SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Propagazione di impulsi laser ultracorti in materiali dispersivi

Facoltà di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Fisica

Candidato
Valeau Viola
Matricola 1962457

Relatore
Prof. Tullio Scopigno

Correlatore
Dr. Giovanni Batignani

Anno Accademico 2022/2023

Propagazione di impulsi laser ultracorti in materiali dispersivi
Tesi di Laurea. Sapienza – Università di Roma

© 2023 Valeau Viola. Tutti i diritti riservati

Questa tesi è stata composta con LaTeX e la classe Sapthesis.

Email dell'autore: valeau.1962457@studenti.uniroma1.it

Indice

1 Elementi di Elettromagnetismo ed equazione di Helmholtz **3**
1.1 Equazioni di Maxwell 3
1.2 Equazione delle onde nel vuoto 4
1.3 Equazione di Helmholtz 5
1.4 Soluzione dell'equazione di Helmholtz 8

2 Effetti dispersivi nella propagazione degli impulsi e metodi numerici **10**
2.1 Velocità di fase e di gruppo 10
2.2 Dispersione lineare 11
2.3 Termine di assorbimento 11
2.4 Soluzione analitica per un impulso gaussiano 11
2.5 Group Velocity Dispersion GVD 13
2.6 Soluzione del secondo ordine per un impulso gaussiano 13
2.7 Diversi regimi di dispersione 15
2.8 Split-Step Fourier method 17
2.9 Third Order Dispersion TOD 19

Bibliografia **27**

Introduzione

L'obiettivo di questa dissertazione è quello di studiare la propagazione di impulsi laser ultracorti in mezzi dispersivi. La propagazione della luce nella materia è infatti tipicamente accompagnata da effetti dispersivi, causati dalla dipendenza dell'indice di rifrazione del mezzo attraversato dalla frequenza dell'onda elettromagnetica. Numerosi campi di ricerca, tra cui l'ottica nonlineare e la spettroscopia risolta in tempo, sfruttano l'impiego di impulsi di luce ultracorta per sondare le proprietà della materia o manipolare le proprietà dei campi elettromagnetici: dato che la presenza di effetti dispersivi può causare modifiche sostanziali del profilo temporale del campo elettromagnetico.
Lo strumento alla base della generazione di impulsi ultracorti è il laser: infatti dopo solo due decenni dall'invenzione dei laser, la durata del più breve impulso di luce prodotto si è ridotta di sei ordini di grandezza, passando da nanosecondi a femtosecondi ($10^{-15}s$). Negli utlimi anni, grazie ai molti lavori di ricerca, si è arrivati a generare impulsi di luce della durata di attosecondi ($10^{-18}s$) [1], permettendo di investigare fenomeni dapprima inacessibili come il moto degli elettroni nella materia. [2]
Lo studio di impulsi laser ultracorti, con la loro elevata concentrazione di energia, è di grande interesse per l'analisi di eventi di durata ultrabreve e delle loro proprietà e in particolare per lo studio dell'interazione radiazione-materia e quindi la risposta di atomi e molecole, i quali costituiscono i diversi mezzi di propagazione[3]. In generale, lo studio di tali impulsi veste un ruolo centrale in molti campi oltre quello della fisica, come nelle telecomunicazioni, nella bio-ingegneria, nella femtochimica e in molti altri ancora.
Un ruolo chiave in tali studi è svolto dall'utilizzo di metodi numerici quali lo Split-Step Fourier method, introdotto nel 1970, grazie al quale è possibile analizzare la propagazione di un fascio di luce in un materiale tenendo conto di una vasta gamma di effetti, tra cui la dispersione, la diffrazione e la nonlinearità. L'algoritmo alla base di questo questo metodo viene largamente impiegato nella risoluzione di problemi ottici e spettroscopici, soprattutto nel caso in cui non siano derivabili soluzioni analitiche.

Nel primo capitolo (Chapter 1), partendo dalle equazioni di Maxwell, è stata ricavata l'equazione di Helmholtz che descrive la propagazione di un impulso di luce in un materiale.

Nel secondo capitolo (Chapter 2) sono stati studiati analiticamente gli effetti dispersivi del primo, del secondo e del terzo ordine sul profilo temporale dell'impulso propagante; nello specifico è stato analizzato il caso di un impulso gaussiano.
Poi, introdotto lo Split-Step Fourier method, è stata simulata la propagazione di un impulso gaussiano ultracorto: pertanto sono state verificate le variazioni del profilo temporale dell'impulso a causa degli effetti dispersivi quali la Group Velocity

dispersion e la Third-Order dispersion.
Infine, è stato utilizzato ancora l'algoritmo simulativo per generalizzare la trattazione e quindi studiare il caso più complesso di un impulso super-gaussiano.

Capitolo 1

Elementi di Elettromagnetismo ed equazione di Helmholtz

L'obiettivo di questo capitolo è ricavare una forma compatta dell'equazione delle onde per descrivere la propagazione di un impulso di luce [4].

1.1 Equazioni di Maxwell

La teoria classica secondo la quale un fascio di luce è considerato come un'onda elettromagnetica è stata sviluppata da Maxwell nella seconda metà del Diciannovesimo secolo. In questa sezione si vuole riassumere la teoria di Maxwell e i suoi risultati [5]. Si parte quindi dalle equazioni di Maxwell:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

dove ρ e $\vec{J}$ indicano la densità di carica e la densità di corrente e costituiscono le sorgenti del campo elettromagnetico. Queste due grandezze sono legate tra loro dall'equazione di continuità

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Il vettore di induzione elettrica $\vec{D}$ e l'equivalente magnetico $\vec{B}$ sono i campi ausiliari con cui si tratta il sistema in presenza di materia e vengono definiti dalle due relazioni costitutive 1.1

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon \vec{E} \qquad \vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \vec{M} \tag{1.1}$$

dove ϵ e μ sono rispettivamente la costante dielettrica e la costante di permeabilità magnetica con le quali si esprime il grado di permeabilità al campo elettrico e magnetico.[1]

[1] ϵ_0 e μ_0 fanno riferimento alle rispettive quantità nel vuoto, nel caso in cui il mezzo permeato non è il vuoto si introducono le grandezze relative ϵ_r e μ_r. Quindi definiamo ϵ=$\epsilon_0\epsilon_r$ e μ=$\mu_0\mu_r$.

La presenza di un campo elettrico/magnetico in un dato materiale ne modifica la distribuzione di carica inducendo quindi la presenza dei momenti di dipolo; quantitativamente tale modifica è espressa proprio dai vettori di polarizzazione $\vec{P}$ e $\vec{M}$. Infatti, questi vettori sono definiti come il momento di dipolo elettrico e magnetico per unità di volume.
Con queste equazioni si quantifica la risposta del mezzo alla presenza dei campi e perciò sono caratteristiche del mezzo preso in esame. Nel seguito verrano considerati materiali detti dielettrici perfetti[2] per cui gli effetti magnetici sono trascurabili, quindi $\mu = \mu_0\mu_r \simeq \mu_0$, $\vec{M} \simeq 0$ e dunque $\vec{B} = \mu_0\vec{H}$.

1.2 Equazione delle onde nel vuoto

Si vuole descrivere la propagazione di un fascio di luce e quindi ricavare l'equazione delle onde nel vuoto.
Si riscrivono le equazioni di Maxwell nel vuoto in assenza di cariche, $\rho = 0$ $\vec{J} = 0$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \tag{1.2a}$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{1.2b}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \tag{1.2c}$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \epsilon_0\mu_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \tag{1.2d}$$

Valutando quindi il rotore della 1.2b, è possibile sviluppare i calcoli sfruttando la relazione vettoriale

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \wedge \vec{f} = -\nabla^2 + \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\vec{f})$$

Ricordando che $\vec{\nabla}E = 0$ si ottiene

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) = -\nabla^2\vec{E} + \nabla(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) = -\nabla^2\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla} \wedge \vec{B}$$

Infine, si sostituisce la relazione 1.2d, ottendo l'equazione delle onde nel vuoto per il campo elettrico

$$\nabla^2\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0 \qquad \epsilon_0\mu_0 = \frac{1}{c^2} \tag{1.3}$$

Analogamente si trova l'equazione delle onde nel vuoto per il campo di induzione magnetica $\vec{B}$.
Ora si prende in considerazione un'onda piana, per convenzione propagante lungo z, e si suppone l'onda polarizzata linearmente, per convenzione lungo l'asse x. Con tali approsimazioni si ha $E_y = E_z = 0$ e $B_x = B_z = 0$ e dunque la 1.3 diventa

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0 \tag{1.4}$$

che ammette soluzioni monocromatiche del tipo

$$E_x(z,t) = E_{x_0}\cos(kz - \omega t + \varphi) \tag{1.5}$$

[2]Materiali di questo genere sono ad esempio il vetro o i polimeri che, per tale proprietà, sono considerati dei buoni materiali ottici.

Così anche per il campo di induzione magnetica si ha

$$B_y(z,t) = B_{y_0}\cos(kz - \omega t + \varphi)$$

dove φ è una fase arbitraria, k è il vettore d'onda, ω la pulsazione e B_{y_0}, E_{x_0} sono le rispettive ampiezze dell'onda.

Le relazioni 1.2b e 1.2d diventano

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\frac{\partial B_y}{\partial t}$$

$$-\frac{\partial B_y}{\partial z} = \mu_0\epsilon_0\frac{\partial E_x}{\partial t}$$

Si evince che, nel caso di onda piana polarizzata linearmente, i vettori campo magnetico e campo elettrico oscillano perpendicolarmente tra loro nonchè alla direzione dell'onda.

Definito il vettore di velocità di propagazione $\vec{v}$, si scrive la relazione che lega i due vettori:

$$\vec{E} = \vec{B} \wedge \vec{v} \qquad \pm|\vec{v}| = \frac{|\vec{E}|}{|\vec{B}|}$$

1.3 Equazione di Helmholtz

Si discute adesso il caso di un'onda piana monocramatica polarizzata linearmente propagante in un mezzo non magnetico e in assenza di sorgenti. Si vuole studiare tale sistema passando nello spazio trasformato, ossia nel dominio delle frequenze.

Per completare la descrizione del sistema si cerca la relazione che lega i due vettori $\vec{E}$ e $\vec{P}$ [4].

Supponendo il mezzo isotropo con risposta lineare nel campo elettrico $\vec{E}$, locale (approsimazione di dipolo [4]) e non istantanea, quindi dipendente dal tempo, la relazione cercata nel dominio del tempo è

$$\vec{P}(\vec{r},t) = \epsilon_0\int_{-\infty}^{\infty}\chi^{(1)}(t-t')\vec{E}(t')dt' \tag{1.6}$$

dove $\chi^{(1)}$ è la suscettività elettrica ed è una funzione scalare proprio per l'assunzione di isotropia, altrimenti corrisponderebbe a un tensore, e ne compare solo il termine al primo ordine proprio per l'assunzione di linearità [3].

Con l'ausilio della trasformata e l'antitrasformata di Fourier

$$\tilde{f}(\omega) = \mathscr{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} dt f(t)e^{i\omega t}$$

$$f(t) = \mathscr{F}[\tilde{f}(\omega)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\tilde{f}(\omega)e^{-i\omega t}$$

e sfruttando il teorema di convoluzione, per il quale vale che

$$f * g = \int f(t-t')g(t')dt' \qquad \mathscr{F}[f*g] = \tilde{f}(\omega)\tilde{g}(\omega)$$

[3] si trascurano quindi gli ordini superiori quali $\chi^{(3)}$ che rappresenta il contributo delle vibrazioni atomiche (effetto Raman)[4] e $\chi^{(2)}$ che in generale è nullo nel caso di molecole centro simmetriche

l'equazione 1.6 può essere riscritta nel dominio delle frequenze

$$\tilde{P}(\omega) = \epsilon_0 \tilde{\chi}(\omega) \tilde{E}_x(\omega) \tag{1.7}$$

A questo punto è possibile riscrivere anche l'espressione del vettore d'induzione elettrica 1.1 nel dominio delle frequenze

$$\tilde{D}_x = \epsilon_0 \tilde{E}_x + \tilde{P}_x = \epsilon_0 \tilde{E}_x + \epsilon_0 \tilde{\chi}(\omega) \tilde{E}_x = \epsilon_0 \epsilon_r(\omega) \tilde{E}_x \tag{1.8}$$

dove $\epsilon_r(\omega)$ è la costante dielettrica relativa ed è una costante complessa.

$$\epsilon_r(\omega) = 1 + \tilde{\chi}^{(1)}(\omega) \tag{1.9}$$

Le sue parti reali e immaginarie sono legate rispettivamente al numero d'onda k(ω) e al coefficiente di assorbimento $\alpha(\omega)$, anch'essi dipendenti dalla frequenza

La costante dielettrica può essere espressa in funzione dell'indice di rifrazione del materiale $n(\omega)$

$$\epsilon = (n + \delta n)^2 \simeq n^2 + 2n\delta n \tag{1.10}$$

dove δn è una piccola perturbazione, tipicamente molto minore rispetto alla sua media $|\delta n| << n$. Assumendo che la parte immaginaria di $\epsilon(\omega)$ sia piccola rispetto alla sua parte reale [4], ovvero assumendo l'assorbimento quasi nullo, si ottiene

$$n(\omega)^2 \equiv \epsilon_r(\omega) \tag{1.11}$$

L'indice di rifrazione può essere visto come il fattore adimensionale per il quale la velocità di un'onda propagante in un mezzo si riduce rispetto al suo valore nel vuoto: $v = c/n(\omega)$ e dunque il suo valore nel vuoto è pari a 1.

La dipendenza dell'indice di rifrazione dalla frequenza spazialmente è responsabile della dispersione cromatica delle componenti, ossia frequenze diverse sono rifratte dal materiale con angoli diversi (Legge di Snell). Invece, temporalmente è responsabile della variazione del profilo temporale.

Le trasformate della terza e della quarta equazione di Maxwell con l'ausilio delle trasformate di Fourier $\mathscr{F}$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\frac{\partial B_y}{\partial t} \qquad \frac{\partial B_y}{\partial z} = -\mu_0 \frac{\partial D_x}{\partial t}$$

$$\Rightarrow {}^{4} \frac{\partial \tilde{E}_x}{\partial z} = i\omega \tilde{B}_y \qquad \frac{\partial \tilde{B}_y}{\partial z} = i\omega\mu_0 \tilde{D}_x$$

Sostituendo nelle due relazioni 1.3 si ha

$$\frac{\partial \tilde{E}_x}{\partial z} = i\omega \tilde{B}_y \qquad \frac{\partial \tilde{B}y}{\partial z} = i\omega\mu_0\epsilon_0\epsilon_r \tilde{E}_x$$

[4] si ricorda che la trasformata di Fourier di una derivata è

$$\frac{\partial}{\partial t} \Rightarrow -i\omega$$

Derivando la prima delle due equazione precedenti

$$\frac{\partial^2 \tilde{E}_x}{\partial z^2} = i\omega \frac{\partial \tilde{B}y}{\partial z} = i\omega(i\omega\mu_0\epsilon_0\epsilon_r\tilde{E}_x) = -\frac{\omega^2}{c^2}\epsilon_r(\omega)\tilde{E}_x$$

si ottiene l'equazione di Helmholtz, ossia l'equazione delle onde nello spazio trasformato:

$$\frac{\partial^2 \tilde{E}_x(\omega)}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c^2}\epsilon_r(\omega)\tilde{E}_x(\omega) = 0 \tag{1.12}$$

Inoltre definendo il vettore d'onda

$$k = \frac{\sqrt{\epsilon_r(\omega)}\,\omega}{c} = \frac{\omega n(\omega)}{c} = \frac{2\pi}{\lambda} \tag{1.13}$$

si può riscrivere l'equazione di Helmholtz come segue

$$\frac{\partial^2 \tilde{E}_x(\omega)}{\partial z^2} + k^2(\omega)\tilde{E}_x(\omega) = 0 \tag{1.14}$$

Matematicamente, gli effetti della dispersione sono rappresentati dallo sviluppo in serie di Taylor del vettore d'onda k; tale studio verrà affrontato nei capitoli successivi.

1.4 Soluzione dell'equazione di Helmholtz

Per risolvere la 1.12 si prende in considerazione il caso di un'onda polarizzata linearmente e quasi-monocromatica [5], ossia un'onda per cui lo spettro è distribuito intorno la frequenza portante. Questo equivale ad assumere che la larghezza dello spettro dell'impulso $\Delta\omega$ sia molto minore della frequenza ω_0: $\Delta\omega \ll \omega_0$. In particolare, siccome $\omega_0 \simeq 10^{15} s^{-1}$, si considerano impulsi ultracorti di ordine pari a 0.1 ps[4].

Al fine di valutare la propagazione è utile riscrivere il campo elettromagnetico separando la portante ($e^{-i\omega_0 t}$) dall'inviluppo lentamente variabile ($F(z,t)$), secondo la relazione:

$$E(z,t) = F(z,t)e^{-i\omega_0 t} \tag{1.15}$$

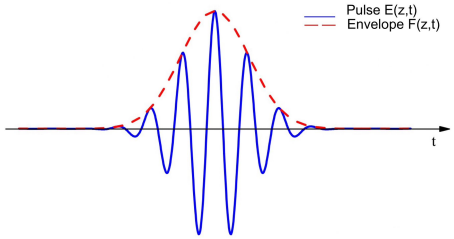

Figura 1.1. Esempio di onda quasi-monocromatica scritta in termini di una fase oscillante e un inviluppo complesso

la trasformata di Fourier del campo elettrico è

$$\tilde{E}(z,t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt E(z,t)e^{i\omega t} = \int_{-\infty}^{\infty} dt F(z,t)e^{i(\omega-\omega_0)t} \equiv \tilde{F}(z,\omega-\omega_0) \tag{1.16}$$

ossia la trasformata del campo coincide con la trasformata dell'inviluppo ed è traslato spettralmente per essere centrato alla frequenza portante ω_0.

In questi termini si può riscrivere l'equazione di Helmholtz 1.14 fattorizzandola in due fattori corrispondenti a un'onda progressiva e regressiva

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + ik(\omega)\right)\left(\frac{\partial}{\partial z} - ik(\omega)\right)\tilde{E}(\omega) = 0$$

lo studio di uno dei due fattori è equivalente dunque, dal secondo, la soluzione avanzante è

$$\frac{\partial \tilde{E}(\omega)}{\partial z} = ik\tilde{E}(\omega)$$

si assume una soluzione di prova *quasi*-monocromatica della forma

$$\tilde{E}(z,\omega-\omega_0) = \tilde{F}(z,\omega-\omega_0) = \tilde{A}(z,\omega-\omega_0)e^{ik(\omega_0)z} \tag{1.17}$$

[5] Come ad esempio una sorgente di luce laser

e sostituendola nella soluzione avanzante si ottiene un'equazione per l'inviluppo

$$ik(\omega_0)e^{ik\omega_0 z}\tilde{A}(z,\omega-\omega_0)+e^{ik(\omega_0)z}\frac{\partial}{\partial z}\tilde{A}(z,\omega-\omega_0)=ik(\omega)\tilde{A}(z,\omega-\omega_0)e^{ik(\omega_0)z}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial z}\tilde{A}(z,\omega-\omega_0)=i[k(\omega)-k(\omega_0)]\tilde{A}(z,\omega-\omega_0)=i\Delta k\tilde{A}(z,\omega-\omega_0) \tag{1.18}$$

si procede ora sviluppando $k(\omega)$ nell'intorno della portante ω_0 sino al terzo ordine

$$k(\omega)\simeq k(\omega_0)+\frac{dk(\omega)}{d\omega}|_{\omega_0}(\omega-\omega_0)+\frac{1}{2}\frac{d^2k(\omega)}{d\omega^2}|_{\omega_0}(\omega-\omega_0)^2+\frac{1}{6}\frac{d^3k(\omega)}{d\omega^3}|_{\omega_0}(\omega-\omega_0)^3+...$$

da cui, definendo k$_i$ = $\left(\frac{d^m}{d\omega^m}\right)_{\omega=\omega_0}$ con m=1,2,3,.. , si ha

$$\Delta k=k(\omega)-k(\omega_0)\simeq k_1(\omega-\omega_0)+\frac{1}{2}k_2(\omega-\omega_0)^2+\frac{1}{6}k_3(\omega-\omega_0)^3+\mathscr{O}(\omega-\omega_0)^4 \tag{1.19}$$

infine sostiuendo lo sviluppo nella 1.18 si ricava l'equazione che descrive la forma dell'inviluppo ottico nel dominio delle frequenze

$$\frac{\partial}{\partial z}\tilde{A}(z,\omega-\omega_0)\simeq i\left[k_1(\omega-\omega_0)+\frac{1}{2}k_2(\omega-\omega_0)^2)+\frac{1}{6}k_3(\omega-\omega_0)^3\right]\tilde{A}(z,\omega-\omega_0) \tag{1.20}$$

Si osserva che nel caso in cui $k(\omega)$ sia un termine complesso, la sua parte immaginaria può essere espressa come $\mathrm{Im}\{k(\omega)\}=\frac{\alpha}{2}$, con α il coefficiente di assorbimento il quale causa l'attenuazione del campo durante la propagazione nel mezzo. Se si tiene conto del termine di assorbimento la 1.20 diviene

$$\frac{\partial}{\partial z}\tilde{A}(z,\omega-\omega_0)=i\left[k_1(\omega-\omega_0)+\frac{1}{2}k_2(\omega-\omega_0)^2+\frac{1}{6}k_3(\omega-\omega_0)^3+i\frac{\alpha}{2}\right]\tilde{A}(z,\omega-\omega_0)$$

Antitrasformando quanto appena ottenuto, è possibile riscrivere l'equazione di propagazione nel dominio temporale:

$$\frac{\partial}{\partial z}A(z,t)=-k_1\frac{\partial}{\partial t}A(z,t)-\frac{ik_2}{2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}A(z,t)+\frac{k_3}{6}\frac{\partial^3}{\partial t^3}A(z,t)-\frac{\alpha}{2}A(z,t) \tag{1.21}$$

Questa equazione tiene conto degli effetti di assorbimento tramite il termine α e degli effetti della dispersione cromatica con k_1, k_2 e k_3.
Sotto determinate condizioni, quali includere i termini non lineari, tale relazione può essere ridotta alla forma dell'equazione di Schrödinger, per questo è anche detta equazione di Schrödinger non lineare [4].

Capitolo 2

Effetti dispersivi nella propagazione degli impulsi e metodi numerici

All'interno di questo capitolo sarà discussa la propagazione di un impulso di luce con profilo gaussiano, in presenza di effetti dispersivi al primo, secondo e terzo ordine.
Al fine di generalizzare a casi di profili temporali arbitrari ed in presenza di effetti dispersivi di ordine superiore, sarà introdotto un metodo numerico: lo Split-Step Fourier method.

2.1 Velocità di fase e di gruppo

Si vuole approfondire il ruolo di k_1 e k_2 nella propagazione dell'onda.
A tal fine è necessario definire alcuni concetti quali le velocità di gruppo e di fase.

Si considera un'onda sinusoidale

$$U(z,t) = U_0 sin(kz - \omega t + \xi)$$

dove φ =kz $\pm\omega t + \xi$ è la fase totale dell'onda, k e ω sono il vettore d'onda e la velocità angolare, rispettivamente definiti come

$$k = \frac{\partial \varphi}{\partial z}|_t \qquad \pm\,\omega = \frac{\partial \varphi}{\partial t}|_z$$

Si definisce velocità di fase v_φ la velocità alla quale si muove la fase delle componenti in frequenza dell'onda, ossia, se $kz \pm \omega t + \xi = \varphi_0 = costante$

$$\pm\, v_\varphi \equiv -\frac{\partial z}{\partial t}|_\varphi = \frac{\partial z}{\partial \varphi}|_t \frac{\partial \varphi}{\partial t}|_z = \pm\frac{\omega}{k} \tag{2.1}$$

La velocità di fase rappresenta la velocità dei fronti d'onda di una radiazione propagante in un materiale, infatti viene anche definita come $\pm v_\varphi(\omega) = c/n(\omega)$ e il segno ad essa associata ne indica la direzione di propagazione.

La velocità di gruppo $v_g(\omega)$, invece, rappresenta la velocità con cui si propagaga l'inviluppo nel mezzo come sarà discusso nel capitolo 2.5 [6].

La velocità di gruppo e la velocità di fase coincidono nel caso in cui l'indice di rifrazione n non dipenda dalla frequenza ω oppure nel caso di impulso monocromatico, caso fisicamente irrealizzabile.

2.2 Dispersione lineare

Si vuole analizzare l'effetto della dispersione al primo ordine perturbativo k_1 nella propagazione dell'impulso, in particolare si studia matematicamente il caso di un impulso gaussiano. Si considerano i termini di ordine successivo al primo k_2=k_3=0, in questo modo la 1.21 diventa

$$\frac{\partial}{\partial z}A(z,t) = -k_1\frac{\partial}{\partial t}A(z,t) - \frac{\alpha}{2}\frac{\partial}{\partial t}A(z,t) \tag{2.2}$$

2.3 Termine di assorbimento

Si è visto che il termine di assorbimento nell'equazione è tale che l'onda propagante nel mezzo venga attenuata. Infatti nell'equazione di Helmohltz il contributo delle perdite è dovuto ad un legge di decadimento esponenziale parametrizzata da α. Per dimostrarlo si considera l'intensità del campo I= $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}|\vec{E}|^2$ e un fattore esponenziale proporzionale al coefficiente di polarizzabilità.
Allora si riscrive la forma dell'inviluppo: per l'arbitrarietà della normalizzazione dell'impulso, si cerca una soluzione in cui il termine delle perdite per attenuazione sia compreso nella soluzione stessa, ossia

$$A(z,t) = \sqrt{I_0}\,a(z,t)e^{\frac{-\alpha z}{2}} \tag{2.3}$$

scrivendo l'inviluppo $A(z,t)$ nella forma in cui è esplicito il termine di assorbimento è possibile riscrivere la 2.2 in funzione di $a(z,t)$

$$\sqrt{I_0}\frac{\partial}{\partial z}a(z,t)e^{\frac{-\alpha}{2}} - \frac{\alpha z}{2}\sqrt{I_0}\,a(z,t)e^{\frac{-\alpha z}{2}} + k_1\sqrt{I_0}\frac{\partial}{\partial t}a(z,t)e^{\frac{-\alpha z}{2}} + \frac{\alpha}{2}\sqrt{I_0}\,a(z,t)e^{\frac{-\alpha z}{2}} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial z}a(z,t) + k_1\frac{\partial}{\partial t}a(z,t) = 0 \tag{2.4}$$

Questa è l'equazione di Helmholtz che descrive l'evoluzione dell'inviluppo complesso $a(z,t)$ in un mezzo senza perdite per assorbimento e passando nel dominio di Fourier diventa

$$\frac{\partial}{\partial z}\tilde{a}(z,\omega) = ik_1\omega\tilde{a}(z,\omega)$$

conoscendo la forma iniziale dell'inviluppo, tale equazione ammette soluzioni del tipo

$$\tilde{a}(z,\omega) = \tilde{a}(z=0,\omega)e^{ik_1 z\omega} \tag{2.5}$$

2.4 Soluzione analitica per un impulso gaussiano

Si considera un impulso gaussiano con profilo temporale all'ingresso del mezzo dispersivo rappresentato da

$$a(z=0,t) = e^{\frac{-t^2}{2t_0^2}}$$

Ora si vuole capire come evolve il profilo dell'inviluppo quando il mezzo in cui si propaga è un mezzo dielettrico. A tale fine si studia prima la trasformata dell'inviluppo $\tilde{a}(z=0,t)$ e poi si antitrasforma, ricordando che la trasfromata di una

gaussiana è ancora una gaussiana ma con varianza pari al reciproco della varianza nella gaussiana iniziale.

$$\tilde{a}(z=0,\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt a(z=0,t)e^{i\omega t} = \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{\frac{-t^2}{2t_0^2}} e^{i\omega t} = \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-\frac{t^2-2i\omega t t_0^2}{2t_0^2}} =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-\frac{(t-t_0^2 i\omega)^2+\omega^2 t_0^4}{2t_0^2}} = e^{-\frac{\omega^2 t_0^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-\frac{(t-t_0^2 i\omega)^2}{2t_0^2}} = \sqrt{2\pi t_0^2}\, e^{-\frac{\omega^2 t_0^2}{2}}$$

quindi sostituendo nella 2.5

$$\tilde{a}(z,\omega) = \sqrt{2\pi t_0^2}\, e^{-\frac{\omega^2 t_0^2}{2}} e^{ik_1 z\omega} \tag{2.6}$$

Si procede ora antitrasformando la trasfromata di Fourier dell'inviluppo $\tilde{a}(z,\omega)$ appena calcolata sfruttando il completamento del quadrato [1] e integrale gaussiano [2]:

$$a(z,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \tilde{a}(z,\omega)e^{-i\omega t} = \frac{t_0^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-\frac{\omega^2 t_0^2}{2}} e^{-i\omega t} e^{ik_1 z\omega} =$$
$$= \frac{t_0}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-\frac{1}{2}[t_0^2\omega^2+2i\omega(t-k_1 z)]} = \frac{t_0}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-\frac{1}{2}[t_0^2\omega^2-2i\omega(t-k_1 z)-\frac{(t-k_1 z)^2}{t_0^2}]} e^{-\frac{(t-k_1 z)^2}{2t_0^2}}$$
$$= \frac{t_0}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2t_0^2}(t-k_1 z)^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-\frac{1}{2}[t_0\omega-\frac{i(t-k_1 z)}{t_0}]^2} = \frac{t_0}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{2\pi}{t_0^2}}\, e^{-\frac{(t-k_1 z)^2}{2t_0^2}}$$

$$\Rightarrow a(z,t) = e^{\frac{(t-k_1 z)^2}{2t_0^2}} \tag{2.7}$$

Notiamo quindi che la forma inziale del profilo gaussiano non viene modificata col passaggio nel dielettrico: si osserva infatti che la differenza col segnale in ingresso è solo una traslazione spaziale dell'inviluppo lungo l'asse di propagazione e con velocità costante pari proprio alla velocità di gruppo. Quindi si interpreta $v_g = 1/k_1$, infatti:

$$k_1(\omega_0) \equiv \frac{dk}{d\omega}|_{\omega_0} = \frac{d}{d\omega}\frac{\omega n(\omega)}{c}|_{\omega_0} = \frac{n(\omega)}{c} + \frac{\omega_0}{c}\frac{d}{d\omega}n(\omega)|_{\omega_0} = \frac{1}{v_g(\omega_0)}$$

Dunque dalla 2.7 si ricava

$$A(z,t) = \sqrt{I_0}\, a(z,t)e^{\frac{-\alpha z}{2}} = \sqrt{I_0}\, e^{-\frac{(t-k_1 z)^2}{2t_0^2}} e^{-\frac{\alpha z}{2}}$$

$$F(z,t) = \sqrt{I_0}\, e^{-\frac{(t-k_1 z)^2}{2t_0^2}} e^{-\frac{\alpha z}{2}} e^{ik_1(\omega_0)z}$$

Sostiuendo nell'espressione del modello, si ottiene la relazione che esprime il campo elettrico

$$\Rightarrow E_x(z,t) = \sqrt{I_0}\, e^{-\frac{(t-k_1 z)^2}{2t_0^2}} e^{-\frac{\alpha z}{2}} e^{ik_1(\omega_0)z} e^{-i\omega_0 t}$$

[1] si ricostruisce il quadrato del binomio ($t_0\ \omega$ - c)^2 = $t_0^2 c^2$ + c^2 -2ωt_0c $\Rightarrow$ per similitudine c = $i(t - k_1 z)/t_0$

[2]
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-bx^2+cx+d} = \sqrt{\frac{\pi}{b}}\, e^{\frac{c^2}{4b}+d}$$

2.5 Group Velocity Dispersion GVD

Si parte studiando l'effetto della dispersione del secondo ordine k_2 nella propagazione dell'impulso. Seguendo passaggi analoghi allo studio del primo ordine, si considera il termine di ordine successivo nullo k_3=0 in modo che la 1.21 divenga

$$\frac{\partial}{\partial z}A(z,t) + k_1\frac{\partial}{\partial t}A(z,t) + \frac{ik_2}{2}\frac{\partial}{\partial t}A(z,t) + \frac{\alpha}{2}\frac{\partial}{\partial t}A(z,t) = 0 \tag{2.8}$$

Di nuovo si cerca una soluzione del tipo

$$A(z,t) = \sqrt{I_0}\,a(z,t)e^{\frac{\alpha z}{2}}$$

esprimendo la 2.8 in funzione di $a(z,t)$ si ottiene la seguente equazione differenziale

$$\frac{\partial}{\partial z}a(z,t) + k_1\frac{\partial}{\partial t}a(z,t) + \frac{ik_2}{2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}a(z,t) = 0 \tag{2.9}$$

Per proseguire la trattazione è conveniente passare nel sistema di riferimento solidale con l'impulso che si propaga con velocità $1/k_1$; quindi si effettua un cambio di coordinate e in questo nuovo sistema si riscrive la precedente equazione differenziale

$$z \to Z \qquad t \to T = t - k_1 z$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial z}\frac{\partial}{\partial Z} + \frac{\partial T}{\partial z}\frac{\partial}{\partial T} = -k_1\frac{\partial}{\partial T} \qquad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial Z}{\partial t}\frac{\partial}{\partial Z} + \frac{\partial T}{\partial t}\frac{\partial}{\partial T} = \frac{\partial}{\partial T}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial Z}a(Z,T) + \frac{ik_2}{2}\frac{\partial^2}{\partial T^2}a(Z,T) = 0 \tag{2.10}$$

Inoltre, è utile riscrivere tale relazione nello spazio trasformato, definendo Ω la frequenza associata al tempo T

$$\frac{\partial}{\partial Z}\tilde{a}(Z,\Omega) - \frac{i\Omega^2 k_2}{2}\tilde{a}(Z,\Omega) = 0 \tag{2.11}$$

le cui soluzioni ammesse sono del tipo $\tilde{a}(Z,\Omega) = \tilde{a}(Z=0,\Omega)e^{i\Omega^2 k_2 Z/2}$.

2.6 Soluzione del secondo ordine per un impulso gaussiano

Analogamente al capitolo precedente, si studia analiticamente la group velocity dispersion nel caso d'impulso gaussiano.
L'inviluppo iniziale ossia prima dell'ingresso nel dielettrico è quindi gaussiano a fase nulla

$$a(Z=0,T) = e^{-\frac{T^2}{2T_0^2}}$$

Dove T_0 è la deviazione standard ma generalmente è più utilizzata la larghezza a metà altezza (FWHM); nel caso di impulso gaussiano le due grandezze sono legate dalla relazione

$$T_{FWHM} = 2(2ln2)^{1/2}T_0 \simeq 2.355T_0 \tag{2.12}$$

Procedendo con calcoli analoghi alla sezione precedente, si trova la trasformata di Fourier $a(Z=0,T)$ che, come ci si aspetta, è ancora una gaussiana di larghezza spettrale pari a $1/\mathrm{T}_0$:

$$\tilde{a}(Z=0,\Omega)=\int_{-\infty}^{\infty}dTa(Z=0,T)e^{i\Omega T}=\int dTe^{\frac{T^2}{2T_0^2}+i\Omega T}=T_0\sqrt{2\pi}\,e^{\frac{-\Omega^2T_0^2}{2}} \tag{2.13}$$

Si osserva quindi che il prodotto tra la larghezza spettrale e temporale del campo è $\Delta T\Delta\Omega=1$, ossia ci si trova nella condizione per cui, data una certa larghezza spettrale, non è possibile ridurre la durata dell'impulso.
In questa condizione si parla di un impulso "*Transform-limited*".

Inserendo i risultati ottenuti nella relazione 2.13 si ottiene quindi la soluzione generale nel dominio delle frequenze:

$$\tilde{a}(Z,\Omega)=T_0\sqrt{2\pi}\,e^{\frac{-\Omega^2T_0^2}{2}}e^{i\Omega^2k_2Z/2} \tag{2.14}$$

si osserva che il profilo dell'inviluppo propagante non viene modificato e cioè come la Group Velocity Dispersion non altera lo spettro dell'impulso propagante in quanto proporzionale al modulo quadro della trasformata dell'inviluppo:

$$p(Z,\Omega)\propto|\tilde{a}(Z,\Omega)|^2=(T_0\sqrt{2\pi}\,e^{\frac{-\Omega^2T_0^2}{2}}e^{i\Omega^2k_2Z/2})(T_0\sqrt{2\pi}\,e^{\frac{-\Omega^2T_0^2}{2}}e^{i\Omega^2k_2Z/2})^*= \tag{2.15}$$

$$=(T_0\sqrt{2\pi}\,e^{\frac{-\Omega^2T_0^2}{2}})^2\equiv|\tilde{a}(0,\Omega)|^2 \tag{2.16}$$

Continuando lo studio, si torna nel dominio del tempo antitrasformando la soluzine trovata 2.14. Come nella sezione precedente si risolve l'integrale sfruttando il competamento del quadrato.

$$a(Z,T)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\Omega\tilde{a}(Z,\Omega)e^{-i\Omega T}=T_0\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}d\Omega e^{\frac{-\Omega^2T_0^2}{2}+\frac{i\Omega^2k_2Z}{2}-i\Omega T}=$$

$$=T_0\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}d\Omega e^{-\frac{1}{2}(T_Z^2\Omega^2-2iT\Omega)}=T_0\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}d\Omega e^{-\frac{1}{2}\left(T_Z^2\Omega^2-\frac{iT}{T_Z}-\frac{T^2}{2T_Z}\right)}e^{\frac{-T^2}{2T_Z}}=$$

$$=T_0\sqrt{\frac{1}{2\pi}}e^{\frac{-T^2}{2T_Z}}\int_{-\infty}^{\infty}d\Omega e^{-\frac{1}{2}\left(t_Z\Omega-\frac{iT}{T_Z}\right)^2}=T_0\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\sqrt{\frac{2\pi}{T_Z}}e^{\frac{-T^2}{2T_Z}}=\frac{T_0}{\sqrt{T_0^2-ik_2Z}}e^{-\frac{T^2}{2(T_0^2-ik_2Z)}}$$

Dunque si nota che il parametro k_2, e dunque la Group Velocity Dispersion, è tale che l'ampiezza e la larghezza dell'inviluppo propagante lungo z cambino di una quantità complessa pari a

$$T_Z\equiv\sqrt{T_0^2-ik_2Z} \tag{2.17}$$

Dal termine 2.17 si deduce che anche l'esponenziale nell'espressione di $a(Z,T)$ è una quantità complessa, allora, volendo riscrivere l'inviluppo in termini di un modulo e una fase $a(Z,T)=U(Z,T)e^{i\Phi}$, si tratta tale esponente dividendolo in una parte reale e una parte immaginaria

$$\frac{T^2}{2(T_0^2-ik_2Z)}=\frac{T^2}{2(T_0^2-ik_2Z)}\frac{(T_0^2-ik_2Z)^*}{(T_0^2-ik_2Z)^*}=\frac{T^2T_0^2}{2T_0^4\left(1+\frac{k_2^2Z^2}{T_0^4}\right)}+i\frac{k_2ZT^2}{2T_0^4\left(1+\frac{k_2^2Z^2}{T_0^4}\right)}=$$

$$=\frac{T^2}{2\left(T_0^2+\frac{k_2^2Z^2}{T_0^2}\right)}+i\frac{k_2ZT^2}{2T_0^2\left(T_0^2+\frac{k_2^2Z^2}{T_0^2}\right)}=\left(\frac{T^2}{2T_R^2}+i\frac{k_2Z}{T_0^2}\frac{T^2}{2T_R^2}\right)$$

l'espressione è stata ottenuta semplificando e introducendo la quantità $T_R(Z)$ definita come

$$T_R(Z) = T_0\sqrt{1 + \frac{k_2^2 Z^2}{T_0^4}} = T_0\sqrt{1 + \left(\frac{Z}{L_D}\right)^2} \tag{2.18}$$

Dunque un impulso gaussiano durante la propagazione mantiene la sua forma inavriata mentre la sua larghezza $T_R(Z)$ aumenta con Z [4].
La lunghezza di dispersione

$$L_D = \frac{T_0^2}{|k_2|}$$

è il parametro che regola la portata dell'allargamento della larghezza dell'impulso propagante e quindi della Group Velocity Dispersion: impulsi più corti subiscono un effetto dispersivo maggiore poichè la lunghezza di dispersione è minore, ossia minore è la distanza da percorrere per subire l'allargamento.
Per Z= L_D la larghezza di un impulso gaussiano aumenta di un fattore $\sqrt{2}$ rispetto la larghezza iniziale, ossia prima dell'ingresso nel dielettrico [4].

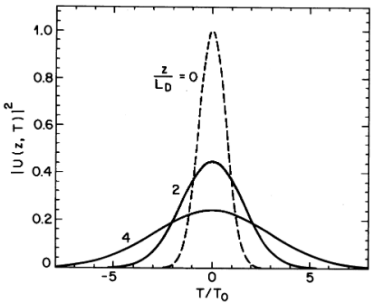

Figura 2.1. Dispersione di un fascio gaussiano in una fibra al variare del rapporto Z/L_D [4]

Con i risultati ottenuti è quindi possibile riscrivere l'inviluppo come

$$a(Z,T) = U(Z,T)e^{i\Phi} = \frac{T_0}{T_z}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{T^2}{2T_R^2} + i\frac{k_2 Z T^2}{2T_0^2 T_R^2}\right)} \tag{2.19}$$

dove si ha una nuova fase $\Phi(Z,T) \equiv -i\frac{k_2 Z T^2}{2T_0^2 T_R^2}$ dipendente dal segno di k_2.
Si osserva che l'impulso non è più transform-limited infatti si ha che $\Delta T_R \Delta\Omega \neq 1$ dal momento che, dalla relazione 2.18, $T_r \neq T_0$.

2.7 Diversi regimi di dispersione

In base al segno di k_2 si distinguono due tipi di dispersione:
Per $k_2>0$ si parla di dispersione normale, in cui le componenti a frequenze maggiori vengono propagate più lentamente mentre quelle a frequenze maggiorni si spostano verso la Leading Edge dell'impulso, viaggiando più velocemente .
Per $k_2<0$ si parla di dispersione anomala, cioè l'inverso del caso precedente, in cui le componenti a frequenze maggiori vengono propagate più velocemente.

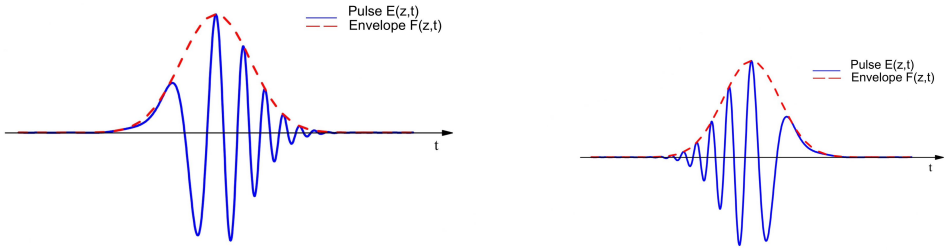

Figura 2.2. Profilo spettrale di un impulso dopo la propagazione in un mezzo in regime di dispersione normale (pannello di destra) e di dispersione anomala (pannello di sinistra). Si nota che nel regime normale le frequenze più alte vengono dopo nel tempo rispetto alle frequenze più basse, mentre nel regimene anomalo avviene il contrario.

La dispersione della larghezza di un impulso propagante può essere compresa ricordando che frequenze diverse vengono propagate a velocità diverse.[4]
Tale descrizione è del tutto concorde con il fatto che l'allargamento indotto dalla dispersione non dipende dal segno di k_2 e quindi, per un dato valore di L_D un impulso si allarga di una stessa quantità nei regimi anomali e normali.
Dunque la distribuzione delle frequenze nell'impulso al variare del segno di k_2 è dovuta alla dipendenza temporale nel termine di fase.
Si parla infatti di impulso "*chirped*" ossia di un segnale modulato in frequenza. Definendo la frequenza istantanea

$$\omega_{ist} = \omega_0 - \frac{\partial \Phi}{\partial T}$$

Si nota che l'impulso iniziale, a differenza di quello trasmesso non è modulato in fase ovvero è 'unchirped'. [4]
Analiticamente la modulazione della frequenza rispetto al tempo è espressa dalla derivata della fase rispetto al tempo ed è detta "frequenza di chirp", quest'ultima infatti ha le dimensioni di una pulsazione [rad/s]:

$$\delta\omega = -\frac{\partial \Phi}{\partial T} = \omega_{ist} - \omega_0 = \frac{k_2 Z T}{T_0^4\left(1 + \frac{k_2^2 Z^2}{T_0^4}\right)} \tag{2.20}$$

tale equazione mostra chiaramente la dipendenza lineare della frequenza dal tempo.

La situazione è diversa se l'impulso iniziale presenta un chirp iniziale C. In tal caso la forma dell'inviluppo diviene

$$a(Z = 0, T) = e^{-\frac{(1+iC)}{2}\frac{T^2}{T_0^2}} \tag{2.21}$$

In particolare il segnale è detto up-chirped per C>0 cioè corrispondente al regime di dispersione normale, mentre è detto down-chirped per C<0 cioè corrispondente al regime di dispersione anomala. Si cercano soluzioni del tipo

$$\tilde{a}(Z, \Omega) = \tilde{a}(Z = 0, \Omega) e^{i\Omega^2 k_2 Z/2} \tag{2.22}$$

Si procede calcolando la trasformata di Fourier dell'inviluppo:

$$\tilde{a}(Z=0,\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dT e^{-\frac{(1+iC)}{2}\frac{T^2}{T_0^2}+iT\Omega} = \sqrt{\frac{2\pi T_0^2}{1+iC}}\, e^{-\frac{\Omega^2 T_0^2}{2(1+iC)}}$$

da cui si osserva che la larghezza spettrale in caso di chirp lineare è $\Delta\Omega = \frac{1}{T_0}\sqrt{1+C^2}$. Quindi sostituendo la relazione trovata nella relazione 2.22 si ottiene

$$\tilde{a}(Z,\Omega) = \sqrt{\frac{2\pi T_0^2}{1+iC}}\, e^{-\frac{\Omega^2 T_0^2}{2(1+iC)}} e^{i\Omega^2 k_2 Z/2}$$

Infine tornando nel dominio del tempo e definendo T_c

$$T_c = \sqrt{\frac{T_0^2}{1+iC} - ik_2 Z}$$

la soluzione generale è

$$\begin{aligned} a(Z,T) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\Omega \tilde{a}(Z,\Omega) e^{-iT\Omega} = \frac{T_0}{\sqrt{2\pi(1+iC)}}\int_{-\infty}^{\infty} d\Omega e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\Omega^2 T_0^2}{1+iC} - i\Omega^2 k_2 Z + 2i\Omega T\right)} = \\ &= \frac{T_0}{\sqrt{2\pi(1+iC)}} e^{-\frac{T^2}{2T_c^2}} \int_{-\infty}^{\infty} d\Omega e^{\frac{1}{2}\left(T_c\Omega - \frac{iT}{T_c}\right)^2} = \frac{T_0}{T_c}\frac{1}{\sqrt{1+iC}} e^{-\frac{T^2}{2T_c^2}} = \\ &= \frac{T_0}{\sqrt{T_0^2 - ik_2 Z(1+iC)}} e^{-\frac{T^2}{2\sqrt{\frac{T_0^2}{1+iC} - ik_2 Z}}} \end{aligned}$$

Quindi anche un impulso gaussiano chirped propagante mantiene la sua forma inalterata, mentre la larghezza spettrale dell'inviluppo dopo la propagazione si è allargata. Si definisce il fattore di allargamento come il rapporto tra la largehzza iniziale e la larghezza dopo la propagazione

$$T_1 = T_0\left[\left(1+\frac{Ck_2 Z}{T_0^2}\right)^2 + \left(\frac{k_2 Z}{T_0^2}\right)\right]^{1/2} \tag{2.23}$$

quindi l'allargamento dipende dal segno del parametro k_2 e dal parametro di chirp C.

2.8 Split-Step Fourier method

In generale trovare analiticamente una soluzione come è stato appena fatto è molto complicato sopratutto se si tiene conto anche di contributi non lineari di ordine maggiore.
É necessario quindi introdurre un approccio numerico. Tra i molti esistenti il più utilizzato per risolvere problemi di propagazione di impulsi in mezzi dispersivi non lineari è lo Split-Step Fourier method. Inoltre, al fine di generalizzare lo schema risolutivo, terremo conto anche di eventuali effetti non lineari.
Si parte riscrivendo la relazione 1.21 definendo due operatori:

$$\frac{\partial}{\partial z}A(z,T) = (\hat{D}+\hat{N})A(z,T) \tag{2.24}$$

$\hat{D}$ è l'operatore di dispersione contenente i termini di dispersione e assorbimento dell'equazione, mentre $\hat{N}$ è l'operatore nonlineare che, per l'appunto, contiene i termini non lineari, non presenti nel nostro caso.

$$\hat{D} = -\frac{ik_2}{2}\frac{\partial^2}{\partial T^2} + \frac{k_3}{6}\frac{\partial^3}{\partial T^3} - \frac{\alpha}{2}$$

Lo Split-Step Fourier method permette di ricavare una soluzione approsimata assumendo che i campi siano propaganti su piccole distanze dz tali che gli effetti dispersivi e non lineari possano essere considerati indipendentemente.[4] Infatti in generale la soluzione per un passo propagante da z a z + dz, supponendo di conoscere l'impulso al tempo iniziale A(z,0), è data da:

$$A(z+dz,T) = e^{(\hat{D}+\hat{N})dz}A(z,T) \tag{2.25}$$

con $[\hat{D},\hat{N}] \neq 0$, quindi con l'azione dei due operatori accoppiata. Sfruttando l'equazione di Hausdorff-Baker-Campbell con $\hat{X}=\hat{D}dz$ e $\hat{Y}=\hat{N}dz$

$$e^{\hat{Z}} = e^{\hat{X}}e^{\hat{Y}} \qquad \hat{Z} = \hat{X} + \hat{Y} + \frac{1}{2}[\hat{X},\hat{Y}] + \frac{1}{12}[\hat{X}[\hat{X},\hat{Y}]] - \frac{1}{12}[\hat{Y}[\hat{X},\hat{Y}]] \tag{2.26}$$

la soluzione può essere approssimata; considerando solo il primo ordine dell'espansione si ha

$$A(z+dz,T) \simeq e^{\hat{D}dz}e^{\hat{N}dz}A(z,T) + \mathscr{O}(dz^2)$$

Adesso l'algoritmo valuta il termine esponenaziale con l'operatore differenziale passando nel dominio di Fourier; con propagatore $e^{i\Delta k(\omega)dz}$. Poi, antitrasformando, si ottiene la soluzione finale $A(z+dz,T)$. Il calcolo analitico è reso molto veloce grazie all'utilizzo di algoritmi di Fast Fourier Trasform FFT e il suo inverso. FFT è un algortimo di MATLAB utilizzato per svoglere trasformate di Fourier discrete. Riassumendo i passi dell'algoritmo sono:

$$A(z,T) \to \tilde{A}(z,\omega) \to \tilde{A}(z+dz,\omega) \to A(z+dz,T)$$

Reiterando la procedura per un numero di step dz si ottiene l'andamento dell'inviluppo propagante. Si può migliorare l'accuratezza di questo metodo sfruttando una diversa procedura d'integrazione numerica simmetrizzando lo Split Step Fourier method.

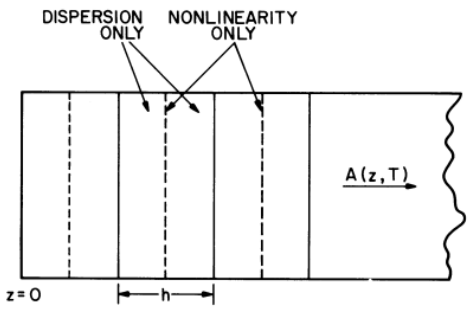

Figura 2.3. Schema illustrativo del Symmetrized Split Step Fourier method utilizzato per le simulazioni numeriche [4]

Con un passo dz molto piccolo la soluzione in questo caso è

$$\begin{aligned} A(z+dz,T) &\simeq e^{\hat{D}\frac{dz}{2}} e^{\int_z^{z+dz} dz' \hat{N}(z')} e^{\hat{D}\frac{dz}{2}} A(z,T) \\ &\simeq e^{\hat{D}\frac{dz}{2}} e^{\hat{N}dz} e^{\hat{D}\frac{dz}{2}} \end{aligned}$$

Ovvero si applica l'operatore di diffrazione $\hat{D}$ per mezzo passo $dz/2$, poi l'operatore di disomogeneità $\hat{N}$ per un intero passo dz e poi ancora l'operatore $\hat{D}$ per un mezzo passo $dz/2$. In questo modo l'errore numerico non è piu di ordine $\mathscr{O}(dz^2)$ bensì di ordine $\mathscr{O}(dz^3)$, velocizzando la convergenza. Per dimostrarlo si applica due volte la relazione 2.26

$$e^{\frac{\hat{X}}{2}} \left(e^{\hat{Y}} e^{\frac{\hat{X}}{2}} \right) = e^{\frac{\hat{X}}{2}} e^{\hat{Z}'} = e^{\hat{Z}''}$$

con $\hat{Z}'$ definito come

$$\hat{Z}' = \hat{Y} + \frac{\hat{X}}{2} + \frac{1}{2}\left[\hat{Y}, \frac{\hat{X}}{2}\right] + \mathscr{O}(dz^3)$$

e $\hat{Z}''$ definito come

$$\hat{Z}'' = \frac{\hat{X}}{2} + \hat{Y} + \frac{\hat{X}}{2} + \frac{1}{2}\left[\hat{Y}, \frac{\hat{X}}{2}\right] + + \frac{1}{2}\left[\frac{\hat{X}}{2}, \hat{Y}\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{\hat{X}}{2}, \frac{\hat{X}}{2}\right] + \mathscr{O}(dz^3) = \hat{X} + \hat{Y} + \mathscr{O}(dz^3)$$

2.9 Third Order Dispersion TOD

In generale il contributo dominante negli effetti dispersivi è dato dal termine k_2 e il termine di ordine successivo diviene significativo in prossimità della lunghezza d'onda di "zero-dispersion" λ_D in cui il termine k_2 si annulla

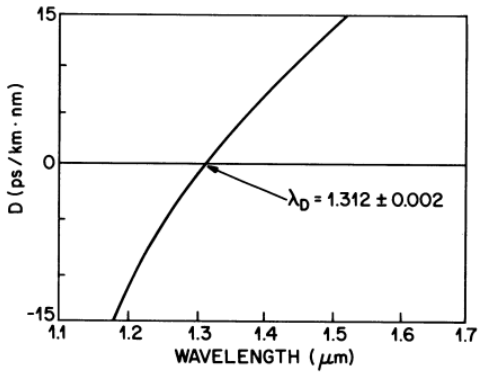

Figura 2.4. Variazione del parametro di dispersione D in funzione della lunghezza d'onda. Il parametro D è spesso utilizzato al posto del termine k_2 e i due sono legati dalla relazione $D = \frac{dk_1}{d\lambda} = -\frac{2\pi c}{\lambda^2} k$. [4]

Tuttavia nel caso di impulsi ultracorti (T_0<1ps) è necessario introdurre sempre anche il termine k_3 poichè il parametro $\Delta\omega/\omega_0$ non è più abbastanza piccolo per troncare l'espansione al secondo ordine.

Allora si vuole studiare l'effetto della dispersione del terzo ordine k_3 nella propagazione dell'impulso. Si riparte dalla relazione

$$\frac{\partial}{\partial Z}a(Z,T) + \frac{ik_2}{2}\frac{\partial^2}{\partial T^2}a(Z,T) - \frac{k_3}{6}\frac{\partial^3}{\partial T^3}a(Z,T) = 0$$

che scritta nel dominio dell frequenze diviene

$$\frac{\partial}{\partial Z}\tilde{a}(Z,\Omega) = \left[\frac{ik_2\Omega^2}{2} + \frac{ik_3\Omega^3}{6}\right]\tilde{a}(Z,\Omega) = \frac{i}{2}(k_2\Omega^2 + \frac{k_3}{3}\Omega^3)\tilde{a}(Z,\Omega)$$

e ammette soluzioni del tipo

$$\tilde{a}(Z,\Omega) = \tilde{a}(Z=0,\Omega)e^{\frac{i}{2}(k_2\Omega^2+\frac{k_3}{3}\Omega^3)Z}$$

Si considera ancora un impulso gaussiano con inviluppo a(Z=0,T)=$e^{-\frac{T^2}{2T_0^2}}$, quindi sfruttando ancora le proprietà delle trasformate di Fourier si ottiene

$$\tilde{a}(Z=0,\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dT a(Z=0,\Omega)e^{i\Omega T} = \sqrt{2\pi T_0^2}\, e^{-\Omega^2 T_0^2/2}$$

quindi sostituendo nella relazione precedente

$$\tilde{a}(Z,\Omega) = \sqrt{2\pi T_0^2}\, e^{-\Omega^2 T_0^2/2} e^{\frac{i}{2}\left(k_2\Omega^2+\frac{k_3}{3}\Omega^3\right)Z}$$

Infine antitrasformando, si torna nel dominio del tempo e la soluzione generale è

$$a(Z,T) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \tilde{a}(Z,\Omega)e^{-i\Omega T} = \sqrt{\frac{T_0^2}{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-\frac{\Omega^2 T_0^2}{2}} e^{\frac{i}{2}\left(k_2\Omega^2+\frac{k_3}{3}\Omega^3\right)Z - i\Omega T}$$

Non ammettendo soluzione analitica se ne mostra un plot numerico nel seguito 2.9.

Volendo confrontare il contributo relativo di k_3 e k_2 nella dispersione dell'impulso si introduce la lunghezza di dispersione associata alla TOD

$$L'_D = \frac{T_0^3}{|k_3|}$$

Si assume rilevante l'effetto della TOD nel caso in cui $L'_D \geq L_D$.[4] Come ordini di scala, se si considera un impulso di durata 100 ps la condizione sulle lunghezze di dispersione implica che $k_2 < 10^{-3} ps^2/km$ con $k_3 = 0.1 ps^3/km$. [4]

É interessante osservare che, a differenza della GVD, nel caso della Third-order dispersion il profilo dell'impulso propagante nel mezzo dispersivo non mantiene la sua forma iniziale ma viene distorto diventando asimmetrico e con una coda oscillante. Quale delle due code dipende dal segno di k_3: se k_3>0 le oscillazioni si presentano nella coda d'uscita mentre per k_3<0 nella coda d'entrata.
Inoltre si osserva che nel caso in cui $k_2 \simeq 0$ tali oscillazioni risultano molto marcate, viceversa per valori di k_2 tali che $L'_D = L_D$ le oscillazioni sono quasi inesistenti.

Sfruttando gli algoritmi descritti nella sezione 2.8 viene simulato un fascio gaussiano di durata $T_0 = 10 \times 10^{-15} s$ nel caso di assorbimento nullo, quindi $\alpha = 0$, che si propaga all'interno di un mezzo dispersivo fino alla distanza $z = 5mm$.
Si inizia studiando gli effetti dispersivi del secondo ordine sul profilo temporale di tale impuslo, prendendo come parametro k_2 quello di una fibra ottica, ossia $k_2 = 2 \times 10^{-26}\ ps^2/km$.
I codici MATLAB utilizzati per la simulazione sono raccolti in appendice.

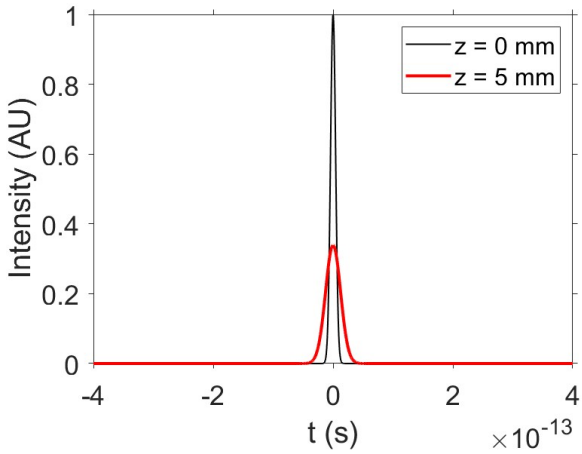

Figura 2.5. Dispersione di un fascio gaussiano propagante in un mezzo dispersivo con parametri k_2=2×10^{-26}, C=0 e $L_D = 1.8 \times 10^{-3}$

Si nota quanto detto precedentemente: nella sua evoluzione l'inviluppo si è allargato. É interessante osservare che con l'allargamento del profilo gaussiano conseguentemente si osserva una diminuzione dell'intensità.
Questo è dovuto al fatto che deve essere conservata l'energia del sistema; infatti dalla 2.16 segue che affinchè la potenza resti costante se l'inviluppo si allarga allora l'intensità dovrà diminuire.

Adesso si vuole studiare la dipendenza dell'allargamento della larghezza spettrale di un impulso gaussiano pre-chiped dal segno del parametro k_2 e dal parametro di chirp C.

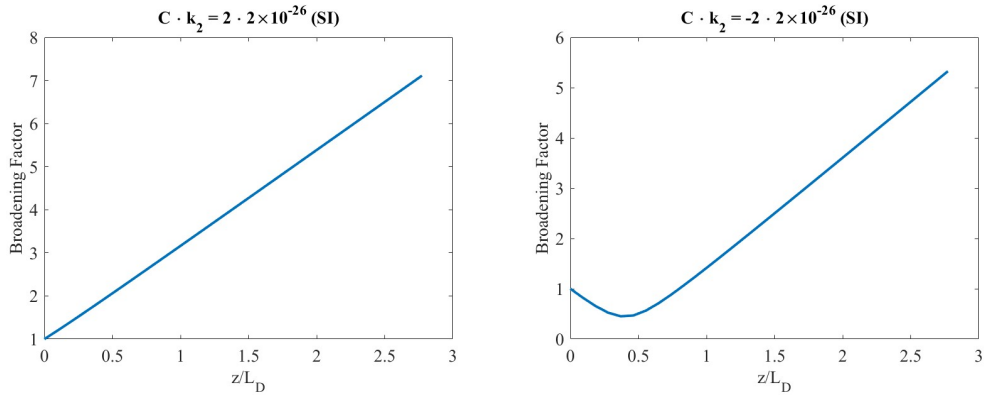

Figura 2.6. Fattore di allargamento T_1/T_0 per un impulso gaussiano chirped in funzione della distanza z con parametri k_2=2×$10^{-26} ps^2/km$, C=±2 e $L_D = 1.8 \times 10^{-3} km$

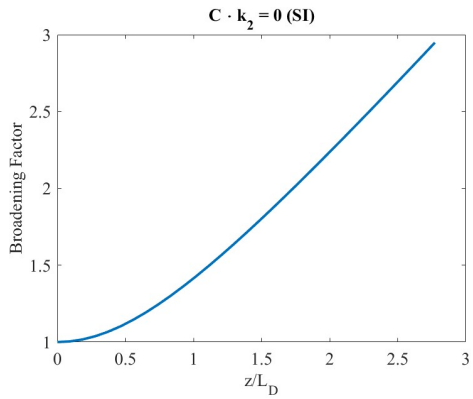

Figura 2.7. Fattore di allargamento T_1/T_0 per un impulso gaussiano chirped in funzione della distanza con parametri k_2=2×10^{-26} ps^2/km, C=0 e $L_D = 1.8 \times 10^{-3} km$

Si osserva che se $k_2C > 0$ l'allargamente è monotono crescente con z, invece, se $k_2C < 0$ prima della crescita lineare si osserva un restringimento.
É interessante osservare che nel caso k_2C<0 la largehzza dell'impulso assume valore minimo in z_{min}

$$z_{min} = \frac{|C|}{1+C^2} L_D \qquad T_1^{min} = \frac{T_0}{\sqrt{1+C^2}}$$

e in questa posizione il segnale è del tipo tranform-limited perchè $\Delta\Omega T_1^{min} = 1$.

Ora, tornando al caso di impulso gaussiano non chirped, si vuole tener conto anche degli effetti dispersivi del terzo ordine, quindi si aggiunge il parametro k_3=4×10^{-40} ps^3/km.

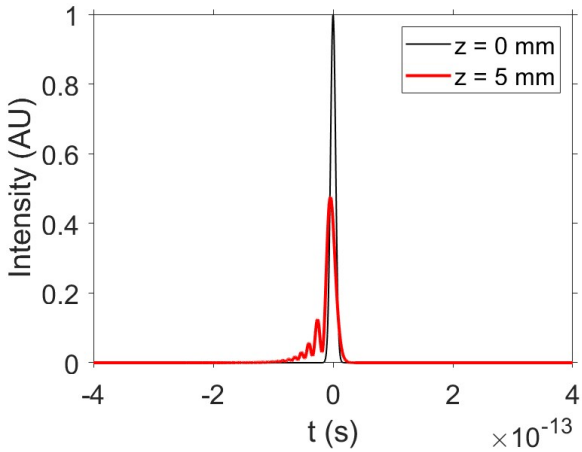

Figura 2.8. Andamento dell'intensità in funzione del tempo di un impulso gaussiano in presenza di Group Velocity dispersion e Third-order dispersion con parametri $k_3 > 0$, C=0 e $L'_D = 5.4 \times 10^{-4} km$

Dunque si nota come a questo punto sia cambiata anche la forma dell'impulso che è diventata asimmetrica, presenta una coda oscillante e non è più allineata alla sua forma iniziale. Cambiando i parametri iniziali della simulazione, scegliendoli in modo tale che $L_D = L'_D$ si può osservare come tali variazioni siano meno marcate.

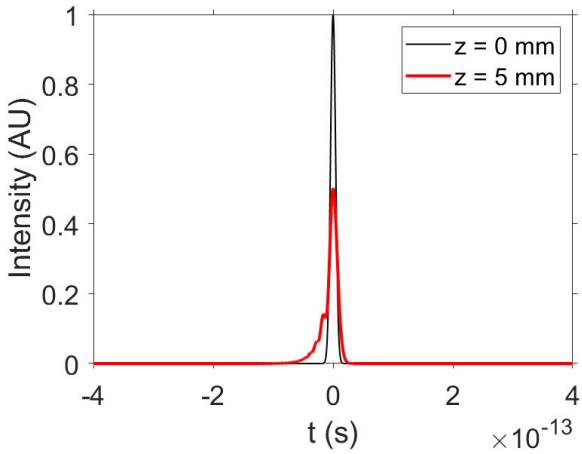

Figura 2.9. Andamento dell'intensità in funzione del tempo di un impulso gaussiano in presenza di Group Velocity dispersion e Third-order dispersion con parametri $k_3 = k_2 T_0$, C=0 e $L_D = 1.8 \times 10^{-3} km, L'_D = 1.1 \times 10^{-3} km$

Fino a questo momento è stato preso in considerazione solo il caso specifico di un impulso gaussiano. Nonostante la maggior parte delle sorgenti laser possano essere approssimate a un andamento gaussiano, si vuole sfruttare l'algoritmo numerico per trattare altre tipologie d'impulsi per i quali non è altrettanto immediato trovare una soluzione analitica.

Si studia la GVD nel caso di impulso super-gaussiano (rientrano in questa categoria impulsi di laser a semiconduttori), caratterizzato da una forma più quadrata e code più ripide rispetto a una gaussiana. In questo caso l'inviluppo iniziale chirped ha forma del tipo

$$a(Z = 0, T) = e^{-\frac{1+iC}{2}\left(\frac{T}{T_0}\right)^{2m}}$$

dove m è il parametro che regola la pendenza delle code dell'inviluppo e per m=1 si torna nel caso gaussiano chirped.

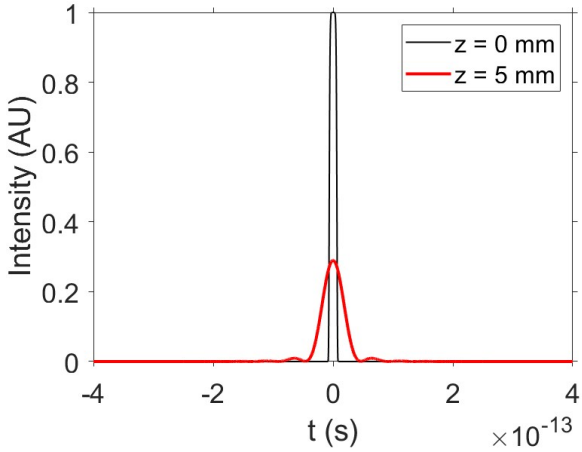

Figura 2.10. Andamento dell'intensità in funzione del tempo di un impulso super-gaussiano in presenza di GVD con parametri k_2 =2×10^{-26} ps^2/km, C=0 e m=2

Nel caso di una super-gaussiana, essendo le code più ripide, gli effetti dispersivi saranno più accentuati dal momento che una coda più grande implica uno spettro più ampio. Questo avviene poichè il ritardo che la GVD induce su ciascuna frequenza dello spettro è proporzionale alla loro differenza con la frequenza portante ω_0.[4] Inoltre, si osserva che l'inviluppo di un impulso super gaussiano propagante in un mezzo, oltre ad allargarsi più velocemente di un impulso gaussiano, a causa degli effetti dispersivi del secondo ordine cambia anche la sua forma.

Conclusioni

In questa dissertazione è stato discusso come viene modifcato il profilo temporale di un impulso ultracorto propagante in un mezzo dielettrico perfetto a causa di effetti dispersivi. Dopo aver introdotto gli strumenti teorici e quindi le equazioni di Maxwell, è stata ricavata l'equazione di Helmholtz nel dominio temporale. Passando alla controparte di quest'ultima nel dominio spettrale, è stata quindi descritta la propagazione di un impulso in un materiale nel caso di dispersione lineare e poi nel caso di effetti perturbativi del secondo e del terzo ordine. Sono state sfruttate le proprietà della trasformata di Fourier per poter risolvere il problema con più facilità da un punto di vista analitico, studiando il caso specifico di un impulso gaussiano. Prima dallo studio analitico e poi da quello computazionale è stato mostrato come, per effetto della Group Velocity dispersion, un impulso propagante in un mezzo subisce una modifica della sua forma temporale in virtù della diversa velocità di propagazione delle diverse componenti cromatiche, mentre il profilo spettrale rimane invariato. Al fine di generalizzare la modellizzazione per profili temporali arbitrari è stato introdotto lo Spilt-Step Fourier method per studiare gli effetti dispersivi del secondo e del terzo ordine. Inoltre è stato studiato come, nel momento in cui diventano rilevanti anche gli effetti della Third-Order dispersion è presente una distorsione della forma temporale dell'impulso propagante rispetto la sua forma iniziale, divenendo asimmetrica e con delle code oscillanti. La trattazione è stata conclusa analizzando alcuni degli effetti dispersivi nel caso di un impulso super-gaussiano.

Appendice

I codici MATLAB utilizzati per svolgere le simulazioni sono riportati al seguente link.

Si riportano di seguito alcune specifiche che possono essere utili per eventuali modifiche del codice: il chirp è modificabile tramite il parametro "C" alla linea 25 del codice.
La durata dell'impulso inziale può essere modificata alla linea 9 tramite il parametro "T0". Il profilo temporale dell'impulso tramite il parametro "A" alla linea 56 del codice mentre alla linea 57 si trova la forma specifica utilizzata per simulare il fascio super-gaussiano. Nel caso di impulso super-gaussiano, è possibile variare il parametro che regola la ripidità delle code alla linea 15 con il parametro "m".
I parametri k_2 e k_3, inidicati con "beta2" e "beta3" nel codice, sono modificabili rispettivamente alle linee 20 e 21 del codice.
Si può tener conto dell'assorbimento variando il parametro "alpha" alla linea 24 del codice. Alla linea 23 del codice si può aumentare o diminuire la distanza massima percorsa dall'impulso propagante all'interno del mezzo.

Bibliografia

[1] C. Rullière, *Femtosecond Laser Pulses*, Springer, 2003.

[2] Press release. NobelPrize.org. Nobel Prize Outreach AB 2023. Mon. 20 Nov 2023. https://www.nobelprize.org/prizes/physics/2023/press-release/

[3] J. C. Diels & W. Rudolph , *Ultrashort laser phenomena,* Academic press, 2006.

[4] G. Agrawal, *Nonlinear fiber optics,* Academic Press, 2006.

[5] A. M. Fox, *Quantum Optics*, OUP Oxford, 2006.

[6] G. R. Fowles, *Introduction to modern optics,* Dover publications, 1989.