 0$ è del tipo $A(x, y, 0) = \sqrt{I_0} \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2w_0^2}\right)$.

In figura (1), dove si è eseguita una propagazione del fascio lungo la direzione z fino $6.5m$ di distanza dall'origine, si può osservare come a causa della diffrazione il profilo Gaussiano nel piano (x, y) si sia allargato e sia diminuita l'intensità di picco, come si vede dalla scala di colore normalizzata alla destra dell'immagine. Questo risultato è in accordo con l'espressione analitica della propagazione del fascio Gaussiano $2D$ riportata nell'equazione (38), dove l'allargamento del fascio è dovuto alla conservazione della potenza, definita come l'integrale di superficie dell'intensità del fascio. Nel caso $2D$ il massimo dell'intensità del fascio si trova nel punto $(0, 0)$ e diminuisce con un andamento $1/1 + (z/z_R)^2$. Come riportato in figura (2) la simulazione numerica riproduce in modo fedele la previsione teorica.

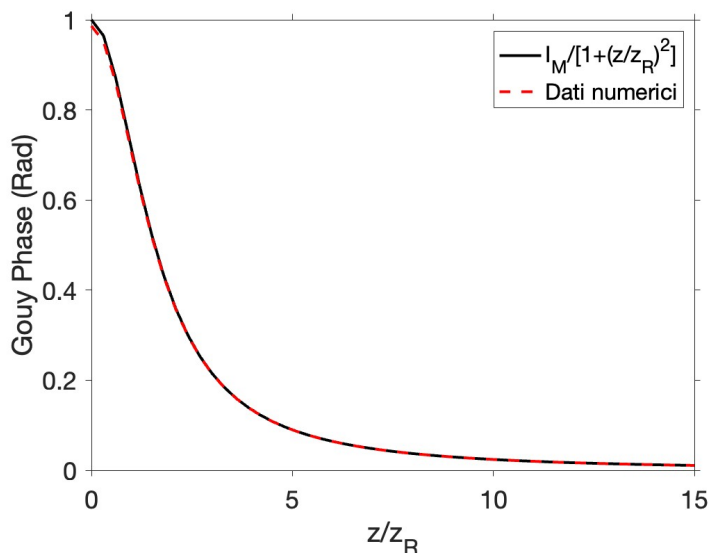


Figura 2: Confronto tra l'andamento teorico e la simulazione numerica del massimo dell'intensità per fascio Gaussiano $2D$.

La seconda simulazione eseguita consiste nella propagazione dello stesso fascio Gaussiano, con gli stessi parametri fisici già riportati in precedenza, in presenza di un'onda piana che si propaga lungo z con lunghezza d'onda λ e con fase iniziale uguale alla fase iniziale del fascio Gaussiano (nel nostro caso viene posta fase iniziale nulla). Si eseguono i risultati nuovamente per una propagazione del fascio totale fino ad una distanza di $6.5m$. In questo caso quello che si osserva in figura (3) è che nella condizione iniziale a $z = 0m$ si avrà un'interferenza costruttiva tra fascio Gaussiano $2D$ e l'onda piana: in assenza di differenza di fase tra questi il profilo nel piano (x, y) rimane Gaussiano ed il valore dell'intensità massima sarà pari $4 \cdot I_0$ adimensionali come previsto dall'equazione (36). Durante la propagazione l'onda piana, come descritto dall'equazione (37), non acquisisce nessuna fase, rimanendo costante anche in intensità. Il fascio Gaussiano invece

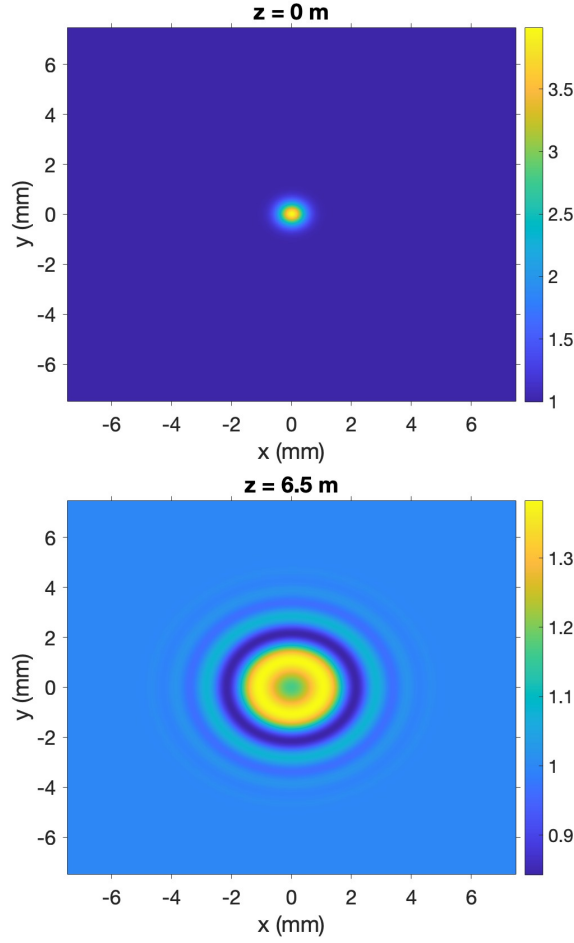


Figura 3: Propagazione di fascio Gaussiano $2D$ in interferenza con un'onda piana a $z = 0 m$ e a $z = 6.5 m$. La scala di colori corrisponde al valore dell'intensità del fascio.

acquisisce la fase di Gouy, già definita in precedenza e una fase che dipende da (x, y) con simmetria radiale pari a $-k(x^2 + y^2)/2R(z)$. Quindi durante la propagazione in z la differenza di fase tra il fascio Gaussiano e l'onda piana non è più nulla e dall'equazione (36) si deduce che non si ha più interferenza costruttiva su tutto il piano (x, y) : il profilo dell'intensità non è più Gaussiano.

Si nota che in figura (3), a $z = 6.5 m$, il massimo dell'intensità non è al centro del piano, come in assenza di interferenza, e questo è dovuto proprio alla fase di Gouy che aumenta all'aumentare di z (l'arcotangente è una funzione monotona crescente).

Si può infatti verificare come anche numericamente l'andamento della fase di Gouy è proprio $\arctan(z/z_R)$, come si riporta in figura (4). Per provare a capire, sempre con un esempio numerico, l'interpretazione fisica della fase di Gouy, si può studiare la propagazione del fascio Gaussiano $1D$ e l'interferenza di esso con un'onda piana con campo elettrico vincolato in una sola dimensione spaziale.

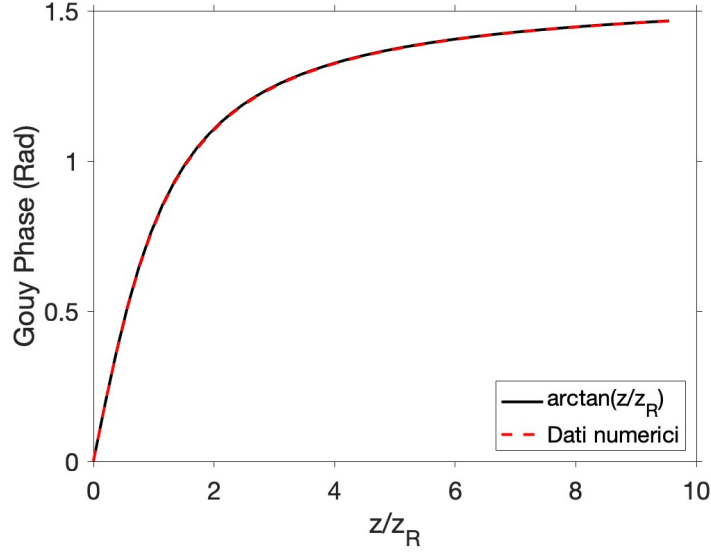


Figura 4: Confronto tra la fase di Gouy calcolata numericamente ed il suo andamento teorico.

Come nel caso $2D$ si esegue una simulazione numerica per studiare inizialmente il caso di propagazione in assenza dell'onda piana ed in seguito si studia nuovamente l'interferenza tra di essi. I parametri fisici del fascio Gaussiano e dell'onda piana sono gli stessi che nel caso $2D$.

Si riportano in figura (5) i risultati della simulazione, in cui si può osservare nuovamente come a causa del fenomeno della diffrazione il fascio si allarga all'aumentare di z e diminuisca l'intensità massima. In questo caso però l'andamento con cui diminuisce l'intensità del fascio Gaussiano non è $1/1 + (z/z_R)^2$ come nel caso $2D$, ma $1/\sqrt{1 + (z/z_R)^2}$. L'argomento con cui si può spiegare questo risultato è il seguente: la potenza P di un fascio Gaussiano $2D$, a partire dall'equazione (38) è:

$$P = \left| \vec{A}_\omega \right|^2 \left(\frac{w_0}{w(z)} \right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-\frac{2(x^2+y^2)}{w(z)^2}} = 2\pi \left(\left| \vec{A}_\omega \right| w_0 \right)^2$$

Dove l'integrale svolto è un integrale Gaussiano bidimensionale. Come ci si aspettava la potenza è una costante e non dipende da z per la conservazione della potenza. Affinché si ottenga una potenza costante anche nel caso $1D$, l'intensità deve essere proporzionale a $w_0/w(z)$. Infatti in questo caso, la potenza è data da:

$$P = \left| \vec{A}_\omega \right|^2 \frac{w_0}{w(z)} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{2x^2}{w(z)^2}} = \sqrt{2\pi} \left| \vec{A}_\omega \right|^2 w_0$$

Dove l'integrale in questo caso è un integrale Gaussiano unidimensionale. Anche numericamente si nota in figura (6) come il massimo dell'intensità del fascio diminuisca con

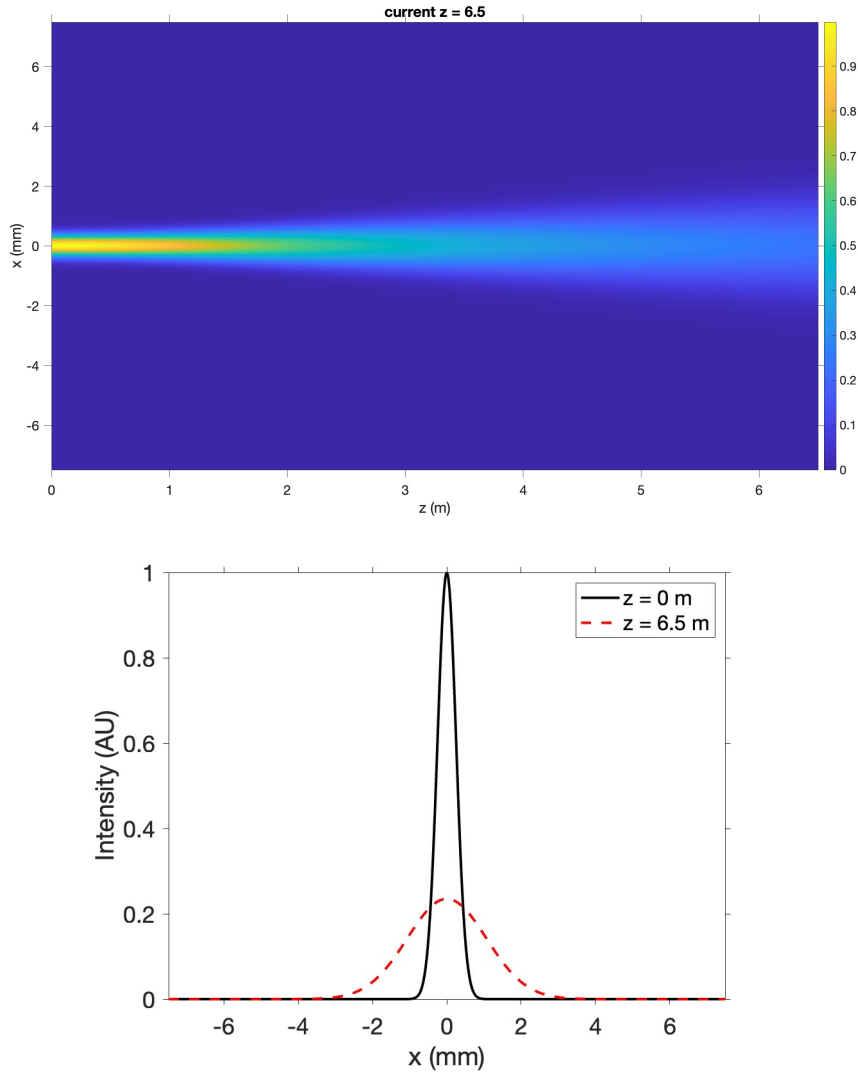


Figura 5: Propagazione di fascio Gaussiano $1D$ fino a $z = 6.5 m$. Nel secondo grafico si osserva come cambia il profilo Gaussiano dell'intensità durante la propagazione.

un andamento del tipo $1/\sqrt{1 + (z/z_R)^2}$.

Anche per il caso $1D$ si può simulare l'interferenza tra un'onda piana ed il fascio Gaussiano, usando gli stessi parametri fisici che nel caso $2D$. Come si osserva dalla figura (9), la fase acquisita durante la propagazione del fascio Gaussiano dipende da x in modo simmetrico rispetto all'origine. A causa dell'interferenza il profilo dell'intensità anche in questo caso non è più Gaussiano. Anche nel caso $1D$ è presente la fase di Gouy come si può verificare nel profilo dell'intensità a $z = 6.5 m$ in figura (9) dove il massimo dell'intensità non si trova per $x = 0$. In questo caso però non si ha lo stesso andamento analitico che nel caso $2D$ come si può evincere in figura (7) in cui i dati numerici della

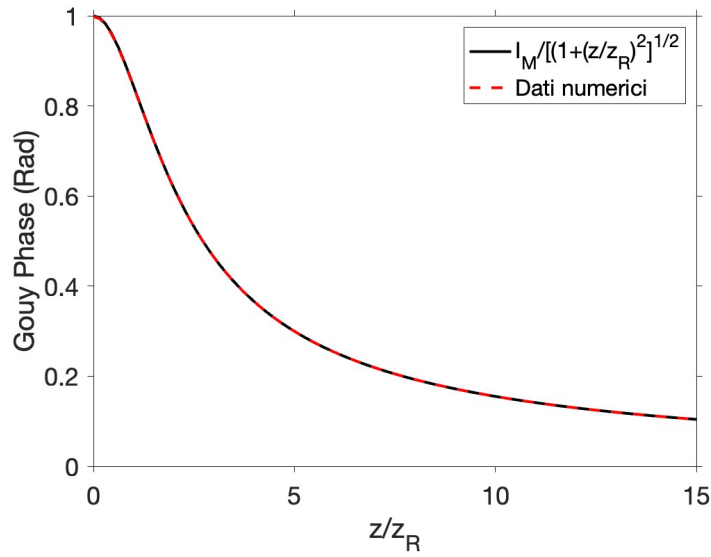


Figura 6: Confronto tra l'andamento teorico e la simulazione numerica del massimo dell'intensità per fascio Gaussiano $1D$.

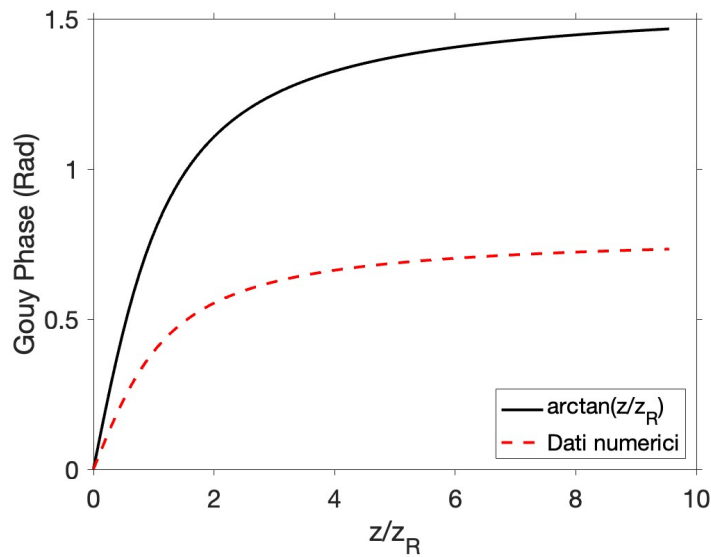


Figura 7: Confronto tra la fase di Gouy calcolata numericamente $1D$ ed il suo andamento teorico nel caso $2D$.

simulazione $1D$ non sono in accordo con la previsione teorica $2D$. Il diverso valore efficace introdotto dalla fase di Gouy nel caso $1d$ rispetto al $2D$ suggerisce in modo diretto un'interpretazione fisica della stessa: la fase di Gouy è un ritardo di fase rispetto all'on-

da piana lungo l'asse z che si osserva in quanto i vettori \vec{k} dell'onda piana e del fascio Gaussiano hanno lo stesso modulo (perché la lunghezza d'onda è la stessa); nel caso di onda piana la componente k_z è maggiore perché nel fascio Gaussiano ci sono anche le componenti k_x e k_y . Quindi nel caso $1D$ la fase di Gouy è minore perché non è presente la componente k_y e a parità di lunghezza d'onda, la componente k_z del fascio Gaussiano è maggiore rispetto al caso $2D$.

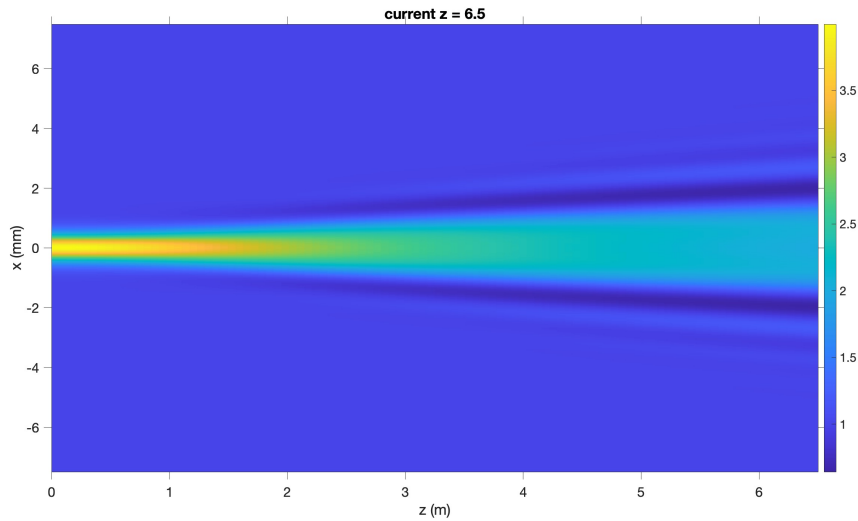


Figura 8: Propagazione di fascio Gaussiano $1D$ in interferenza con un'onda piana fino a $z = 6.5 m$.

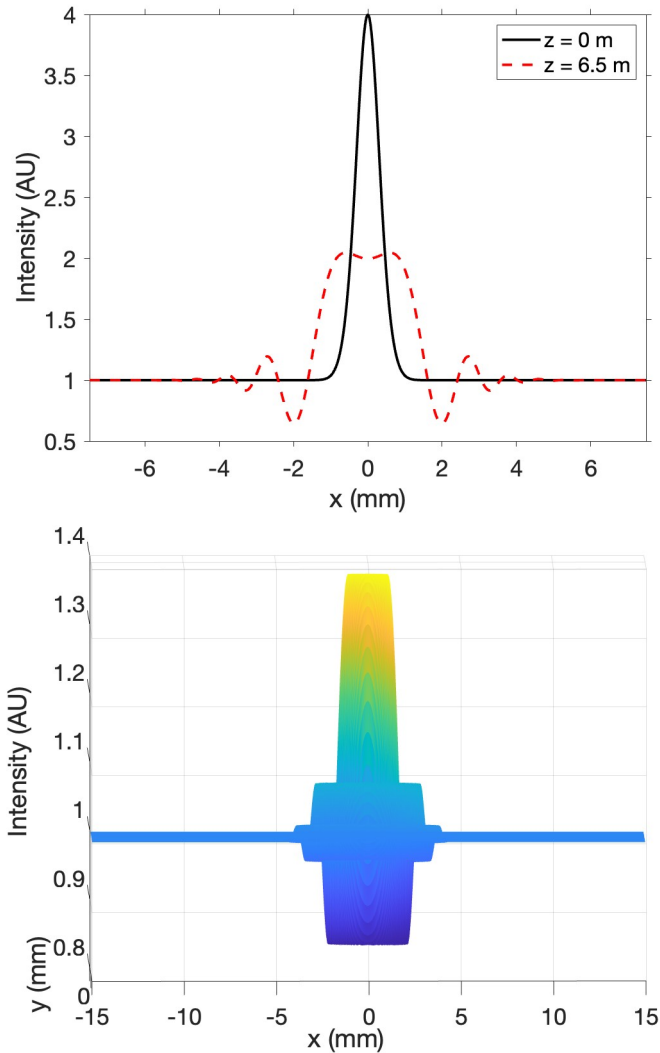


Figura 9: Nel primo grafico si osserva come cambia il profilo dell'intensità durante la propagazione. Nel secondo grafico viene rappresentato il profilo dell'interferenza tra l'onda piana e il fascio nel caso $2D$ a $y = 0$ e $az = 6.5$ m.

2.2 Propagazione di luce tramite una lente convessa

Il secondo esempio fisico simulato è la propagazione di un fascio Gaussiano $1D$ attraverso una lente convessa. L'obiettivo della simulazione consiste nello studiare la fase di Gouy del fascio Gaussiano dopo l'attraversamento della lente e di come a causa della diffrazione del fascio si verifichi un'aberrazione focale, ovvero uno spostamento longitudinale del massimo dell'intensità del fascio rispetto alla distanza focale. Quando il campo elettrico incontra nella sua propagazione la superficie di una lente convessa, acquisisce una fase dipendente da x , coordinata perpendicolare alla propagazione della luce, che permette

la focalizzazione del campo ad una distanza $z = f_l$, dove con f_l si indica la distanza focale della lente.

La condizione al bordo, a $z = 0$, nell'algoritmo di risoluzione dell'equazione parabolica sarà:

$$\vec{A}_\omega(x, z = 0) = \vec{A}_{\omega 0} e^{i\delta n \frac{\omega}{c} \frac{x^2}{2R}} \quad (39)$$

Dove δn è la differenza tra l'indice di rifrazione della lente e dell'aria ed R è il raggio di curvatura della lente.

Il termine di fase introdotto nell'equazione (39) può essere ricavato a partire dall'equazione (30):

$$\vec{A}_\omega(x, z + dz) = \vec{A}_\omega(x, z) e^{i\frac{\omega}{c} \int_z^{z+dz} \delta n(x, z') dz'}$$

Come si osserva dalla figura (10), in cui viene rappresentata la lente convessa con raggio

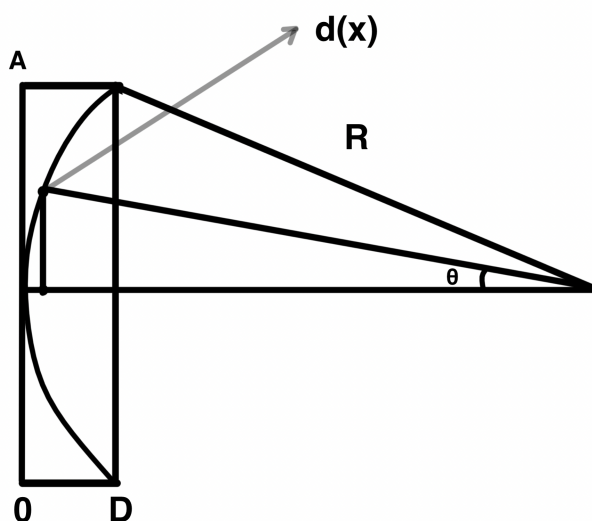


Figura 10: Schema della lente sottile.

di curvatura R , vale semplicemente la relazione $\delta n(x, z) = \delta n \theta (z - d(x)) \theta (D - z)$, quindi si ha:

$$\int_z^{z+dz} \delta n(x, z') dz' = \delta n \int_{d(x)}^D dz' = \delta n [D - d(x)]$$

Per calcolare la fase acquisita dalla lente è dunque necessario stimare $d(x)$. Considerando una lente con curvatura circolare, in cui il raggio di curvatura R è molto maggiore dell'altezza della lente A si ha:

$$d(x) = R - R \cos(\theta) \approx R \left[1 - \cos\left(\frac{x}{R}\right) \right] \approx R \left[1 - 1 + \frac{x^2}{2R^2} \right] = \frac{x^2}{2R}$$

Quindi in conclusione la fase della condizione iniziale di propagazione è proprio $e^{i\delta n \frac{\omega}{c} \frac{x^2}{2R}}$. La distanza focale della lente è definita come $f_l = \delta n / R$.

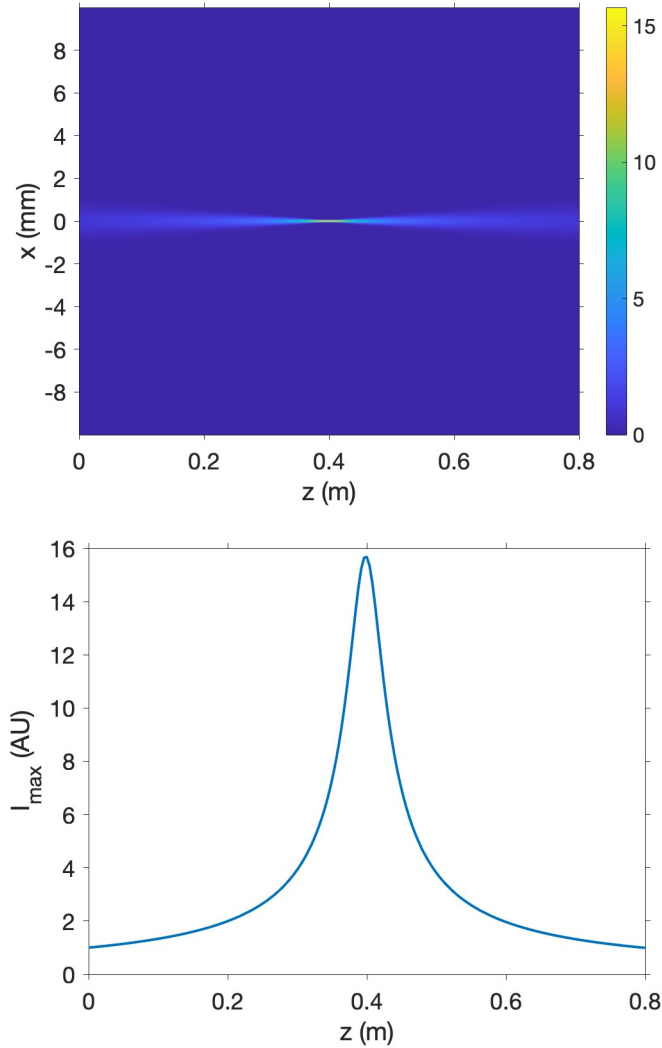


Figura 11: Propagazione di fascio Gaussiano $1D$ fino a $z = 0.8 m$ in presenza di lente sottile con $f_l = 0.4 m$. Nella seconda immagine si osserva l'andamento del massimo dell'intensità del fascio in funzione della propagazione.

Si è operata una simulazione numerica con i seguenti parametri fisici: la lunghezza d'onda del fascio Gaussiano è $\lambda = 0.5 \mu m$, la larghezza iniziale $\omega_0 = 1 mm$, l'intensità massima iniziale è scelta nuovamente adimensionale ed unitaria e la lunghezza focale viene posta pari a $f_l = 0.4 m$. Con questi parametri la lunghezza di Rayleigh è $z_R = 6.28 m$. Si è eseguita la propagazione del fascio Gaussiano $1D$ in seguito all'attraversamento della lente sottile fino a $z = 0.8 m$.

Come si osserva in figura (11) il fascio viene focalizzato esattamente alla distanza focale di $0.4 m$, punto in cui l'intensità è massima. In questo caso non c'è presenza di aberrazioni.

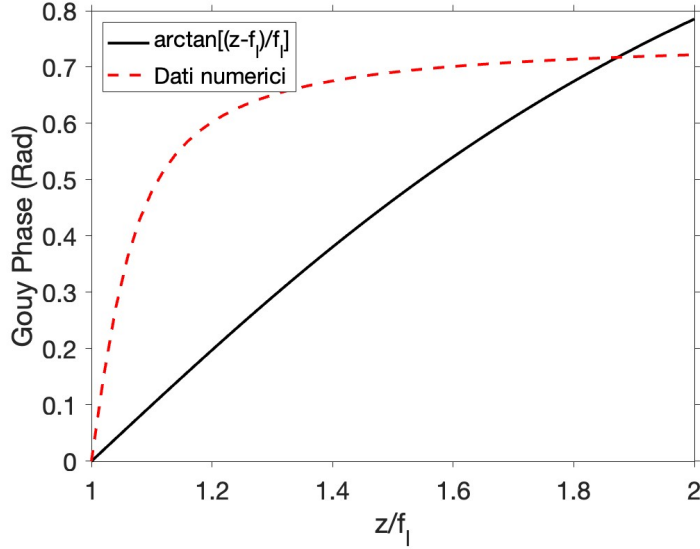


Figura 12: Confronto tra la fase di Gouy calcolata numericamente per fascio Gaussiano $1D$ in presenza di lente sottile con $f_l = 0.4 m$ e l'andamento $\arctan[(z - f_l)/f_l]$ a partire da $z = f_l$.

zione focale in quanto f_l è molto minore rispetto a z_R e l'allargamento del fascio dovuto alla diffrazione è ancora trascurabile rispetto alla focalizzazione del fascio verso il punto focale.

Anche nel caso di propagazione con lente sottile si può studiare la fase di Gouy del fascio propagante: in questo caso si andrà a plottare il confronto tra la simulazione numerica e l'andamento $\arctan[(z - f_l)/f_l]$ a partire da $z = f_l$, ovvero il punto in cui l'intensità di picco è massima. In figura (12) si osserva che la fase di Gouy aumenta molto più velocemente rispetto alla fase di Gouy di un fascio Gaussiano che si propaga nel vuoto. L'argomento che giustifica questo risultato è che focalizzandosi, il fascio Gaussiano diminuisce la sua larghezza nell'asse x molto velocemente e di conseguenza si ha un allargamento molto veloce nel dominio coniugato che porta ad un aumento della componente k_x . Quindi essendo $|\vec{k}|$ costante la componente k_z del fascio focalizzato è minore rispetto al fascio propagante nel vuoto, causando un aumento molto più rapido del ritardo di fase rispetto all'onda piana.

Si è eseguita una seconda simulazione per osservare gli effetti della diffrazione sulla focalizzazione del fascio. Si sono scelti gli stessi parametri fisici per il fascio Gaussiano, ma una distanza focale pari a due volte la lunghezza di Rayleigh, ovvero $f_l = 12.56 m$. In questa seconda simulazione, come si evince in figura (13), a causa della diffrazione il fascio non riesce a focalizzarsi alla distanza focale perché avvicinandosi al fuoco subisce un allargamento, ed avrà quindi un massimo dell'intensità antecedente rispetto al punto di fuoco (addirittura a $z = 2.54 m$ anziché a $z = 12.56 m$), dando così un effetto di aberrazione focale. Inoltre, com'era facilmente ipotizzabile, dalla figura (14) si osserva

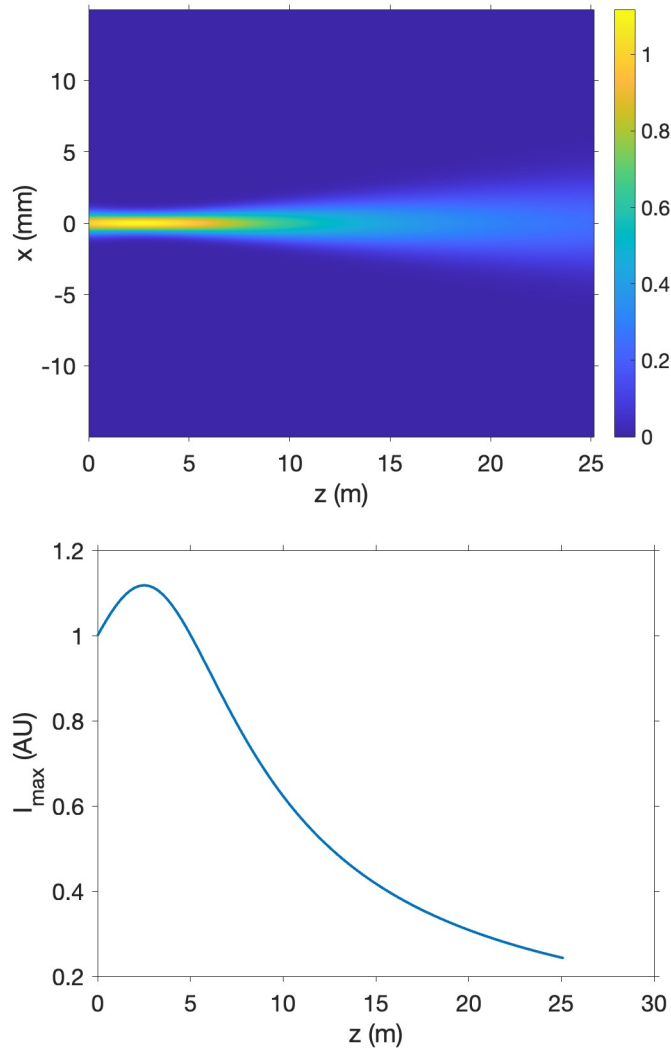


Figura 13: Propagazione di fascio Gaussiano $1D$ fino a $z = 25.12 m$ in presenza di lente sottile con $f_l = 12.56 m$. Nella seconda immagine si osserva l'andamento del massimo dell'intensità del fascio in funzione della propagazione.

che la fase di Gouy aumenta molto più lentamente rispetto al caso in cui $f_l = 0.4 m$, in quanto il fascio subisce solo un lieve restringimento iniziale dovuto alla lente ed un successivo allargamento dovuto alla diffrazione. Per studiare l'aberrazione focale si possono condurre due ulteriori analisi. Infatti eseguendo la simulazione per diversi valori della distanza focale f_l , si può studiare inizialmente l'andamento in funzione di f_l dell'intensità massima del fascio Gaussiano a cui viene sottratto il valore dell'intensità iniziale a $x = 0$; successivamente lo shift del punto di massimo dell'intensità rispetto al punto di fuoco della lente sempre in funzione di f_l .

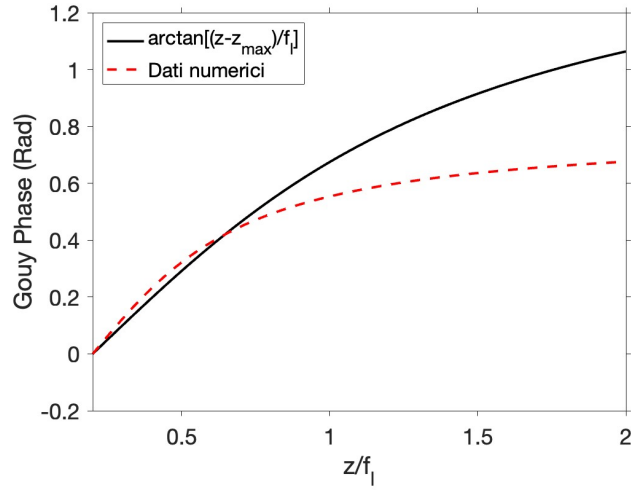


Figura 14: Confronto tra la fase di Gouy calcolata numericamente per fascio Gaussiano $1D$ in presenza di lente sottile con $f_l = 12.56 \text{ m}$ e l'andamento $\arctan(z - z_{max}/f_l)$ a partire da $z = z_{max}$, dove z_{max} è la distanza in cui si trova il massimo del picco di intensità.

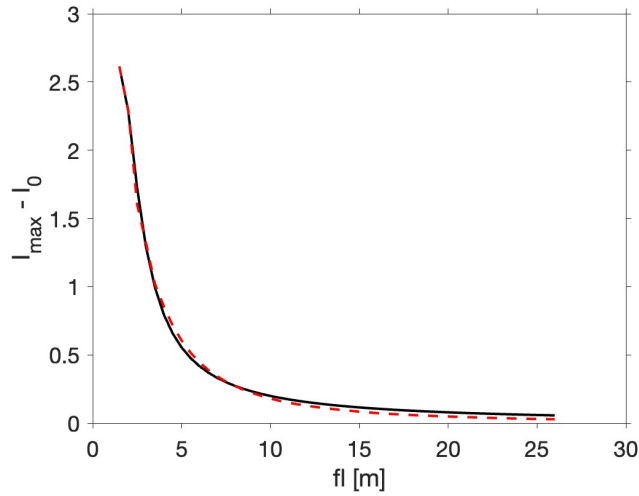


Figura 15: Andamento in funzione della distanza focale f_l del massimo dell'intensità durante la propagazione di un fascio Gaussiano $1D$ con lente sottile a cui viene sottratto il valore dell'intensità iniziale.

In figura (15) si riportano i risultati del primo studio in cui è interessante notare come l'andamento di decrescita del massimo dell'intensità rispetto alla distanza focale, avendo eseguito un fit polinomiale, è del tipo $\sqrt{1 + f_l^2}$. Questo andamento di decrescita del massimo dell'intensità è lo stesso andamento ottenuto in precedenza nel caso di propa-

gazione nel vuoto del fascio Gaussiano $1D$. Questo risultato conferma l'ipotesi che la minore focalizzazione del fascio osservata all'aumentare di f_l sia di origine diffrattiva.

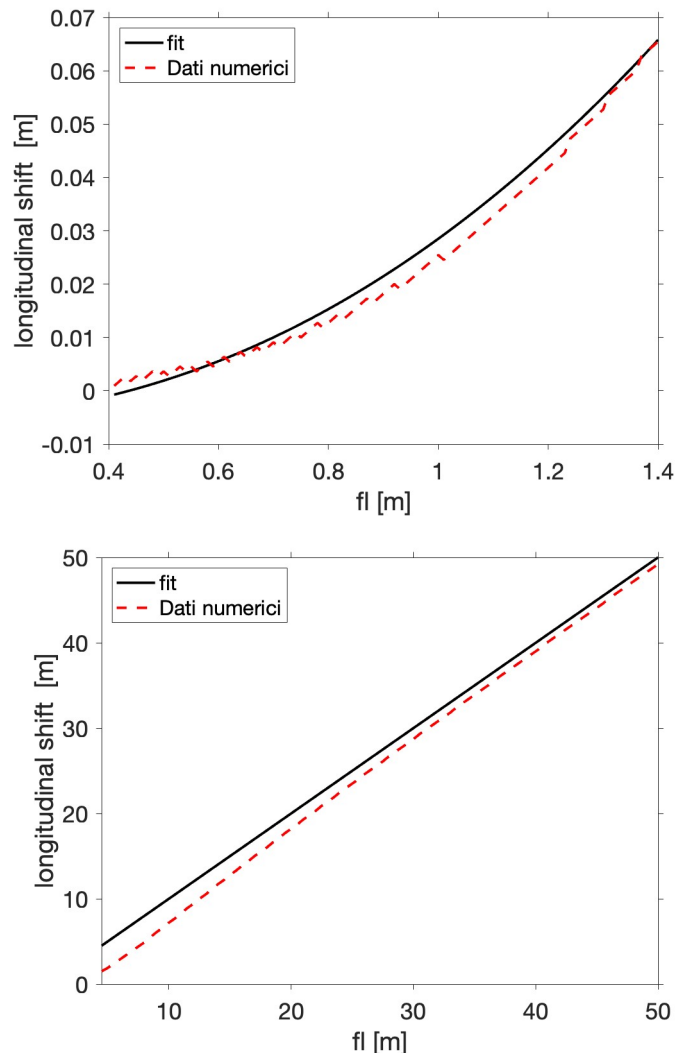


Figura 16: Andamento in funzione della distanza focale dello shift del punto di massimo dell'intensità del fascio rispetto al punto focale della lente. Si riportano gli andamenti in alto per $f_l < z_R$ ed in basso per $f_l > z_R$.

Il secondo studio, riportato in figura (16), evidenzia come all'aumentare della distanza focale aumenti l'aberrazione focale, a causa di un sempre maggior allargamento del fascio dovuto alla diffrazione durante la focalizzazione di questo verso il punto di fuoco della lente. Si osservano due andamenti diversi dell'aberrazione in funzione di f_l : per f_l molto minore rispetto alla lunghezza di Rayleigh, eseguendo un fit, si ha un andamento a potenza del tipo a^n dove $a = f_l$ e $n = 2.2$; per f_l maggiori rispetto alla lunghezza di

Rayleigh si ha invece un andamento lineare dove lo shift cresce proporzionalmente ad f_l . L'andamento lineare è coerente con il fatto che aumentando f_l , e di conseguenza il contributo della diffrazione, il massimo dell'intensità del fascio sarà sempre più prossimo a $z = 0$, in quanto il contributo focalizzante della lente diviene trascurabile e quindi lo shift del punto di massimo dell'intensità rispetto ad f_l tenderà ad essere proprio f_l .

3 Conclusione

All'interno di questa dissertazione è stato discusso un approccio numerico alla propagazione della luce. Dopo un'introduzione teorica dell'equazione delle onde, è stata derivata l'equazione parabolica (PE), discutendone le condizioni fisiche di validità. È stato quindi discusso il metodo BPM applicato alla risoluzione della PE, mostrandone il funzionamento per studiare effetti di diffrazione e disomogeneità. Nello specifico, il BPM è un potente strumento di calcolo utilizzabile in molti contesti di natura fisico-tecnologica per simulare fenomeni fisici in cui la luce si propaga in una direzione ben precisa, in quanto si basa sull'approssimazione SVEA. Sebbene la versione discussa presenti delle limitazioni, che richiedono ulteriori implementazioni per essere modellizzate in caso di materiali anisotropi o nonlineari, e nel caso in cui l'indice di rifrazione vari su distanze comparabili alla lunghezza d'onda della luce, l'approccio BPM utilizzato si è rivelato efficace per simulare e studiare la propagazione di fasci gaussiani in diversi regimi di diffrazione (Fresnel e Fraunhofer) e di focalizzazione in presenza di lenti sottili.

4 Appendice

In questa appendice si riportano i link ai principali codici BPM implementati:

-Simulazione di propagazione di fascio Gaussiano $2D$ ed interferenza di fascio Gaussiano $2D$ e onda piana:

<https://www.dropbox.com/s/d8jhtnqo3da3of0/BPM-Interference-plane-wave-gaussian-2D.m?dl=0>

-Simulazione di propagazione di fascio Gaussiano $1D$ ed interferenza di fascio Gaussiano $1D$ e onda piana:

<https://www.dropbox.com/s/nrb70qrhuzk4ye7/BPM-Interference-plane-wave-1D.m?dl=0>

-Simulazione di propagazione di fascio Gaussiano in presenza di lente convessa:

<https://www.dropbox.com/s/ckcax630cvvwlxy/BPM-LENS.m?dl=0>

5 Bibliografia

- [1] Bruno Crosignani. Dispense del Corso di Ottica. Università dell'Aquila, 1992.
- [2] Robert W. Boyd. Non linear optics. Academic Press, 2008.
- [3] Govind P. Agrawal. Nonlinear Fiber Optics. Academic Press, 2013.
- [4] Grant R. Fowles. Introduction to Modern Optics. Dover Publications, 1989.
- [5] https://www.rp-photonics.com/gaussian_beams.html
- [6] https://www.rp-photonics.com/gouy_phase_shift.html